Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 401, 2012 г.

О. Л. Виноградов

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ЧЕРЕЗ ОТКЛОНЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА ВЕЙЕРШТРАССА

Рассматривается задача о наилучшей постоянной K в оценках вида

$$A_\sigma(f)_P \leqslant KP(f - f * W),$$

где ядро W суммируемо на $\mathbb{R}$, $A_\sigma(f)_P$ – наилучшее приближение функции f целыми функциями степени не выше σ по полунорме P, и о реализации этих оценок линейными методами приближения.

1. Обозначения. Символами $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ обозначаются множества вещественных, целых, неотрицательных целых, натуральных чисел соответственно; $[a:b] = [a,b] \cap \mathbb{Z}$; $C(E)$ и $C^{(r)}(E)$ – множества непрерывных и r раз непрерывно дифференцируемых на множестве E функций. Рассматриваются следующие пространства функций: $UCB(\mathbb{R})$ – пространство равномерно непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}$ функций, C – пространство 2π-периодических непрерывных функций с равномерными нормами $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$; если $1 \leqslant p < \infty$, то $L_p(\mathbb{R})$ и L_p – пространства измеримых, суммируемых с p-й степенью (на оси или на периоде, 2π-периодических) функций f с нормами $\|f\|_p = \left(\int\limits_E |f|^p\right)^{1/p}$, где E – это $\mathbb{R}$ или $[-\pi, \pi]$ соответственно; $L(\mathbb{R}) = L_1(\mathbb{R})$, $L = L_1$; $L_\infty(\mathbb{R})$ – пространство измеримых существенно ограниченных на $\mathbb{R}$ функций f с нормой

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{vrai\,sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|,$$

L_∞ – подпространство 2π-периодических функций из $L_\infty(\mathbb{R})$. Если из контекста не следует противное, пространства функций могут быть как вещественными, так и комплексными.

Пусть $\mathfrak{M}$ – замкнутое подпространство пространства $L_p(\mathbb{R})$ $(1 \leqslant p < \infty)$ или пространства $UCB(\mathbb{R})$ $(p = \infty)$, P – полунорма, заданная на $\mathfrak{M}$. Если выполняются условия:

Ключевые слова: наилучшее приближение, точные константы, свертка, вполне монотонные функции.

1) пространство $\mathfrak{M}$ с полунормой P инвариантно относительно сдвига, т.е. для любых $f \in \mathfrak{M}$ и $h \in \mathbb{R}$ имеют место соотношения $f(\cdot + h) \in \mathfrak{M}$ и $P(f(\cdot + h)) = P(f)$,
2) существует такая постоянная B, что $P(f) \leqslant B\|f\|_p$ для всех $f \in \mathfrak{M}$,

то будем говорить, что пространство $(\mathfrak{M}, P)$ принадлежит классу $\mathcal{B}$. Примерами пространств класса $\mathcal{B}$ являются: $\big(UCB(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\big)$, $(L_p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, пространства периодических функций $\big(C, \|\cdot\|_p\big)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, а также более общие пространства равномерно непрерывных почти-периодических функций, показатели которых принадлежат фиксированному множеству, с различными нормами.

Далее $\mathbf{E}_\sigma$ и $\mathbf{E}_{\sigma-0}$ – множества целых функций степени не больше (меньше) $\sigma > 0$; наилучшее приближение функции f по полунорме P определяется равенством

$$A_\sigma(f)_P = \inf_{\substack{g \in \mathbf{E}_\sigma \\ f-g \in \mathfrak{M}}} P(f-g)$$

$(\inf \varnothing = +\infty)$, аналогично определяется величина $A_{\sigma-0}(f)_P$. Индекс p у величины означает, что $P(f) = \|f\|_p$. Функции доопределяются в точке устранимого разрыва по непрерывности, в других случаях полагаем $\frac{0}{0} = 0$. Далее,

$$c(f, y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt}\, dt$$

– комплексное преобразование Фурье функции $f \in L(\mathbb{R})$, $a(f)$ и $b(f)$ – косинус- и синус-преобразования Фурье, то есть

$$a(f, y) = c(f, y) + c(f, -y), \quad b(f, y) = i\big(c(f, y) - c(f, -y)\big).$$

По аналогии, если на симметричном относительно нуля подмножестве прямой $\mathbb{R}$ задана функция c, то положим

$$a(y) = c(y) + c(-y), \quad b(y) = i(c(y) - c(-y)). \tag{1}$$

Для четной функции c будет выполнено равенство $a = 2c$, а для нечетной – $b = 2i\, c$.

Свертка двух функций f и g определяется равенством

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t)\, dt,$$

при такой нормировке $c(f*g)=c(f)c(g)$.

2. Общие оценки. Пусть задан оператор $\mathcal{W}$ свертки с ядром $W\in L(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{W}f=f*W.$$

Рассматривается задача о наилучшей постоянной в оценке

$$A_\sigma(f)_P\leqslant KP(f-\mathcal{W}f) \tag{2}$$

и о реализации этой оценки линейными методами приближения.

Покажем, что эта задача сводится к класической задаче о приближении классов сверток.

Лемма 1. *Пусть* $p\in[1,+\infty]$, $f\in L_p(\mathbb{R})$, $\varphi=(I-\mathcal{W})f$, $y_0>0$, $c(W,y)\neq 1$ *при всех* y, *для которых* $|y|\geqslant y_0$.

1. *Тогда существуют такие функции* $Q,G\in L(\mathbb{R})$, *что* $c(Q,y)=0$, $c(G,y)=\frac{c(W,y)}{1-c(W,y)}$ *при* $|y|\geqslant y_0$ *и*

$$\mathcal{W}f=f*Q+\varphi*G. \tag{3}$$

2. *Если функция* W *четна, то функции* Q *и* G *можно выбрать четными. Если* $c(W)\in C^{(r)}\big(\mathbb{R}\backslash(-y_0,y_0)\big)$, *где* $r\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, *то функцию* G *можно выбрать так, что* $c(G)\in C^{(r)}(\mathbb{R})$.

Доказательство. 1. Возьмем такое ядро $V\in L(\mathbb{R})$, что $c(V,y)=0$ при $|y|\geqslant y_0$, а $c(W-V,y)\neq 1$ при всех $y\in\mathbb{R}$. По теореме Винера–Леви (см. [1, п. 75, с. 158]) функция $\frac{c(W-V)}{1-c(W-V)}$ есть преобразование Фурье некоторой функции $G\in L(\mathbb{R})$. Тогда

$$f*(W-V)=(f-f*(W-V))*G,$$

и поэтому выполнено равенство (3), в котором $Q=V+V*G$.

2. Утверждение о четности очевидно. Докажем утверждение о гладкости. Обозначим $w=c(W)$. Возьмем функцию $d\in C^{(r)}[-y_0,y_0]$, такую что $d^{(k)}(\pm y_0\mp)=w^{(k)}(\pm y_0\pm)$ при всех $k\in[0:r]$, $d(y)\neq 1$ при всех $y\in[-y_0,y_0]$, и положим $d(y)=w(y)$ при $|y|\geqslant y_0$. Тогда $d\in C^{(r)}(\mathbb{R})$ и $\frac{d}{1-d}\in C^{(r)}(\mathbb{R})$.

Обозначим через L^* множество преобразований Фурье функций из $L(\mathbb{R})$ [1, п. 75, с. 157]. Докажем, что $v=w-d\in L^*$. Пусть $q\in C^{(1)}(\mathbb{R})$, q четна, $q(y)=1$ при $|y|\leqslant y_0$, $q(y)=0$ при $|y|\geqslant 2y_0$. Тогда функции q и dq финитны и принадлежат классу $C^{(1)}(\mathbb{R})$, поэтому они принадлежат классу L^* (см., например, [2, с. 133, замечание 2]). Следовательно, $wq \in L^*$, а тогда $v = vq = wq - dq \in L^*$ и $d = w - v \in L^*$.

Остается обозначить через V обратное преобразование Фурье функции v и закончить доказательство, как в пункте 1. □

Слагаемое $f * Q$ из равенства (3) принадлежит пространству $\mathbf{E}_{y_0}$ и может быть включено в приближающий агрегат. Поэтому задача сводится к приближению свертки $\varphi * G$.

Напомним известные факты о приближении классов сверток.

Пусть $y_0 > 0$, $r \in \{1,2\}$. Обозначим через $CM_c^r(y_0)$ и $CM_s^r(y_0)$ (от слов "completely monotone" – "вполне монотонные") множества четных и нечетных функций c, заданных по крайней мере на $\mathbb{R} \setminus (-y_0, y_0)$, таких что при всех $y \geqslant y_0$ соответственно (см. соглашение (1))

$$a(y) = \int_0^{+\infty} e^{-y^r u} d\Phi(u), \quad b(y) = \int_0^{+\infty} e^{-y^r u} d\Psi(u),$$

где Φ и Ψ – возрастающие на $(0, +\infty)$ функции; $\widehat{CM}_c^r(y_0)$ и $\widehat{CM}_s^r(y_0)$ – множества четных и нечетных функций G из $L(\mathbb{R})$, для которых $c(G) \in CM_c^r(y_0)$ или $CM_s^r(y_0)$; $\widehat{CM}^r(y_0) = \widehat{CM}_c^r(y_0) \cup \widehat{CM}_s^r(y_0)$.

Пусть ядро G четно или нечетно, $G \in L(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, $G(t) = O(t^{-2})$ при $t \to \infty$, $\varkappa$ – четность ядра G, т.е. $\varkappa = 0$, если ядро G четно, $\varkappa = 1$, если ядро G нечетно. Обозначим [1, п. 87, с. 199–203]

$$L_\sigma(G, z) = \frac{\sin\left(\sigma z - \frac{\pi}{2}(1-\varkappa)\right)}{\sigma} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{G\left(\frac{(2k+1-\varkappa)\pi}{2\sigma}\right)}{z - \frac{(2k+1-\varkappa)\pi}{2\sigma}}.$$

Тогда $L_\sigma G$ – четная или нечетная функция из $\mathbf{E}_\sigma \cap L(\mathbb{R})$, интерполирующая функцию G в точках $\frac{(2k+1-\varkappa)\pi}{2\sigma}$ $(k \in \mathbb{Z})$, т.е. в нулях функций $\sin \sigma t$ или $\cos \sigma t$ в соответствии с ее четностью. (Значение нечетной функции G в нуле равно нулю, значение четной функции G в нуле несущественно.) Через преобразование Фурье функция $L_\sigma G$ выражается так:

$$L_\sigma(G, t) = \int_{-\sigma}^{\sigma} c(L_\sigma, y) e^{ity}\, dy, \tag{4}$$

$$c(L_\sigma G, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\pi(1-\varkappa)} c(G, y + 2k\sigma), \quad |y| \leqslant \sigma. \tag{5}$$

Для справедливости этих формул достаточно, чтобы ряд в правой части равенства (5) сходился равномерно на $[0,\sigma]$, а его сумма после домножения на $e^{i\frac{\pi(1-\varkappa)}{2\sigma}y}$ была разложима в ряд Фурье [1, п. 87, с. 202–203].

Замечание 1. В [3, свойства AM4 и AM5] отмечено, что если $G \in \widehat{CM}^2(y_0)$ и $c(G) \in C^{(2)}(\mathbb{R})$, то $G \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, $G(t) = O(t^{-2})$ при $t \to \infty$ и верны формулы (4) и (5).

Пусть
$$f = T + \varphi * G, \tag{6}$$
где $T \in \mathbf{E}_\sigma$. Обозначим
$$X_{\sigma,G}f = T + \varphi * L_\sigma G,$$
$$\mathcal{K}_{\sigma,G} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t)\operatorname{sign}\sin\sigma t\,dt = \frac{2}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{b(G,(2\nu+1)\sigma)}{2\nu+1},$$
если G нечетно;
$$\mathcal{K}_{\sigma,G} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t)\operatorname{sign}\cos\sigma t\,dt = \frac{2}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{2\nu+1}a(G,(2\nu+1)\sigma),$$
если G четно.

Замечание 2. Ясно, что $X_{\sigma,G}f \in \mathbf{E}_\sigma$. Пусть $T = 0$. Если функция φ имеет период $\frac{2\pi}{\rho}$ $(\rho > 0)$, то $X_{\sigma,G}f$ – тригонометрический многочлен степени меньшей, чем $\frac{\sigma}{\rho}$. В частности, если $\rho \geqslant \sigma$, то $X_{\sigma,G}f$ – постоянная. Если же функция φ является почти-периодической, то $X_{\sigma,G}f$ – тоже почти-периодическая функция, показатели которой принадлежат функции φ.

Следующие леммы A и B и замечание 3 содержатся в [3, леммы 5 и 7 и замечание 4]. Лемма A включает в себя классические результаты Ж. Фавара, Н. И. Ахиезера, М. Г. Крейна, С. М. Никольского, Сунь Юн-Шена и других математиков; см., например, [1] и историю вопроса в [3].

Лемма A. *Пусть функция G из $L(\mathbb{R})\cap C(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ четна или нечетна, $G(t) = O(t^{-2})$ при $t \to \infty$, $\sigma > 0$,*
$$(G(t) - L_\sigma(G,t))\cos\sigma t \geqslant 0 \quad \textit{или} \quad (G(t) - L_\sigma(G,t))\sin\sigma t \geqslant 0$$

соответственно для почти всех $t \in \mathbb{R}$. *Тогда*

$$\mathcal{K}_{\sigma,G} = \frac{1}{2\pi} A_\sigma(G)_1 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G - L_\sigma G|. \tag{7}$$

Если при этом $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $\varphi \in \mathfrak{M}$, *функции* f *и* φ *связаны равенством* (6), *то*

$$P(f - X_{\sigma,G} f) \leqslant \mathcal{K}_{\sigma,G} P(\varphi), \tag{8}$$

$$A_\sigma(f)_P \leqslant \mathcal{K}_{\sigma,G} A_\sigma(\varphi)_P, \tag{9}$$

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \mathcal{K}_{\sigma,G} A_{\sigma-0}(\varphi)_P, \tag{10}$$

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \mathcal{K}_{\sigma,G} P(\varphi), \tag{11}$$

$$A_\sigma(f)_P \leqslant \mathcal{K}_{\sigma,G} P(\varphi) \tag{12}$$

(*в* (10) *и* (11) $T \in \mathbf{E}_{\sigma-0}$). *В пространствах* $(UCB(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ *и* $(L(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ *константу* $\mathcal{K}_{\sigma,G}$ *в неравенствах* (8)–(12) *нельзя заменить меньшей. В пространствах* $\frac{2\pi}{\sigma}$*-периодических функций с равномерной и интегральной нормой константу в неравенствах* (8), (10) *и* (11) *нельзя заменить меньшей.*

Замечание 3. Неравенства типа (8)–(12) стандартным образом (например, с помощью приближения функции φ ее интегралом Фейера) переносятся с множеств непрерывных функций на множества $L_\infty(\mathbb{R})$ и L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ с полунормами $\|\cdot\|_p$, $A_\sigma(\cdot)_p$, $A_{\sigma-0}(\cdot)_p$. Кроме того, для классов сверток вида

$$f = T + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(x-t)\, dg(t)$$

и их периодических аналогов справедливы аналогичные точные оценки приближений в $L_1(\mathbb{R})$ и L_1 через вариацию g.

Далее мы не будем отмечать каждый раз возможность распространения оценок на более широкие классы функций и ограничимся формулировками для пространств класса $\mathcal{B}$.

Лемма B. *Пусть* $y_0 > 0$, *функция* G *принадлежит множеству* $\widehat{CM}^2_c(y_0)$ *или* $\widehat{CM}^2_s(y_0)$, $c(G) \in C^{(2)}(\mathbb{R})$, $\sigma \geqslant y_0$. *Тогда соответственно*

$$G(t) - L_\sigma(G,t) = 2\cos\sigma t\, C_{\sigma,G}(t)$$

или

$$G(t) - L_\sigma(G,t) = 2\sin\sigma t\, S_{\sigma,G}(t),$$

где функции $C_{\sigma,G}$ *и* $S_{\sigma,G}$ *положительны при непостоянных* Φ *и* Ψ. *При этом справедливо заключение леммы* A.

В периодическом случае ядра класса $\widehat{CM}^{1}(1)$ также рассматривались в работе В. П. Заставного и В. В. Савчука [4].

3. Основные результаты. Если $\varphi = f - \mathcal{W}f$ и $\mathcal{W}f$ представляется равенством (3), положим

$$Y_{\sigma,W}f = f * Q + \varphi * L_\sigma G.$$

Другими словами, $Y_{\sigma,W} = X_{\sigma,G}\mathcal{W}$. Тогда

$$\mathcal{W}f - Y_{\sigma,W}f = \varphi * (G - L_\sigma G).$$

Поскольку разность $G - L_\sigma G$ не изменится, если прибавить к G функцию из $\mathbf{E}_\sigma$, оператор $Y_{\sigma,W}$ не зависит от выбора функций Q и G в представлении (3).

Для оператора $Y_{\sigma,W}$ справедлив аналог замечания 2.

Замечание 4. Из определения следует, что $Y_{\sigma,W}$ – оператор свертки с ядром

$$D_\sigma = Q + (L_\sigma G - W * L_\sigma G).$$

Выразим преобразование Фурье ядра D_σ через преобразование Фурье исходного ядра W в предположении, что верна формула (4). Обозначая, как в лемме 1, $Q = V + V * G$, имеем:

$$c(D_\sigma, y) = c(V,y)(1 + c(G,y)) + (1 - c(W,y))\sum_{l\in\mathbb{Z}}(-1)^l c(G, y + 2l\sigma).$$

Выделяя слагаемое при $l = 0$ и учитывая, что $c(G) = \frac{c(W-V)}{1-c(W-V)}$, а $c(V,z) = 0$ при $|z| \geqslant \sigma$, получаем, что при $|y| \leqslant \sigma$ верна формула

$$c(D_\sigma, y) = c(W,y) - (1 - c(W,y))\sum_{l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}(-1)^{l-1}\frac{c(W, y+2l\sigma)}{1 - c(W, y+2l\sigma)}. \quad (13)$$

Теорема 1. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $f \in \mathfrak{M}$, $y_0 > 0$, $W \in L(\mathbb{R})$, *функция* W *четна,* $c(W,y) \neq 1$ *при всех* $y \geqslant y_0$, $G \in L(\mathbb{R})$, *функция* G *четна,* $G(t) = O(t^{-2})$ *при* $t \to \infty$, $c(G,y) = \frac{c(W,y)}{1-c(W,y)}$ *при всех* $y \geqslant y_0$, $\sigma \geqslant y_0$,

$$(G(t) - L_\sigma(G,t))\cos\sigma t \geqslant 0 \quad \text{для почти всех } t \in \mathbb{R}, \quad (14)$$

$\varphi = (I - \mathcal{W})f$. *Тогда*

$$P(f - Y_{\sigma,W}f) \leqslant (1 + \mathcal{K}_{\sigma,G})P(\varphi), \tag{15}$$

$$A_\sigma(f)_P \leqslant (1 + \mathcal{K}_{\sigma,G})A_\sigma(\varphi)_P, \tag{16}$$

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant (1 + \mathcal{K}_{\sigma,G})A_{\sigma-0}(\varphi)_P, \tag{17}$$

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant (1 + \mathcal{K}_{\sigma,G})P(\varphi), \tag{18}$$

$$A_\sigma(f)_P \leqslant (1 + \mathcal{K}_{\sigma,G})P(\varphi). \tag{19}$$

В пространствах $(UCB(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ *и* $(L(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ *константу в неравенствах* (15)–(19) *нельзя заменить меньшей, даже если ограничиться функциями, ортогональными пространству* $\mathbf{E}_\sigma$. *В пространствах* $\frac{2\pi}{\sigma}$*-периодических функций с равномерной и интегральной нормами константу в неравенствах* (15), (17), (18) *нельзя заменить меньшей, даже если ограничиться функциями с нулевым средним.*

Доказательство. 1. По лемме 1

$$f = \varphi + f * Q + \varphi * G,$$

где $f*Q \in \mathbf{E}_{y_0} \cap L(\mathbb{R})$. Поэтому все неравенства вытекают из леммы A. При доказательстве неравенства (17) надо еще учесть, что (см. [1, п. 99, с. 232])

$$A_{\sigma-0}(f * Q)_P \leqslant A_{\sigma-0}(f)_P A_{\sigma-0}(Q)_1 = A_{\sigma-0}(f)_P A_\sigma(Q)_1 = 0.$$

Докажем точность неравенств.

2. Сначала заметим, что по формуле (7) в пространстве $L_\infty(\mathbb{R})$ для функции $\varphi_\sigma(t) = \operatorname{sign}\cos\sigma t$ неравенство

$$\|\varphi + \varphi * (G - L_\sigma G)\|_\infty \leqslant (1 + \mathcal{K}_{\sigma,G})\|\varphi\|_\infty$$

обращается в равенство. Поэтому неравенство (15) в пространстве $L_\infty(\mathbb{R})$ обращается в равенство, если $f - \mathcal{W}f = \varphi_\sigma$. В качестве функции f можно взять

$$\psi_\sigma = \varphi_\sigma + \varphi_\sigma * G.$$

Функция ψ_σ периодическая с периодом $\frac{2\pi}{\sigma}$, и раскладывается в ряд Фурье

$$\psi_\sigma(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\bigl(1 - c(W, (2k+1)\sigma)\bigr)} \cos{(2k+1)\sigma t}.$$

Поэтому $Y_{\sigma,W}\psi_\sigma = 0$. Кроме того (см. [1, п. 96, с. 227]), $A_{\sigma-0}(\psi_\sigma)_\infty = \|\psi_\sigma\|_\infty$. Отсюда вытекает, что неравенство (18), а значит, и предшествующие неравенства (15) и (17) также обращаются в равенства на функции ψ_σ.

3. Докажем точность неравенства (19) в пространстве $L_\infty(\mathbb{R})$ на множестве функций, ортогональных $\mathbf{E}_\sigma$. Возьмем $\rho > \sigma$ и положим

$$\psi_\rho = \varphi_\rho + \varphi_\rho * G.$$

Тогда, как и ранее,

$$Y_{\sigma,W}\psi_\rho = 0, \quad (I - \mathcal{W})\psi_\rho = \varphi_\rho, \quad \|(I - \mathcal{W})\psi_\rho\|_\infty = \|\varphi_\rho\|_\infty = \|\varphi_\sigma\|_\infty,$$
$$A_\sigma(\psi_\rho)_\infty = \|\psi_\rho\|_\infty.$$

По теореме Лебега о мажорированной сходимости $\psi_\rho \underset{\rho\to\sigma+}{\longrightarrow} \psi_\sigma$ почти всюду, поэтому

$$\varliminf_{\rho\to\sigma+} \|\psi_\rho\|_\infty \geqslant \|\psi_\sigma\|_\infty,$$

что и доказывает точность неравенства (19).

Неулучшаемость неравенств на множествах непрерывных функций стандартно выводится из неулучшаемости на множествах функций из $L_\infty(\mathbb{R})$ (например, с помощью приближения функций φ_ρ их интегралами Фейера).

4. Докажем точность неравенств в случае интегральной нормы. Оператор $I - \mathcal{W}$ обратим на множествах функций, ортогональных пространству $\mathbf{E}_\sigma$. Поэтому при всех $p \in [1, \infty]$ имеем:

$$\sup_{\substack{f\perp\mathbf{E}_\sigma \\ \|(I-\mathcal{W})f\|_p\leqslant 1}} A_\sigma(f)_p = \sup_{\substack{\varphi\perp\mathbf{E}_\sigma \\ \|\varphi\|_p\leqslant 1}} A_\sigma(\varphi + \varphi * G)_p.$$

Воспользуемся соотношениями двойственности (см. [5, §1.4]):

$$\sup_{\substack{\varphi\perp\mathbf{E}_\sigma \\ \|\varphi\|_1\leqslant 1}} A_\sigma(\varphi + \varphi * G)_1 = \sup_{\substack{\varphi\perp\mathbf{E}_\sigma \\ \|\varphi\|_1\leqslant 1}} \sup_{\substack{g\perp\mathbf{E}_\sigma \\ \|g\|_\infty\leqslant 1}} \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\varphi + \varphi * G)\, g \right|$$

$$= \sup_{\substack{g\perp\mathbf{E}_\sigma \\ \|g\|_\infty\leqslant 1}} \sup_{\substack{\varphi\perp\mathbf{E}_\sigma \\ \|\varphi\|_1\leqslant 1}} \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (g + g * G)\, \varphi \right| = \sup_{\substack{g\perp\mathbf{E}_\sigma \\ \|g\|_\infty\leqslant 1}} A_\sigma(g + g * G)_\infty.$$

Из доказанной точности неравенств в $L_\infty(\mathbb{R})$ следует, что последняя верхняя грань равна $1 + \mathcal{K}_{\sigma,G}$. Значит, неравенство (19) точно в $L(\mathbb{R})$ (а, следовательно, точны и предшествующие неравенства (15)–(18)).

Аналогично доказывается точность неравенства (18) (а, следовательно, и предшествующих неравенств (15) и (17)) в пространстве L $\frac{2\pi}{\sigma}$-периодических функций:

$$\sup_{\substack{\varphi\perp 1\\ \|\varphi\|_1\leqslant 1}} A_{\sigma-0}(\varphi+\varphi*G)_1 = \sup_{\substack{\varphi\perp 1\\ \|\varphi\|_1\leqslant 1}} \sup_{\substack{g\perp 1\\ \|g\|_\infty\leqslant 1}} \left|\int\limits_{-\frac{\pi}{\sigma}}^{\frac{\pi}{\sigma}} (\varphi+\varphi*G)\, g\right|$$

$$= \sup_{\substack{g\perp 1\\ \|g\|_\infty\leqslant 1}} \sup_{\substack{\varphi\perp 1\\ \|\varphi\|_1\leqslant 1}} \left|\int\limits_{-\frac{\pi}{\sigma}}^{\frac{\pi}{\sigma}} (g+g*G)\, \varphi\right| = \sup_{\substack{g\perp 1\\ \|g\|_\infty\leqslant 1}} A_{\sigma-0}(g+g*G)_\infty.$$

При этом используется, что для таких функций $A_{\sigma-0}$ совпадает с наилучшим приближением константами. □

По лемме B для выполнения условия (14) достаточно принадлежности ядра G классу $\widehat{CM}_c^2(y_0)$. В следующей лемме устанавливается, что принадлежность классу $\widehat{CM}_c^2(y_0)$ сохраняется при переходе от ядра W к ядру G.

Лемма 2. *Если* $y_0 > 0$, $w \in CM_c^2(y_0)$, $w(y) < 1$ *при всех* $y \geqslant y_0$, *то* $\frac{w}{1-w} \in CM_c^2(y_0)$.

Доказательство. Обозначим $g = \frac{w}{1-w}$. При всех $y \geqslant y_0$

$$g(y) = \sum_{k=1}^{\infty} w^k(y).$$

Заменой переменной в двойном интеграле можно убедиться в том, что произведение двух функций из $CM_c^2(y_0)$ также принадлежит пространству $CM_c^2(y_0)$ (см. [6, с. 88, теорема 11.5]). Следовательно, по индукции $w^k \in CM_c^2(y_0)$ при всех $k \in \mathbb{N}$, то есть

$$w^k(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2 u}\, d\Phi_k(u), \quad y \geqslant y_0,$$

где функция Φ_k возрастает. Не умаляя общности, можно считать, что $\Phi_k(0) = \Phi_k(0+) = 0$, и интегрировать по замкнутому лучу $[0, +\infty)$.

Положим

$$F_n=\sum_{k=1}^{n}\Phi_k,\quad F=\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_k,\quad g_n(y)=\sum_{k=1}^{n}w^k(y)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-y^2u}\,dF_n(u).$$

Ясно, что F возрастает. Докажем, что все значения функции F конечны. Если $u^*>0$ и $F(u^*)=+\infty$, то

$$g_n(y_0)\geqslant\int\limits_{[0,u^*)}e^{-y_0^2u}\,dF_n(u)\geqslant e^{-y_0^2u^*}F_n\Big|_0^{u^*}=e^{-y_0^2u^*}F_n(u^*)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}+\infty,$$

что противоречит соотношению $g_n(y_0)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}g(y_0)$. Поэтому все значения функции F конечны.

Следовательно [7, §7.2, с. 177], справедлив предельный переход под знаком интеграла Стилтьеса, то есть

$$g(y)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-y^2u}\,dF(u).$$

$\square$

Теорема 2. *Пусть* $(\mathfrak{M},P)\in\mathcal{B}$, $f\in\mathfrak{M}$, $y_0>0$, $W\in\widehat{CM}_c^2(y_0)$, $c(W,y)<1$ *при всех* $y\geqslant y_0$, $c(W)\in C^{(2)}\big(\mathbb{R}\setminus(-y_0,y_0)\big)$, $c(G,y)=\frac{c(W,y)}{1-c(W,y)}$ *при всех* $y\geqslant y_0$, $\varphi=(I-\mathcal{W})f$, $\sigma\geqslant y_0$. *Тогда справедливо заключение теоремы* 1.

Для доказательства теоремы 2 надо по лемме 1 выбрать четную функцию G так, что $c(G)\in C^{(2)}(\mathbb{R})$, после чего сопоставить замечание 1, теорему 1, лемму B и лемму 2.

Замечание 5. В формулировке леммы 2 класс $CM^2(y_0)$ можно заменить на $CM^1(y_0)$. Поскольку функции из $CM^1(y_0)$ кратно монотонны, для ядер из $\widehat{CM}_c^1(y_0)$ теорема 2 получается непосредственным применением теоремы Б. Надя [1, п. 88, с. 203–207].

В следующих двух замечаниях предполагается, что выполнены условия теоремы 2.

Замечание 6. Константу $\mathcal{K}_{\sigma,G}$ можно преобразовать так:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{\sigma,G} &= \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{2\nu+1}\,\frac{c(W,(2\nu+1)\sigma)}{1-c(W,(2\nu+1)\sigma)}\\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{2\nu+1}\sum_{k=1}^{\infty}c^{k}(W,(2\nu+1)\sigma)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{2\nu+1}\,c^{k}(W,(2\nu+1)\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{K}_{\sigma,W_k}.\end{aligned}$$

Здесь W_k – $(k-1)$-кратная свертка ядра W с собой. Для доказательства законности перемены порядка суммирования можно сгруппировать слагаемые с номерами $\nu = 2s$ и $\nu = 2s+1$ и учесть, что $c(W,y) \in (0,1)$ и функция $c(W,y)$ убывает при $y \geqslant y_0$.

Замечание 7. По замечанию 6 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(W_k - L_\sigma W_k)$ сходится в $L(\mathbb{R})$, так как $\frac{1}{2\pi}\|W_k - L_\sigma W_k\|_1 = \mathcal{K}_{\sigma,W_k}$ в силу равенства (7). По формуле (4) при $|y| \leqslant \sigma$ сумма в правой части формулы (13) есть $c(G - L_\sigma G, y)$. Раскладывая каждую дробь как геометрическую прогрессию и меняя порядок суммирования, как в замечании 6, получаем:

$$c(G - L_\sigma G, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c(W_k - L_\sigma W_k, y).$$

При $|y| > \sigma$ последнее равенство очевидно ввиду связи между G и W.

Следовательно, сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(W_k - L_\sigma W_k)$ в пространстве $L(\mathbb{R})$ равна $G - L_\sigma G$ и справедливо разложение

$$\mathcal{W}f - Y_{\sigma,W}f = \varphi * (G - L_\sigma G) = \varphi * \sum_{k=1}^{\infty}(W_k - L_\sigma W_k).$$

4. Оценки приближений через линейные комбинации полунорм разностей. В работе [3] оценка сверху в лемме B была обобщена и усилена в виде, указанном в названии этого пункта. Чтобы аналогичным образом усилить теорему 2, введем новые обозначения и сформулируем предшествующие результаты из [3].

Центральные разности и модули непрерывности функции f определяются равенствами

$$\delta_t^r(f,x)=\sum_{k=0}^{r}(-1)^kC_r^kf\left(x+\frac{rt}{2}-kt\right),\quad \omega_r(f,h)_P=\sup_{0\leqslant t\leqslant h}P\big(\delta_t^rf\big).$$

Пусть $y_0>0$, $G\in\widehat{CM}^2(y_0)$, $c(G)\in C^{(2)}(\mathbb{R})$, $c_0(y)=c(G,y)$ при всех y, для которых $|y|\geqslant y_0$, и $0<h<\frac{2\pi}{y_0}$. Положим $c_{h0}(y)=c_0(y)$ $(|y|\geqslant y_0)$,

$$c_{h\nu}(y)=\frac{1}{2i}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\left(c_{h,\nu-1}(y)-c_{h,\nu-1}\left(\frac{2\pi s}{h}\right)\right)\frac{(-1)^{s-1}}{\pi s-hy/2}\quad \begin{matrix}(|y|\geqslant y_0,\\ \nu\in\mathbb{N}),\end{matrix}$$

$$c_{h\nu}(0)=\sum_{\substack{s=-\infty\\ s\neq 0}}^{\infty}(-1)^{s-1}c_{h\nu}\left(\frac{2\pi s}{h}\right)\quad(\nu\in\mathbb{Z}_+),$$

$$K_{h\nu}(t)=\begin{cases}\frac{2\pi}{h}\sum\limits_{s=-\infty}^{\infty}c_{h\nu}\left(\frac{2\pi s}{h}\right)e^{i\frac{2\pi s}{h}t}, & |t|\leqslant\frac{h}{2},\\ 0, & |t|>\frac{h}{2},\end{cases}\quad(\nu\in\mathbb{Z}_+).$$

По общему соглашению (1) определим функции $a_{h\nu}$ и $b_{h\nu}$.

Если $c_0\in CM_c^r(y_0)$, то $c_{h1}\in CM_s^r(y_0)$, а если $c_0\in CM_s^r(y_0)$, то $-c_{h1}\in CM_c^r(y_0)$. Функции $c_{h\nu}$ и $K_{h\nu}$ имеют ту же четность, что и c_0, при четном ν и четность, противоположную четности c_0, при нечетном ν. При всех $m\in\mathbb{Z}_+$ существует функция $G_{hm}\in L(\mathbb{R})$, той же четности, что и c_{hm}, для которой $c(G_{hm})\in C^{(2)}(\mathbb{R})$ и $c(G_{hm},y)=c_{hm}(y)$ при всех y, для которых $|y|\geqslant y_0$. Функции $K_{h\nu}$ не меняют знака на $\left(0,\frac{h}{2}\right)$ и суммируемы. При любом $m\in\mathbb{N}$ справедливы разложения

$$G=\sum_{\nu=0}^{m-1}\delta_h^\nu K_{h\nu}+\delta_h^mG_{hm}+M_{hm},$$

$$f=T+\varphi*M_{hm}+\delta_h^m\varphi*G_{hm}+\sum_{\nu=0}^{m-1}\delta_h^\nu\varphi*K_{h\nu},$$

где $M_{hm}\in\mathbf{E}_{y_0}\cap L(\mathbb{R})$, а функции f и φ связаны соотношением (6).

Пусть $\sigma\geqslant y_0$. Положим

$$U_{\sigma hm}f=U_{\sigma hm,G}f=T+\varphi*M_{hm}+\delta_h^m\varphi*L_\sigma G_{hm},$$

$$A_{h\nu}=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\left|\sum\limits_{s=0}^{\infty}\frac{1}{2s+1}b_{h\nu}\left(\frac{2\pi(2s+1)}{h}\right)\right|, & \text{четность } \nu \text{ противоположна четности } G,\\ \left|\sum\limits_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}a_{h\nu}\left(\frac{2\pi s}{h}\right)\right|, & \text{четность } \nu \text{ совпадает с четностью } G,\end{cases}$$

$$B_{\sigma hm}=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\left|\sum\limits_{s=0}^{\infty}\frac{1}{2s+1}b_{hm}((2s+1)\sigma)\right|, & \text{четность } m \text{ противоположна четности } G,\\ \frac{2}{\pi}\left|\sum\limits_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{2s+1}a_{hm}((2s+1)\sigma)\right|, & \text{четность } m \text{ совпадает с четностью } G.\end{cases}$$

Зависимость констант от ядра G: $A_{h\nu}=A_{h\nu,G}$, $B_{\sigma hm}=B_{\sigma hm,G}$ отражать в обозначениях не будем. Для операторов $U_{\sigma hm,G}$ справедливо замечание, аналогичное замечанию 2.

Следующая теорема установлена в [3, теорема 1].

Теорема C. *Пусть* $(\mathfrak{M},P)\in\mathcal{B}$, $\varphi\in\mathfrak{M}$, $y_0>0$, $G\in\widehat{CM}^2(y_0)$, $c(G)\in C^{(2)}(\mathbb{R})$, *функции* f *и* φ *связаны равенством* (6), $m\in\mathbb{N}$, $0<h<\frac{2\pi}{y_0}$, $\sigma\geqslant y_0$. *Тогда*

$$P(f-U_{\sigma hm}f)\leqslant A_{h0}P(\varphi)+\sum_{\nu=1}^{m-1}A_{h\nu}P\big(\delta_h^\nu\varphi\big)+B_{\sigma hm}P\big(\delta_h^m\varphi\big).$$

Если, сверх того, ядро G *нечетно, то* $A_{h0}P(\varphi)$ *можно заменить на* $A_{h0}\frac{\omega_1(\varphi,h)_P}{2}$.

Мы используем теорему C в случае четного ядра G.

Положим $Y_{\sigma hm}=Y_{\sigma hm,W}=U_{\sigma hm,G}\mathcal{W}$. Для операторов $Y_{\sigma hm,W}$ также справедливо замечание, аналогичное замечанию 2. Применение теоремы C сразу приводит к следующему результату.

Теорема 3. *Пусть* $(\mathfrak{M},P)\in\mathcal{B}$, $f\in\mathfrak{M}$, $y_0>0$, $W\in\widehat{CM}_c^2(y_0)$, $c(W,y)<1$ *при всех* $y\geqslant y_0$, $c(W)\in C^{(2)}\big(\mathbb{R}\setminus(-y_0,y_0)\big)$, $c(G,y)=\frac{c(W,y)}{1-c(W,y)}$ *при всех* $y\geqslant y_0$, $\varphi=(I-\mathcal{W})f$, $m\in\mathbb{N}$, $0<h<\frac{2\pi}{y_0}$, $\sigma\geqslant y_0$. *Тогда*

$$P(f-Y_{\sigma hm}f)\leqslant(1+A_{h0})P(\varphi)+\sum_{\nu=1}^{m-1}A_{h\nu}P\big(\delta_h^\nu\varphi\big)+B_{\sigma hm}P\big(\delta_h^m\varphi\big).$$

В [3, лемма 13 и следствие 5] установлены равенства

$$B_{\sigma,\frac{\pi}{\sigma},m}=2^{-m}\left(\mathcal{K}_{\sigma,G}-\sum_{\nu=0}^{m-1}2^\nu A_{\frac{\pi}{\sigma},\nu}\right),\quad U_{\sigma,\frac{\pi}{\sigma},m,G}=X_{\sigma,G}.$$

Следовательно,

$$Y_{\sigma,\frac{\pi}{\sigma},m,W} = Y_{\sigma,W}.$$

Поэтому при $h = \frac{\pi}{\sigma}$ теорема 3 принимает следующий вид.

Следствие 1. *Пусть* $(\mathfrak{M},P) \in \mathcal{B}$, $f \in \mathfrak{M}$, $y_0 > 0$, $W \in \widehat{CM}_c^2(y_0)$, $c(W,y) < 1$ *при всех* $y \geqslant y_0$, $c(W) \in C^{(2)}\big(\mathbb{R} \setminus (-y_0,y_0)\big)$, $c(G,y) = \frac{c(W,y)}{1-c(W,y)}$ *при всех* $y \geqslant y_0$, $\varphi = (I-\mathcal{W})f$, $m \in \mathbb{N}$, $\sigma \geqslant y_0$. *Тогда*

$$P(f - Y_{\sigma,W}f) \leqslant (1 + A_{\frac{\pi}{\sigma},0})P(\varphi) + \sum_{\nu=1}^{m-1} A_{\frac{\pi}{\sigma},\nu} P\big(\delta^{\nu}_{\frac{\pi}{\sigma}}\varphi\big) + \left(\mathcal{K}_{\sigma,G} - \sum_{\nu=0}^{m-1} 2^{\nu} A_{\frac{\pi}{\sigma},\nu}\right) 2^{-m} P\big(\delta^{m}_{\frac{\pi}{\sigma}}\varphi\big). \quad (20)$$

Положим $\eta_{\nu}(\varphi,h)_P = 2^{-\nu}P\big(\delta^{\nu}_{h}\varphi\big)$. Поскольку последовательность $\big\{\eta_{\nu}(\varphi,h)_P\big\}_{\nu=0}^{\infty}$ убывает, существует предел

$$\eta_{\infty}(\varphi,h)_P = \lim_{\nu\to\infty} \eta_{\nu}(\varphi,h)_P.$$

Из убывания последовательности $\big\{\eta_{\nu}(\varphi,h)_P\big\}_{\nu=0}^{\infty}$ следует, что правая часть неравенства (20) убывает по m. Поэтому наилучшая оценка получается в пределе при $m \to \infty$.

Следствие 2. *Пусть* $(\mathfrak{M},P) \in \mathcal{B}$, $f \in \mathfrak{M}$, $y_0 > 0$, $W \in \widehat{CM}_c^2(y_0)$, $c(W,y) < 1$ *при всех* $y \geqslant y_0$, $c(W) \in C^{(2)}\big(\mathbb{R} \setminus (-y_0,y_0)\big)$, $c(G,y) = \frac{c(W,y)}{1-c(W,y)}$ *при всех* $y \geqslant y_0$, $\varphi = (I-\mathcal{W})f$, $\sigma \geqslant y_0$. *Тогда*

$$P(f - Y_{\sigma,W}f) \leqslant \big(1 + A_{\frac{\pi}{\sigma},0}\big)P(\varphi) + \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu} A_{\frac{\pi}{\sigma},\nu} \eta_{\nu}\left(\varphi,\frac{\pi}{\sigma}\right)_P + \left(\mathcal{K}_{\sigma,G} - \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu} A_{\frac{\pi}{\sigma},\nu}\right) \eta_{\infty}\left(\varphi,\frac{\pi}{\sigma}\right)_P. \quad (21)$$

Неравенства (20) и (21) усиливают неравенство (15) и являются точными в случаях, указанных в теоремах 1 и 2.

5. Приложения. Ограничимся явной записью неравенств следствия 1 при $m = 0$ (то есть теорем 1 и 2) и $m = 1$. Напомним, что

$$A_{\frac{\pi}{\sigma},0} = 2\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{c(W,2s\sigma)}{1-c(W,2s\sigma)},$$

$$\mathcal{K}_{\sigma,G} = \frac{4}{\pi}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{s}\frac{c(W,(2s+1)\sigma)}{1-c(W,(2s+1)\sigma)}.$$

5.1. Пусть $\lambda > 0$,

$$W_\lambda(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda y^2}e^{ity}\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}\,e^{-\frac{t^2}{4\lambda}}$$

– ядро Вейерштрасса (ядро теплопроводности). Ясно, что $W_\lambda \in \widehat{CM}_c^2(y_0)$ для всех $y_0 > 0$. Свертка $f * W_\lambda$ есть интеграл Вейерштрасса функции f. В силу произвольности y_0 оценки верны для всех $\sigma > 0$.

Следствие 3. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $f \in \mathfrak{M}$, $\lambda, \sigma > 0$, $\varphi = f - f * W_\lambda$. *Тогда*

$$P(f - Y_{\sigma,W_\lambda}f) \leqslant \left(1 + 2\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{e^{-\lambda(2s\sigma)^2}}{1-e^{-\lambda(2s\sigma)^2}}\right)P(\varphi)$$

$$+\left(\frac{2}{\pi}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{2s+1}\frac{e^{-\lambda((2s+1)\sigma)^2}}{1-e^{-\lambda((2s+1)\sigma)^2}} - \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{e^{-\lambda(2s\sigma)^2}}{1-e^{-\lambda(2s\sigma)^2}}\right)P\left(\delta^1_{\frac{\pi}{\sigma}}\varphi\right),$$

$$P(f - Y_{\sigma,W_\lambda}f) \leqslant \left(1 + \frac{4}{\pi}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{2s+1}\frac{e^{-\lambda((2s+1)\sigma)^2}}{1-e^{-\lambda((2s+1)\sigma)^2}}\right)P(\varphi).$$

В [2, с. 285, следствие 2] для пространств периодических функций при $\sigma \in \mathbb{N}$ установлено неравенство

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \left(1 + \frac{\pi^2}{4\lambda\sigma^2}\right)P(f - f * W_\lambda).$$

5.2. Пусть $\lambda > 0$,

$$P_\lambda(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda|y|}e^{ity}\,dy = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + t^2}$$

– ядро Пуассона. Ясно, что $P_\lambda \in \widehat{CM}^1_c(y_0)$ для всех $y_0 > 0$. Свертка $f * P_\lambda$ есть интеграл Пуассона функции f. В силу произвольности y_0 оценки верны для всех $\sigma > 0$.

Следствие 4. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $f \in \mathfrak{M}$, $\lambda, \sigma > 0$, $\varphi = f - f * P_\lambda$. *Тогда*

$$P(f - Y_{\sigma,P_\lambda} f) \leqslant \left(1 + 2\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{e^{-2\lambda\sigma s}}{1 - e^{-2\lambda\sigma s}}\right)P(\varphi)$$

$$+\left(\frac{2}{\pi}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{2s+1}\frac{e^{-(2s+1)\lambda\sigma}}{1 - e^{-(2s+1)\lambda\sigma}} - \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{e^{-2\lambda\sigma s}}{1 - e^{-2\lambda\sigma s}}\right)P\big(\delta^1_{\frac{\pi}{\sigma}}\varphi\big),$$

$$P(f - Y_{\sigma,P_\lambda} f) \leqslant \left(1 + \frac{4}{\pi}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{2s+1}\frac{e^{-\lambda(2s+1)\sigma}}{1 - e^{-\lambda(2s+1)\sigma}}\right)P(\varphi).$$

В [2, с. 276, следствие 1] для пространств периодических функций при $\sigma \in \mathbb{N}$ установлено неравенство

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \left(1 + \frac{4}{\pi\lambda\sigma}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)^2}\right)P(f - f * P_\lambda).$$

Обычно оценки вида (2) изучаются, когда, как и в случае ядер Вейерштрасса и Пуассона, задано семейство ядер $\{W_\lambda\}$, образующее аппроксимативную единицу. Еще одним примером служит семейство ядер

$$\Theta_\lambda(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ity}}{\operatorname{ch}\lambda y}\,dy = \frac{\pi}{\lambda\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2\lambda}}, \quad \lambda > 0,$$

принадлежащих классу $\widehat{CM}^2_c(y_0)$ при всех $y_0 > 0$. Ядро Θ_λ возникает при описании классов аналитических в полосе $\{z : |\operatorname{Im} z| < \lambda\}$ функций [1, п. 110, с. 267–268]. Вместе с тем, результаты этой работы справедливы, например, для ядер Бернулли или ядер вида AP_λ, $A > 0$, отклонения сверток с которыми не имеют ясного аппроксимационного смысла.

Литература

1. Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*. Наука, М., 1965.
2. В. В. Жук, *Аппроксимация периодических функций*. Изд-во ЛГУ, Л., 1982.

3. О. Л. Виноградов, *Точные неравенства типа Джексона для приближений классов сверток целыми функциями конечной степени.* — Алгебра и анализ **17(4)** (2005), 56–111.
4. В. П. Заставный, В. В. Савчук, *Приближения классов сверток линейными операторами специального вида.* — Матем. зам. **90(3)** (2011), 351–361.
5. Н. П. Корнейчук, *Точные константы в теории приближения.* Наука, М., 1987.
6. D. V. Widder, *The Laplace Transform.* Princeton, 1946.
7. Э. Камке, *Интеграл Лебега–Стилтьеса.* ГИФМЛ, М., 1959.

Vinogradov O. L. Sharp estimates of best approximations by deviations of Weierstrass-type integrals.

We establish the estimates

$$A_\sigma(f)_P \leqslant KP(f - f * W),$$

where W is a kernel of special type summable on $\mathbb{R}$ and $A_\sigma(f)_P$ is the best approximation (with respect to a seminorm P) of a function f by entire functions of exponential type not greater than σ. For the uniform and the integral norm we find the least possible constant K. The estimates are obtained by linear methods of approximation.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: olvin@math.spbu.ru

Поступило 23 мая 2012 г.