Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 401, 2012 г.

А. Б. Александров

ОПЕРАТОРНО ЛИПШИЦЕВЫ ФУНКЦИИ И ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§1. Введение

Хорошо известно, что любая операторно липшицева функция, заданная на замкнутом невырожденном промежутке, дифференцируема в каждой точке этого промежутка. Э. В. Киссин и В. С. Шульман [8] доказали, что существуют операторно липшицевы функции с разрывной производной. Они доказали, что функция $t^2 \sin \frac{1}{t}$ операторно липшицева[1] по крайней мере локально. Затем в работе [10] были найдены другие методы построения операторно липшицевых функций с разрывной производной.

Отправной точкой для настоящей работы послужил следующий вопрос.

Будет ли функция $t^2 f(\frac{1}{t})$ локально операторно липшицевой для любой операторно липшицевой функции f?

Мы даём положительный ответ на это вопрос. Более того, мы показываем совершенно элементарными методами, что для любой операторно липшицевой функции f, заданной на замкнутом множестве вещественных чисел, функция $t^2 f(\frac{1}{t})$ тоже будет операторно липшицевой при одном дополнительном условии: $f(0) = 0$. Разумеется, это дополнительное условие требуется только в том случае, когда оно имеет смысл, т. е. когда 0 входит в область определения функции f. Заметим, что $t^2 f(\frac{1}{t}) = t^2\big(f(\frac{1}{t}) - f(0)\big) + f(0)\,t^2$, откуда следует, что функция $t^2 f(\frac{1}{t})$ локально операторно липшицева и в том случае, когда $f(0) \neq 0$.

Следует отметить, что нет необходимости рассматривать только функции f вещественной переменной: функция f может быть задана и на замкнутом множестве комплексных чисел. Кроме того, линейная замена переменной показывает, что дробно-линейная функция $\frac{1}{z}$

Ключевые слова: операторно липшицевы функции.
Работа частично поддержана грантом РФФИ 11-01-00526-а.

[1]Следует отметить, что в статье [8] рассматривались операторно липшицевы функции, заданные только на компактных множествах.

может быть заменена практически любым дробно-линейным преобразованием φ. В этом случае утверждается, что из операторной липшицевости функции f следует операторная липшицевость функции $T_\varphi f \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{f\circ\varphi}{\varphi'}$ при условии $f(\varphi(\infty))=0$.

В §2 мы даём определение операторно липшицевых функций. В этом же параграфе собраны простейшие результаты об операторно липшицевых функциях, которые будут использоваться в дальнейшем.

В §3 речь идёт об операторно липшицевых функциях, заданных на вещественной прямой. Начинается этот параграф с простейшего варианта теоремы об операторной липшицевости функции $t^2 f(\frac{1}{t})$ (теорема 3.1). Доказательство совершенно элементарно и опирается по существу только на теорему 2.4.

Следует отметить, что важную роль при исследовании операторно липшицевых функций играют мультипликаторы Шура, которые вообще не используются в этой статье. Тем не менее, приведённое нами доказательство теоремы 3.1, как и ряда других теорем этой статьи, легко "переводится" на язык мультипликаторов Шура.

В §3 мы уточняем также теорему об операторной липшицевости функции $t^2 f(\frac{1}{t})$. Заметим, что функция $t^2 f(\frac{1}{t})$ является разностью первообразных двух функций: $2tf(\frac{1}{t})$ и $f'(\frac{1}{t})$. Теорема 3.6 утверждает, что в условиях теоремы 3.1 не только функция $t^2 f(\frac{1}{t})$ операторно липшицева, но и первообразные функций $tf(\frac{1}{t})$ и $f'(\frac{1}{t})$.

Растяжения, повороты и параллельные переносы позволяют заменить дробно-линейное преобразование $\frac{1}{t}$ произвольным вещественным дробно-линейным преобразованием φ. В частности, мы доказываем, что множество всех производных операторно липшицевых функций инвариантно относительно дробно-линейной замены переменной (теорема 3.10).

Четвёртый параграф носит вспомогательный характер. Там рассматриваются пространства мультипликаторов пространств операторно липшицевых функций.

Некоторые результаты третьего параграфа переносятся на случай функций комплексной переменной. Этому посвящён пятый параграф. Кроме того, в этом параграфе наряду с преобразованием $T_\varphi f \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{f\circ\varphi}{\varphi'}$, где φ – комплексное дробно-линейное преобразование, рассматриваются преобразования $T_{\varphi,n}f \stackrel{\mathrm{def}}{=} \dfrac{f\circ\varphi}{|\varphi'|\operatorname{sgn}^n(\varphi')}$, где n – целое число. Ясно, что $T_\varphi = T_{\varphi,1}$. Отметим, что в случае операторно липшицевых функций, заданных на невырожденном замкнутом множестве $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}\subset\mathbb{C}$, удаётся явно вычислить нормы операторов $T_{\varphi,n}$ при $n\ne 0$, см. теорему 5.4 и замечание 1 после следствия 5.5.

В случае, когда φ – преобразование Кэли, операторы $T_{\varphi,n}$ позволяют построить (см. теорему 5.6) линейные биекции[2] пространства операторно липшицевых функций на единичной окружности $\mathbb{T}$, исчезающих в точке -1, на пространство операторно липшицевых функций на вещественной прямой $\mathbb{R}$.

Эти же операторы дают аналогичные результаты о пространствах операторно липшицевых функций в круге и в полуплоскости.

Кроме того, в §5 мы рассматриваем оператор T_φ при $\varphi(t) = \operatorname{tg} t$. Следствие 5.9 по существу говорит о том, что этот оператор даёт линейную биекцию пространства операторно липшицевых функций вещественной переменной на пространство π-периодических операторно липшицевых функций, обращающихся в нуль в точке $\frac{\pi}{2}$, а значит, и во всех точках вида $\frac{\pi}{2}+\pi n$, где n – целое число.

В §6 мы пытаемся перенести теорему 3.10, о которой уже речь шла выше, на случай функций, заданных на множестве $\mathbb{C}$. Эта попытка оказалось не до конца удачной: соответствующее пространство функций в комплексном случае оказалось инвариантным только лишь относительно дробно-линейных замен переменных φ вида $\varphi(z) = az$ и $\varphi(z) = \frac{a}{z}$, где $a\in\mathbb{C}$, $a\ne 0$.

В §7 мы сначала приводим определение и простейшие свойства коммутаторно липшицевых функций. Затем мы изучаем преобразование T_φ на пространствах коммутаторно липшицевых функций.

В качестве примера мы даём новое доказательство коммутаторной липшицевости функции $(z-1)^2\exp\big((z-1)^{-1}\big)$ в замкнутом единичном круге. Этот результат был получен другим способом в статье [7].

Кроме того, мы показываем в §7, что методы нашей статьи позволяют перенести некоторые результаты статьи [9] из круга в полуплоскость.

[2]Здесь и далее мы избегаем использования термина “изоморфизм”. В данном случае это связано с тем, что в соответствии с нашими определениями первое пространство – нормированное, а второе – нет.

Заканчивается статья теоремой 7.12, которую можно рассматривать как обобщение теоремы 3.10 на случай коммутаторно липшицевых функций.

Приведём теперь список обозначений, постоянно используемых в этой статье.

Пусть $\operatorname{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ обозначает группу Мёбиуса дробно-линейных преобразований расширенной комплексной плоскости $\widehat{\mathbb{C}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Множество всех линейных преобразований комплексной плоскости обозначим через $\operatorname{Aut}(\mathbb{C})$, т.е. $\operatorname{Aut}(\mathbb{C}) = \{\varphi \in \operatorname{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) : \varphi(\infty) = \infty\}$.

Пусть $\mathfrak{F} \subset \mathbb{C}$. Символами $\operatorname{Lip}(\mathfrak{F})$, $\operatorname{OL}(\mathfrak{F})$ и $\operatorname{CL}(\mathfrak{F})$ мы будем обозначать пространство липшицевых функций, пространство операторно липшицевых функций (см. §2) и пространство коммутаторно липшицевых функций (см. §7) на множестве $\mathfrak{F}$.

Пусть $a \in \mathfrak{F} \subset \mathbb{C}$. Положим $\operatorname{OL}_a(\mathfrak{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \operatorname{OL}(\mathfrak{F}) : f(a) = 0\}$ и $\operatorname{CL}_a(\mathfrak{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \operatorname{CL}(\mathfrak{F}) : f(a) = 0\}$.

Пространства производных (в том или ином смысле) операторно липшицевых функций и коммутаторно липшицевых функций $(\operatorname{OL})'(\widehat{\mathbb{R}})$, $(\operatorname{OL})'_a(\mathbb{C})$ и $(\operatorname{CL})'(\mathfrak{F})$ определены в §§3, 6 и 7 соответственно.

В этой статье рассматриваются гильбертовы пространства только над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Слово “оператор”, если явно не оговорено противное, означает ограниченный оператор, действующий в гильбертовом пространстве (или в редких случаях из одного гильбертова пространства – в другое). В частности, термин “нормальный оператор” будет означать ограниченный нормальный оператор. В принципе можно считать, что всё происходит в фиксированном бесконечномерном сепарабельном или несепарабельном гильбертовом пространстве, которое мы никак не обозначаем. Если необходимо рассмотреть ещё какое-нибудь гильбертово пространство, то тогда мы вводим обозначение для него. По существу каждое утверждение статьи устроено так, что если оно имеет место для какого-нибудь бесконечномерного гильбертова пространства, то оно имеет место для любого, в том числе и конечномерного, гильбертова пространства. Более того, некоторые утверждения будут иметь смысл и выполняться, когда некоторые операторы действуют из одного гильбертова пространства в другое гильбертово пространство.

Пример. Рассмотрим такое утверждение. Для любого оператора R и для любых нормальных операторов M и N справедливо неравенство

$$\|f(M)R - Rf(N)\| \le \|MR - RN\|.$$

Это утверждение, описывающее свойство функции $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, имеет смысл, когда оператор M действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_1$, а N – в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_2$. Тогда оператор R должен действовать из $\mathcal{H}_2$ в $\mathcal{H}_1$. Если мы докажем это утверждение в случае, когда оба пространства $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ совпадают с нашим фиксированным бесконечномерным гильбертовым пространством, то оно очевидным образом будет иметь место для любых гильбертовых пространств $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$.

§2. Операторно липшицевы функции

Пусть $\mathfrak{F}$ – произвольное подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Символом $\operatorname{Lip}(\mathfrak{F})$ мы обозначаем пространство всех функций $f : \mathfrak{F} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющих *условию Липшица*:

$$|f(z) - f(w)| \le C|z - w|, \quad z, w \in \mathbb{C}. \tag{2.1}$$

Наименьшую из констант C, удовлетворяющих условию (2.1), обозначим через $\|f\|_{\operatorname{Lip}(\mathfrak{F})}$. Положим $\|f\|_{\operatorname{Lip}(\mathfrak{F})} \stackrel{\text{def}}{=} +\infty$, если $f \notin \operatorname{Lip}(\mathfrak{F})$.

Обычно мы будем требовать замкнутость множества $\mathfrak{F}$, но сначала по формальным причинам нам удобно рассматривать случай произвольного множества $\mathfrak{F} \subset \mathbb{C}$. Ясно, что каждая функция $f \in \operatorname{Lip}(\mathfrak{F})$ допускает единственное непрерывное продолжение $\widetilde{f}$ на замыкание $\operatorname{clos}\mathfrak{F}$ множества $\mathfrak{F}$, $\widetilde{f} \in \operatorname{Lip}(\operatorname{clos}\mathfrak{F})$ и $\|\widetilde{f}\|_{\operatorname{Lip}(\operatorname{clos}\mathfrak{F})} = \|f\|_{\operatorname{Lip}(\mathfrak{F})}$.

Из спектральной теоремы для пары коммутирующих нормальных операторов легко следует, что неравенство

$$\|f(M) - f(N)\| \le \|f\|_{\operatorname{Lip}(\mathfrak{F})}\|M - N\| \tag{2.2}$$

выполняется для любых коммутирующих нормальных операторов M и N, спектры которых содержатся в $\mathfrak{F}$.

Нам понадобится следующее хорошо известное утверждение, позволяющее приближать произвольный нормальный оператор нормальными операторами с конечным спектром.

Лемма 2.1. *Пусть N – нормальный оператор. Предположим, что множество Λ, $\Lambda \subset \mathbb{C}$, является ε-сетью спектра $\sigma(N)$ оператора N, т.е. для любой точки $\zeta \in \sigma(N)$ существует точка $\lambda \in \Lambda$ такая,* *что* $|\lambda-\zeta|<\varepsilon$. *Тогда существует нормальный оператор* N_0 *такой, что* $NN_0=N_0N$, $\|N-N_0\|<\varepsilon$ *и* $\sigma(N_0)$ *– конечное подмножество множества* Λ.

Доказательство. В силу компактности спектра оператора N существует конечная ε-сеть Λ_0 множества $\sigma(N)$ такая, что $\Lambda_0\subset\Lambda$. Тогда мы можем найти борелевскую функцию $\eta:\sigma(N)\to\Lambda_0$ такую, что $\sup\{|z-\eta(z)|:z\in\sigma(N)\}<\varepsilon$. Остаётся положить $N_0\stackrel{\mathrm{def}}{=}\eta(N)$. □

Комплексную функцию f, заданную на множестве $\mathfrak{F}$, будем называть *операторно липшицевой*, если существует константа C такая, что

$$\|f(M)-f(N)\|\le C\|M-N\| \tag{2.3}$$

для любых нормальных операторов M и N с конечными спектрами $\sigma(M)$ и $\sigma(N)$, лежащими в $\mathfrak{F}$. Множество всех операторно липшицевых функций, заданных на $\mathfrak{F}$, обозначим через $\mathrm{OL}(\mathfrak{F})$. Наименьшую из констант C, удовлетворяющих условию (2.3), обозначим через $\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}$. Положим $\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}=+\infty$, если $f\notin\mathrm{OL}(\mathfrak{F})$.

Если функция f задана на более широком множестве $\Lambda\supset\mathfrak{F}$, то для краткости мы будем обычно писать $f\in\mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ и $\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}$ вместо $f|\mathfrak{F}\in\mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ и $\|f|\mathfrak{F}\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}$. Это же соглашение будет применяться и для других функциональных пространств.

Легко видеть, что $\mathrm{OL}(\mathfrak{F})\subset\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})$ и $\|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})}\le\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}$ для любой функции $f\in\mathrm{OL}(\mathfrak{F})$. В частности, каждая функция $f\in\mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ непрерывна. Таким образом, оператор $f(M)$ корректно определён для любого нормального оператора M такого, что $\sigma(M)\subset\mathfrak{F}$. Из леммы 2.1 и неравенства (2.2) следует, что неравенство

$$\|f(M)-f(N)\|\le\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}\|M-N\| \tag{2.4}$$

имеет место для любых нормальных[3] операторов M и N таких, что $\sigma(M),\sigma(N)\subset\mathfrak{F}$.

Отметим ещё, что из леммы 2.1 и неравенства (2.2) следует, что

$$\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}=\sup\big\{\|f\|_{\mathrm{OL}(\Lambda)}:\Lambda\subset\mathfrak{F},\ \ \Lambda\ \text{– конечно}\big\} \tag{2.5}$$

[3]В этой статье мы рассматриваем только ограниченные операторы, хотя стандартные приёмы показывают, что неравенство (2.4) будет иметь место и для неограниченных операторов M и N, см., например, [3].

и даже более сильное утверждение:

$$\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} = \sup\big\{\|f\|_{\mathrm{OL}(\Lambda)} : \Lambda \subset \mathfrak{F}_0,\ \ \Lambda\ \text{– конечно}\big\}, \tag{2.6}$$

где $\mathfrak{F}_0$ – всюду плотное подмножество множества $\mathfrak{F}$.

Нам понадобится следующее элементарное утверждение.

Лемма 2.2. *Пусть $f \in \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$. Тогда существует единственное непрерывное продолжение функции f до функции $\widetilde{f}$, заданной на множестве $\operatorname{clos}\mathfrak{F}$, и $\|\widetilde{f}\|_{\mathrm{OL}(\operatorname{clos}\mathfrak{F})} = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}$.*

Доказательство. Существование и единственность непрерывного продолжения следует из того, что $\mathrm{OL}(\mathfrak{F}) \subset \mathrm{Lip}(\mathfrak{F})$. Равенство

$$\|\widetilde{f}\|_{\mathrm{OL}(\operatorname{clos}\mathfrak{F})} = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}$$

вытекает из (2.6). □

Хорошо известно, что если $\mathfrak{F} \subset \mathbb{R}$, то любая функция $f \in \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ дифференцируема в каждой неизолированной точке множества $\mathfrak{F}$, см. [5] и [8]. Аналогично для неограниченного множества $\mathfrak{F} \subset \mathbb{R}$ можно утверждать, что любая функция $f \in \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ имеет конечную производную в бесконечности, если положить $f'(\infty) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lim\limits_{|t|\to+\infty} t^{-1}f(t)$, см. также теорему 4.16 статьи [1].

Результат о дифференцируемости операторно липшицевой функции вещественной переменной приводит к следующему утверждению для операторно липшицевой функции комплексной переменной. Если $f \in \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F} \subset \mathbb{C}$, то для любой прямой $l \subset \mathbb{C}$ сужение $f|(l \cap \mathfrak{F})$ имеет конечную производную в каждой неизолированной точке множества $l\cap\mathfrak{F}$ и в бесконечности, если множество $l\cap\mathfrak{F}$ неограничено. На самом деле, как следует из результатов Э. В. Киссина и В. С. Шульмана [8], прямую l можно заменить простой замкнутой кривой класса C^2 на сфере Римана $\widehat{\mathbb{C}}$.

В частности, функция $f \in \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ должна иметь конечные производные по всем направлениям в каждой внутренней точке множества $\mathfrak{F}$. Тем не менее, теорема 3.5 статьи [3] показывает, что операторно липшицева функция f не обязана быть дифференцируемой как функция двух вещественных переменных в каждой (внутренней) точке своей области определения, см. также следствие 4.3 ниже.

Следующее утверждение содержится в теореме 3.1 статьи [3], но по существу его можно извлечь из статьи [8], где наряду с операторной нормой рассматриваются также произвольные симметричные нормы.

Теорема 2.3. *Пусть f – непрерывная функция, заданная на замкнутом подмножестве $\mathfrak{F}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Тогда следующие три утверждения равносильны:*

(i) $\|f(M) - f(N)\| \le \|M - N\|$ *для всех нормальных операторов M и N таких, что $\sigma(M), \sigma(N) \subset \mathfrak{F}$;*

(ii) $\|f(N)R - Rf(N)\| \le \max\left(\|NR - RN\|, \|N^*R - RN^*\|\right)$ *для всех операторов R и всех нормальных операторов N таких, что $\sigma(N) \subset \mathfrak{F}$;*

(iii) $\|f(M)R - Rf(N)\| \le \max\left(\|MR - RN\|, \|M^*R - RN^*\|\right)$ *для всех операторов R и всех нормальных операторов M и N таких, что $\sigma(M), \sigma(N) \subset \mathfrak{F}$.*

Замечание. Как уже отмечалось выше, условие (i) достаточно проверить только для нормальных операторов M и N с конечными спектрами, лежащими в $\mathfrak{F}$. Более того, из равенства (2.6) следует, что можно дополнительно потребовать, чтобы спектры операторов M и N лежали в фиксированном плотном подмножестве множества $\mathfrak{F}$. То же самое можно сказать по поводу условий (ii) и (iii) с тем лишь отличием в случае условия (ii), что там участвует только один нормальный оператор N, поэтому соответствующие дополнительные условия следует накладывать только на оператор N.

Из этого замечания следует также, что в теореме 2.3 можно отказаться от требования замкнутости множества $\mathfrak{F}$.

Требуя в теореме 2.3, чтобы множество $\mathfrak{F}$ содержалось в $\mathbb{R}$, получаем следующее утверждение, относящееся к самосопряжённым операторам.

Теорема 2.4. *Пусть f – непрерывная функция, заданная на замкнутом подмножестве $\mathfrak{F}$ вещественной прямой $\mathbb{R}$. Тогда следующие три утверждения равносильны:*

(i) $\|f(A) - f(B)\| \le \|A - B\|$ *для всех самосопряжённых операторов A и B таких, что $\sigma(A), \sigma(B) \subset \mathfrak{F}$;*

(ii) $\|f(A)R - Rf(A)\| \le \|AR - RA\|$ *для всех операторов R и всех самосопряжённых операторов A таких, что $\sigma(A) \subset \mathfrak{F}$;*

(iii) $\|f(A)R - Rf(B)\| \le \|AR - RB\|$ *для всех операторов R и всех самосопряжённых операторов A и B таких, что $\sigma(A), \sigma(B) \subset \mathfrak{F}$.*

Приведём также вариант теоремы 2.3 для унитарных операторов.

Теорема 2.5. *Пусть f – непрерывная функция, заданная на замкнутом подмножестве $\mathfrak{F}$ единичной окружности $\mathbb{T} \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Тогда следующие три утверждения равносильны:*

(i) $\|f(U) - f(V)\| \le \|U - V\|$ *для всех унитарных операторов U и V таких, что $\sigma(U), \sigma(V) \subset \mathfrak{F}$;*

(ii) $\|f(U)R - Rf(U)\| \le \|UR - RU\|$ *для всех операторов R и всех унитарных операторов U таких, что $\sigma(U) \subset \mathfrak{F}$;*

(iii) $\|f(U)R - Rf(V)\| \le \|UR - RV\|$ *для всех операторов R и всех унитарных операторов U и V таких, что $\sigma(U), \sigma(V) \subset \mathfrak{F}$.*

Интеграл Бохнера (см., например, [4]) позволяет интегрировать[4] в пространстве $\mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ сильно измеримые функции $\omega \mapsto \Phi_\omega$ такие, что функция $\omega \mapsto \|\Phi_\omega\|$ суммируема. Напомним, что сильно измеримая функция почти сепарабельнозначна. С другой стороны, пространство $\mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ может быть сепарабельным только для вырожденных множеств $\mathfrak{F}$. Поэтому интеграл Бохнера не очень удобен для интегрирования $\mathrm{OL}(\mathfrak{F})$-значных функций. Например, легко видеть, что функция $\Phi(\omega) = \sin \omega x$, где $\omega \in [0, 1]$, не интегрируема по Бохнеру в пространстве $\mathrm{OL}(\mathbb{R})$, поскольку она не является почти сепарабельнозначной.

Нам понадобится следующая лемма об интегрировании слабо измеримых функций в пространстве $\mathrm{OL}(\mathfrak{F})$.

Лемма 2.6. *Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ – пространство с мерой. Предположим, что отображение $\omega \mapsto \Phi_\omega$, заданное почти всюду на Ω, действует в пространство $\mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ и обладает следующими свойствами:*

а) *функция $\omega \mapsto \Phi_\omega(z)$ измерима при всех $z \in \mathfrak{F}$,*

б) *функция $\omega \mapsto \Phi_\omega(z_0)$ суммируема при некотором $z_0 \in \mathfrak{F}$,*

в) *функция $\omega \mapsto \|\Phi_\omega\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}$ суммируема.*

Тогда функция $\omega \mapsto \Phi_\omega(z)$ суммируема при всех $z \in \mathfrak{F}$, функция $f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_\Omega \Phi_\omega(z)\, d\mu(\omega)$ принадлежит пространству $\mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ и

$$\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} \le \int\limits_\Omega \|\Phi_\omega\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}\, d\mu(\omega).$$

---

[4]Строго говоря, пространство $\mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ не является банаховым, поскольку $\|\mathrm{const}\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} = 0$, но его можно превратить в банахово пространство, заменив полунорму $\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}$ нормой $\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} + \varepsilon|f(z_0)|$, где z_0 – точка множества $\mathfrak{F}$, $\varepsilon > 0$. Таким образом, кроме суммируемости функции $\omega \mapsto \|\Phi_\omega\|$ нужно ещё требовать суммируемость функции $\omega \mapsto \Phi_\omega(z_0)$ при некотором $z_0 \in \mathfrak{F}$.

Доказательство. Чтобы доказать суммируемость функции $\omega \mapsto \Phi_\omega(z)$, достаточно заметить, что

$$|\Phi_\omega(z)| \le |\Phi_\omega(z_0)| + |\Phi_\omega(z) - \Phi_\omega(z_0)| \le |\Phi_\omega(z_0)| + |z - z_0| \cdot \|\Phi_\omega\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}.$$

Остаётся оценить величину $\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}$. Нужная нам оценка очевидна в случае, когда множество $\mathfrak{F}$ конечно, поскольку тогда пространство $\mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ конечномерно и слабая измеримость совпадает с сильной измеримостью. Случай произвольного множества $\mathfrak{F}$ сводится к случаю конечного множества $\mathfrak{F}$ при помощи равенства (2.5). □

Нам понадобится ещё одно элементарное утверждение.

Лемма 2.7. *Пусть f – функция, заданная на множестве $\mathfrak{F} \cup \{z_0\}$, где $\mathfrak{F}$ – замкнутое подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда*

$$\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F}\cup\{z_0\})} \le \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} + \sup_{z\in\mathfrak{F}} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $z_0 = 0$ и $f(0) = 0$. Положим

$$g(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} z^{-1} f(z), & \text{если } z \in \mathfrak{F}, \\ 0, & \text{если } z = 0. \end{cases}$$

Согласно теореме 2.3 нам нужно доказать следующее неравенство:

$$\|f(N)R - Rf(N)\| \le \left(\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} + \sup |g|\right) \max\left(\|NR - RN\|, \|N^*R - RN^*\|\right)$$

для любого оператора R и любого нормального оператора N с конечным спектром, лежащим в $\mathfrak{F} \cup \{0\}$. Пусть $\mathcal{H}_0$ обозначает множество всех значений оператора N. Заметим, что $\mathcal{H}_0$ – замкнутое подпространство, поскольку N – нормальный оператор с конечным спектром. Ясно, что $\mathcal{H}_0$ – приводящее подпространство оператора N. Следовательно, оператор $N_0 : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0$, $N_0 u \stackrel{\mathrm{def}}{=} Nu$, является нормальным оператором. Легко видеть, что $\sigma(N_0) \subset \mathfrak{F}$. Пусть P обозначает ортогональный проектор на $\mathcal{H}_0$, а Q – на ядро оператора N. Тогда $P + Q = I$, где I обозначает тождественный оператор. Ясно, что

$$f(N)R - Rf(N) = f(N)RP + f(N)RQ - PRf(N) - QRf(N),$$

откуда

$$\|f(N)R - Rf(N)\| \le \|f(N)RP - PRf(N)\| + \|f(N)RQ - QRf(N)\|.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\|f(N)RP - PRf(N)\| &= \|f(N_0)PRP - PRPf(N_0)\|\\ &\le \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}\max\big(\|N_0PRP - PRPN_0\|, \|N_0^*PRP - PRPN_0^*\|\big)\\ &= \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}\max\big(\|P(NR - RN)P\|, \|P(N^*R - RN^*)P\|\big)\\ &\le \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}\max\big(\|NR - RN\|, \|N^*R - RN^*\|\big).\end{aligned}$$

Докажем теперь, что

$$\|f(N)RQ - QRf(N)\| \le \big(\sup|g|\big)\|NR - RN\|.$$

Для этого мы воспользуемся следующим элементарным тождеством:

$$\|PAQ + QBP\| = \max(\|PAQ\|, \|QBP\|)$$

для любых операторов A и B. Имеем:

$$\begin{aligned}\|f(N)RQ - QRf(N)\| &= \|Pf(N)RQ - QRf(N)P\|\\ &= \max(\|f(N)RQ\|, \|QRf(N)\|) \le \|g(N)\|\max(\|NRQ\|, \|QRN\|)\\ &= \|g(N)\|\max(\|P(NR - RN)Q\|, \|Q(RN - NR)P\|)\\ &\le \big(\sup|g|\big)\|NR - RN\|.\end{aligned}$$

□

§3. Операторно липшицевы функции на вещественной прямой и дробно-линейные преобразования

Теорема 3.1. *Пусть* $f \in \mathrm{OL}(\mathbb{R})$. *Положим*

$$g(t) \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} t^2(f(t^{-1}) - f(0)), & \text{если } t \ne 0,\\ 0, & \text{если } t = 0.\end{cases} \tag{3.1}$$

Тогда $g \in \mathrm{OL}(\mathbb{R})$ *и* $\|g\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} \le 3\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$.

Доказательство. Можно считать, что $\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} = 1$ и $f(0) = 0$. В силу леммы 2.2 достаточно доказать, что

$$\|A^2f(A^{-1}) - B^2f(B^{-1})\| \le 3\|A - B\|$$

для любых обратимых самосопряжённых операторов A и B. Имеем:

$$\begin{aligned}&f(A^{-1})A^2 - B^2f(B^{-1})\\ &\quad= f(A^{-1})A(A - B) + f(A^{-1})AB - ABf(B^{-1}) + (A - B)Bf(B^{-1}).\end{aligned}$$

Ясно, что
$$\|Af(A^{-1})\| \le \sup_{t\ne 0} |t^{-1}f(t)| \le \|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathbb{R})} \le \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} = 1.$$
Следовательно, $\|f(A^{-1})A(A - B)\| \le \|A - B\|$ и аналогично $\|(A-B)Bf(B^{-1})\| \le \|A-B\|$. Наконец, применяя теорему 2.4, получаем:
$$\|f(A^{-1})AB - ABf(B^{-1})\| \le \|A^{-1}AB - ABB^{-1}\| = \|A - B\|.$$
□

Чтобы сформулировать обобщение теоремы 3.1, мы определяем преобразование T_φ,
$$(T_\varphi f)(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{f(\varphi(t))}{\varphi'(t)}, & \text{если } t\in\mathbb{R} \text{ и } \varphi(t)\ne\infty, \\[2ex] 0, & \text{если } t\in\mathbb{R} \text{ и } \varphi(t)=\infty. \end{cases}$$
Здесь f обозначает функцию, заданную на $\mathbb{R}$, а φ – вещественное дробно-линейное преобразование, которое не является линейным.

Напомним, что $\mathrm{OL}_a(\mathbb{R}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{f\in \mathrm{OL}(\mathbb{R}) : f(a) = 0\}$, где $a\in\mathbb{R}$.

Теорема 3.2. *Пусть φ – (нелинейное) вещественное дробно-линейное преобразование. Тогда*
$$\|T_\varphi f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} \le 3\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$$
для всех $f\in\mathrm{OL}_a(\mathbb{R})$, где $a = \varphi(\infty)$.

Доказательство. Положим $\phi_c(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} ct^{-1}$, где $c\in\mathbb{R}$, $c\ne 0$. Заметим, что случай, когда $\varphi=\phi_c$, сводится к теореме 3.1 (т. е. к случаю $c = 1$) при помощи гомотетии с центром в нуле. В общем случае преобразование φ представимо в виде $\varphi(t) = a+\dfrac{c}{t-b}$, где $b=\varphi^{-1}(\infty)$, $c\in\mathbb{R}$, $c\ne 0$. Положим $\tau_h(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} t-h$. Очевидное тождество $T_\varphi f = (T_{\phi_c}(f\circ\tau_a^{-1}))\circ\tau_b$ позволяет свести общий случай к случаю $\varphi=\phi_c$. □

Следствие 3.3. *Пусть выполнены условия теоремы 3.2. Тогда*
$$3\|T_\varphi f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} \ge \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$$
для всех $f\in\mathrm{OL}_a(\mathbb{R})$, где $a=\varphi(\infty)$.

Доказательство. Пусть ψ – дробно-линейное преобразование, обратное к преобразованию φ. Легко видеть, что $T_\psi(T_\varphi f) = f$ и $(T_\varphi f)(\psi(\infty)) = 0$. Следовательно,

$$\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} \le 3\|T_\varphi f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$$

в силу теоремы 3.2. □

Теорема 3.4. *Пусть f – непрерывная функция на вещественной прямой $\mathbb{R}$ такая, что $(x-a)f(x) \in \mathrm{OL}(\mathbb{R})$ при некотором $a \in \mathbb{R}$. Положим $F(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_0^x f(t)\,dt$. Тогда $F \in \mathrm{OL}(\mathbb{R})$ и $\|F\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} \le \|(x-a)f(x)\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$.*

Доказательство. Можно считать, что $a = 0$. Тогда

$$F(x) = \int\limits_0^1 xf(tx)\,dt,$$

и мы можем применить лемму 2.6, поскольку

$$\|xf(tx)\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} = \|xf(x)\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$$

при всех $t \in (0,1]$. □

Следствие 3.5. *Пусть $(\Theta_1 f) \stackrel{\mathrm{def}}{=} tf'(t)$. Тогда $\Theta_1(\mathrm{OL}(\mathbb{R})) \supset \mathrm{OL}_0(\mathbb{R})$.*

Пусть f и g обозначают то же, что в теореме 3.1. Тогда

$$g(x) = \int\limits_0^x g'(t)\,dt = 2\int\limits_0^x t\big(f(t^{-1}) - f(0)\big)\,dt \\ - \int\limits_0^x f'(t^{-1})\,dt \stackrel{\mathrm{def}}{=} 2g_1(x) - g_2(x). \quad (3.2)$$

Следующая теорема показывает, что не только $g \in \mathrm{OL}(\mathbb{R})$, но и функции g_1 и g_2 также должны принадлежать пространству $\mathrm{OL}(\mathbb{R})$.

Теорема 3.6. *Пусть $f \in \mathrm{OL}(\mathbb{R})$, а функции g_1 и g_2 определяются формулой (3.2). Тогда $g_1, g_2 \in \mathrm{OL}(\mathbb{R})$, $\|g_1\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} \le 3\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$ и $\|g_2\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} \le 9\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$.*

Доказательство. Заметим, что $\|g\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} \le 3\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$ в силу теоремы 3.1. Применяя теперь теорему 3.4 к функции g, получим $\|g_1\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} \le \|g\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} \le 3\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$. Чтобы оценить $\mathrm{OL}(\mathbb{R})$-полунорму функции g_2, достаточно воспользоваться равенством $g_2 = 2g_1 - g$. □

Следствие 3.7. *Пусть $f \in \Theta_1(\mathrm{OL}(\mathbb{R}))$, где Θ_1 обозначает то же самое, что в следствии* 3.5. *Определим функцию g формулой* (3.1). *Тогда $g \in \Theta_1(\mathrm{OL}(\mathbb{R}))$.*

Положим

$$(L_\varphi f)(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_0^x f'(\varphi(t))\,dt,$$

где f – липшицева функция на вещественной прямой $\mathbb{R}$, а φ – вещественное дробно-линейное преобразование. Ясно, что $L_{\varphi\circ\psi} = L_\psi \circ L_\varphi$ для любых вещественных дробно-линейных преобразований φ и ψ. Кроме того, $L_\varphi f = f - f(0)$, если $\varphi(t) = t$.

Теорема 3.8. *Пусть φ – вещественное дробно-линейное преобразование. Тогда*

$$\frac{1}{9}\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} \le \|L_\varphi f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} \le 9\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$$

для всех $f \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R})$.

Доказательство. Заметим, что $\|L_\varphi f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$, если φ – непостоянная вещественная линейная функция. Кроме того, $\|L_\varphi f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} \le 9\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$ в силу теоремы 3.6 в случае, когда $\varphi(t) = t^{-1}$. Каждое (нелинейное) вещественное дробно-линейное преобразование φ можно представить в виде $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_3$, где φ_1 и φ_3 – вещественные линейные функции, а $\varphi_2(t) = t^{-1}$. Теперь неравенство $\|L_\varphi f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} \le 9\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$ очевидно. Неравенство $\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} \le 9\|L_\varphi f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$ сводится к доказанному при помощи дробно-линейного преобразования, обратного к преобразованию φ, точно так же, как в доказательстве следствия 3.3. □

Напомним, что $\widehat{\mathbb{R}}$ обозначает одноточечную компактификацию вещественной прямой $\mathbb{R}$. Положим $f'(\infty) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lim\limits_{t\to\infty} t^{-1}f(t)$. Как уже было отмечено в §2, каждая функция $f \in \mathrm{OL}(\mathbb{R})$ имеет конечную производную в каждой точке $t \in \widehat{\mathbb{R}}$. Обозначим через $(\mathrm{OL})'(\widehat{\mathbb{R}})$ пространство всех ограниченных функций h, заданных всюду на $\widehat{\mathbb{R}}$ и таких, что

$f'(t) = h(t)$ при всех $t \in \widehat{\mathbb{R}}$ для некоторой функции $f \in \mathrm{OL}(\mathbb{R})$. Положим $\|h\|_{(\mathrm{OL})'(\widehat{\mathbb{R}})} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$. Ясно, что это определение корректно. Пространство $(\mathrm{OL})'(\widehat{\mathbb{R}})$ с нормой $\|\cdot\|_{(\mathrm{OL})'(\widehat{\mathbb{R}})}$ является банаховым пространством.

Из теоремы 3.4 легко вытекает следующая теорема.

Теорема 3.9. *Пусть $f \in \mathrm{OL}(\mathbb{R})$. Положим*

$$g(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}, & \text{если } t \in \mathbb{R}, \quad t \neq t_0, \\ f'(t_0), & \text{если } t = t_0, \\ f'(\infty), & \text{если } t = \infty, \end{cases}$$

где $t_0 \in \mathbb{R}$. Тогда $g \in (\mathrm{OL})'(\widehat{\mathbb{R}})$ и $\|g\|_{(\mathrm{OL})'(\widehat{\mathbb{R}})} \le \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$.

Доказательство. Положим $F(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_0^x g(t)\,dt$. Тогда $F'(x) = g(x)$ при всех $x \in \widehat{\mathbb{R}}$ и $\|F\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} \le \|(x-t_0)g(x)\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$ в силу теоремы 3.4. $\square$

Приведём теперь переформулировку теоремы 3.8.

Теорема 3.10. *Пусть φ – вещественное дробно-линейное преобразование. Тогда*

$$\frac{1}{9}\|h\|_{(\mathrm{OL})'(\widehat{\mathbb{R}})} \le \|h \circ \varphi\|_{(\mathrm{OL})'(\widehat{\mathbb{R}})} \le 9\|h\|_{(\mathrm{OL})'(\widehat{\mathbb{R}})}$$

для любой функции h, заданной на $\widehat{\mathbb{R}}$.

Доказательство. Положим $f \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_0^x h(t)\,dt$. Ясно, что $f(0) = 0$ и $f'(x) = h(x)$ при всех $x \in \widehat{\mathbb{R}}$. Применяя теорему 3.8 к функции f, получим:

$$\frac{1}{9}\|h\|_{(\mathrm{OL})'(\widehat{\mathbb{R}})} \le \|(L_\varphi f)'\|_{(\mathrm{OL})'(\widehat{\mathbb{R}})} \le 9\|h\|_{(\mathrm{OL})'(\widehat{\mathbb{R}})}.$$

Легко видеть, что $(L_\varphi f)' = h \circ \varphi$ почти всюду на $\mathbb{R}$, но нам нужно убедиться в том, что это равенство выполняется всюду на $\widehat{\mathbb{R}}$. Снова достаточно ограничиться случаем $\varphi(t) = t^{-1}$. Перепишем равенство

(3.2) следующим образом:

$$(L_\varphi f)(x) = \int\limits_0^x f'(t^{-1})\,dt = -\int\limits_0^x t^2\bigl(f(t^{-1})\bigr)'\,dt = -g(x) + 2\int\limits_0^x tf(t^{-1})\,dt.$$

Ясно, что

$$g'(x) = \begin{cases} 2xf(x^{-1}) - f'(x^{-1}), & \text{если } x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 0, \\ f'(\infty), & \text{если } x = 0, \\ f'(0), & \text{если } x = \infty. \end{cases}$$

Заметим, что функция $tf(t^{-1})$ продолжается до непрерывной функции на расширенной числовой прямой $\widehat{\mathbb{R}}$. Следовательно,

$$\left(\int\limits_0^x tf(t^{-1})\,dt\right)' = \begin{cases} xf(x^{-1}), & \text{если } x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 0, \\ f'(\infty), & \text{если } x = 0, \\ f'(0), & \text{если } x = \infty. \end{cases}$$

Теперь ясно, что равенство $(L_\varphi f)' = h\circ\varphi$ выполняется всюду на $\widehat{\mathbb{R}}$. $\square$

Пример. Рассмотрим функцию

$$u(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \cos t, & \text{если } t \in \mathbb{R}, \\ 0, & \text{если } t = \infty. \end{cases}$$

Ясно, что $u \in (\mathrm{OL})'(\widehat{\mathbb{R}})$. Следовательно, функция $\dfrac{1+u(2t)}{2}$ тоже принадлежит пространству $(\mathrm{OL})'(\widehat{\mathbb{R}})$. Заметим, что $u^2(t) = \dfrac{1+u(2t)}{2}$ при всех $t \in \mathbb{R}$, но $u^2(t) \neq \dfrac{1+u(2t)}{2}$ при $t = \infty$. Следовательно, $u^2 \notin (\mathrm{OL})'(\widehat{\mathbb{R}})$. Разумеется, сделав дробно-линейную замену переменной, мы можем построить пример функции $h \in (\mathrm{OL})'(\widehat{\mathbb{R}})$ такой, что h^2 не совпадает всюду на $\mathbb{R}$ ни с какой функцией класса $(\mathrm{OL})'(\widehat{\mathbb{R}})$. Таким образом, пространство $(\mathrm{OL})'(\widehat{\mathbb{R}})$ не является алгеброй относительно поточечного умножения, даже если рассматривать функции класса $(\mathrm{OL})'(\widehat{\mathbb{R}})$ как функции, заданные на $\mathbb{R}$.

Автору неизвестно, является ли пространство $(\mathrm{OL})'(\widehat{\mathbb{R}})$ алгеброй, если отождествлять равные почти всюду функции, т.е. если рассматривать $(\mathrm{OL})'(\widehat{\mathbb{R}})$ как подпространство пространства $L^\infty(\mathbb{R})$.

§4. Мультипликаторы операторно липшицевых функций

Пусть $\mathfrak{F}$ – замкнутое подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Обозначим через $\mathfrak{M}(\mathfrak{F})$ множество всех функций $w:\mathfrak{F}\to\mathbb{C}$ таких, что $f\in\mathrm{OL}(\mathfrak{F})\Longrightarrow wf\in\mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ для любой функции $f\in\mathrm{OL}(\mathfrak{F})$.

Напомним, что $\mathrm{OL}_a(\mathfrak{F})\stackrel{\mathrm{def}}{=}\{f\in\mathrm{OL}(\mathfrak{F}):f(a)=0\}$, где $a\in\mathfrak{F}$. Обозначим через $\mathfrak{M}_a(\mathfrak{F})$ множество всех функций $w:\mathfrak{F}\to\mathbb{C}$ таких, что $f\in\mathrm{OL}_a(\mathfrak{F})\Longrightarrow wf\in\mathrm{OL}_a(\mathfrak{F})$ для любой функции $f\in\mathrm{OL}_a(\mathfrak{F})$. Положим

$$\|w\|_{\mathfrak{M}_a(\mathfrak{F})}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\sup\Big\{\|wf\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}:f\in\mathrm{OL}_a(\mathfrak{F}),\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}\le 1\Big\}.$$

Замечание. Из леммы 2.7 следует, что $\mathfrak{M}(\mathfrak{F})=\mathfrak{M}_a(\mathfrak{F})$, если a – изолированная точка множества $\mathfrak{F}$.

Легко видеть, что $\|w\|_{\mathfrak{M}_a(\mathfrak{F})}=0$ в том и только в том случае, когда $w(z)=0$ при всех $z\in\mathfrak{F}\setminus\{a\}$. Таким образом, величина $\|w\|_{\mathfrak{M}_a(\mathfrak{F})}$ зависит только от сужения $w|(\mathfrak{F}\setminus\{a\})$, и тем самым не зависит от значения функции w в точке a. Имея это в виду, в некоторых случаях мы будем рассматривать пространство $\mathfrak{M}_a(\mathfrak{F})$ как пространство функций, заданных на $\mathfrak{F}\setminus\{a\}$.

Следующая теорема даёт описание пространства $\mathfrak{M}_a(\mathfrak{F})$.

Теорема 4.1. *Пусть w – функция, заданная на замкнутом множестве $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}\subset\mathbb{C}$. Предположим, что $a\in\mathfrak{F}$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(i) $w\in\mathfrak{M}_a(\mathfrak{F})$,

(ii) *функция $(z-a)w(z)$ операторно липшицева на $\mathfrak{F}$,*

(iii) *функция $(\bar z-\bar a)w(z)$ операторно липшицева на $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $a=0$. Импликации (i) $\Longrightarrow$ (ii) и (i) $\Longrightarrow$ (iii) тривиальны. Докажем, что (ii) $\Longrightarrow$ (i). Ясно, что

$$\sup\{|w(z)|:z\in\mathfrak{F},z\ne 0\}\le\|zw(z)\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})}\le\|zw(z)\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}.$$

Можно считать, что $w(0)=0$. Тогда $\sup|w|\le\|zw(z)\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}$.

Пусть $f \in \mathrm{OL}_0(\mathfrak{F})$. Положим

$$g(z) \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} z^{-1}f(z), & \text{если} \quad z \in \mathfrak{F} \text{ и } z \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad z = 0. \end{cases}$$

Тогда $\sup|g| \le \|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})} \le \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}$. Используя тождество

$$w(M)f(M)-w(N)f(N) = w(M)(f(M)-f(N))+(w(M)-w(N))f(N)$$
$$= w(M)(f(M)-f(N))-w(M)(M-N)g(N)+(Mw(M)-Nw(N))g(N),$$

получаем

$$\|w(M)f(M)-w(N)f(N)\|$$
$$\le \big(\sup|w|\big)\|f(M)-f(N)\| + \big(\sup|w|\big)\big(\sup|g|\big)\|M-N\|$$
$$+ \big(\sup|g|\big)\|Mw(M)-Nw(N)\| \le 3\|zw(z)\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}\|M-N\|.$$

Импликация (iii) $\Longrightarrow$ (i) доказывается аналогично. Пусть $f \in \mathrm{OL}_0(\mathfrak{F})$. Положим

$$g(z) \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} \bar z^{-1}f(z), & \text{если} \quad z \in \mathfrak{F} \text{ и } z \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad z = 0. \end{cases}$$

Имеем:

$$w(M)f(M)-w(N)f(N) = w(M)(f(M)-f(N))+(w(M)-w(N))f(N)$$
$$= w(M)(f(M)-f(N))-w(M)(M^*-N^*)g(N)+(M^*w(M)-N^*w(N))g(N),$$

откуда

$$\|w(M)f(M)-w(N)f(N)\| \le \big(\sup|w|\big)\|f(M)-f(N)\|$$
$$+ \big(\sup|w|\big)\big(\sup|g|\big)\|M-N\| + \big(\sup|g|\big)\|M^*w(M)-N^*w(N)\|$$
$$\le 3\|\overline{z}w(z)\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}\|M-N\|.$$

$\square$

Замечание 1. Если пространство $\mathfrak{M}_a(\mathfrak{F})$ рассматривать как пространство функций, заданных на $\mathfrak{F}\setminus\{a\}$, то теорему 4.1 можно переформулировать следующим образом:

$$\mathfrak{M}_a(\mathfrak{F}) = (z-a)^{-1}\,\mathrm{OL}_a(\mathfrak{F}) = (\bar z - \bar a)^{-1}\,\mathrm{OL}_a(\mathfrak{F}).$$

Замечание 2. Ясно, что

$$\|w\|_{\mathfrak{M}_a(\mathfrak{F})} \ge \max\big(\|(z-a)w(z)\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}, \|(\bar z-\bar a)w(z)\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}\big).$$

Из доказательства теоремы видно, что имеет место следующее неравенство:

$$\|w\|_{\mathfrak{M}_a(\mathfrak{F})} \le 3\min\left(\|(z-a)w(z)\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}, \|(\bar z-\bar a)w(z)\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}\right). \tag{4.1}$$

Положим

$$\operatorname{sgn} z \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{z}{|z|}, & \text{если } z \ne 0, \\ 0, & \text{если } z = 0, \end{cases}$$

Замечание 3. Пусть n – целое положительное число. Равенство

$$\|\bar z \operatorname{sgn}^{2n} z\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{C})} = 2n-1,$$

доказанное в [3], см. также следствие 4.3 ниже, и оценка (4.1) влекут следующее неравенство:

$$\|\operatorname{sgn}^{2n}\|_{\mathfrak{M}_0(\mathfrak{F})} \le 6n-3, \tag{4.2}$$

где $\mathfrak{F}$ – замкнутое множество комплексных чисел, содержащее 0.

Следующая теорема показывает, что оценка (4.2) может быть улучшена при $n \ge 2$.

Теорема 4.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – замкнутое подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $a \in \mathfrak{F}$. Тогда функции $\operatorname{sgn}^{2n}(z-a)$ принадлежат*[5] *пространству $\mathfrak{M}_a(\mathfrak{F})$ при всех целых n и*

$$\|\operatorname{sgn}^{2n}(z-a)\|_{\mathfrak{M}_a(\mathfrak{F})} \le 2|n|+1.$$

Прежде чем доказывать эту теорему, отметим, что она даёт в качестве следствия теорему 3.5 статьи [3].

Следствие 4.3. *Пусть $n \in \mathbb{Z}$. Положим $g_n(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} z\operatorname{sgn}^{2n} z$ при $z \ne 0$ и $g_n(0) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 0$. Тогда $\|g_n\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{C})} = |2n+1|$.*

Доказательство. Равенство $\overline{g}_n = g_{-n-1}$ позволяет нам ограничиться случаем $n \ge 0$. Результат очевиден при $n = 0$. Ясно, что $\|g_n\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{C})} \le \|\operatorname{sgn}^{2n} z\|_{\mathfrak{M}_0(\mathfrak{F})}\|g_0\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{C})} = 2n+1$. Остаётся заметить, что $\|g_n\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{C})} \ge \|g_n\|_{\mathrm{Lip}(\mathbb{T})} = 2n+1$. □

Чтобы доказать теорему 4.2, нам понадобится следующая лемма.

[5] Здесь по крайней мере при $n \le 0$ следует считать, что функции класса $\mathfrak{M}_a(\mathfrak{F})$ заданы на множестве $\mathfrak{F} \setminus \{a\}$, поскольку функция $\operatorname{sgn}^{2n}(z-a)$ не определена при $z = a$, если $n \le 0$.

Лемма 4.4. *Пусть M и N – нормальные операторы. Тогда*

$$\|(\operatorname{sgn} M)^{2n}N-(\operatorname{sgn} N)^{2n}N\|\le 2n\|M-N\|$$

при всех целых положительных n.

Доказательство. В случае $n=1$ результат следует из равенства

$$(\operatorname{sgn} M)^2N-(\operatorname{sgn} N)^2N \\ =\operatorname{sgn}^2 M(N^*-M^*)\operatorname{sgn}^2 N+(M-N)\operatorname{sgn}^2 N.$$

Тождество

$$(\operatorname{sgn} M)^{2n}N-(\operatorname{sgn} N)^{2n}N=(\operatorname{sgn} M)^2\big((\operatorname{sgn} M)^{2n-2}N-(\operatorname{sgn} N)^{2n-2}N\big) \\ +\big((\operatorname{sgn} M)^2N-(\operatorname{sgn} N)^2N\big)(\operatorname{sgn} N)^{2n-2}$$

позволяет нам совершить индукционный переход от $n-1$ к n. □

Доказательство теоремы 4.2. Можно считать, что $a=0$. Случай $n=0$ тривиален. Заметим, что если $n<0$, то

$$\operatorname{sgn}^{2n} z=\operatorname{sgn}^{-2n}\bar z=\overline{\operatorname{sgn}^{-2n} z}$$

при $z\ne 0$. Следовательно, $\|\operatorname{sgn}^{2n}\|_{\mathfrak{M}_0(\mathfrak{F})}=\|\operatorname{sgn}^{-2n}\|_{\mathfrak{M}_0(\mathfrak{F})}$. Таким образом, случай $n<0$ сводится к случаю $n>0$. Пусть $n>0$. Нам нужно доказать, что

$$\|f(z)\operatorname{sgn}^{2n} z\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}\le(2n+1)\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}$$

для всех $f\in\mathrm{OL}_0(\mathfrak{F})$. Положим

$$g(z)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\begin{cases} z^{-1}f(z), & \text{если } z\in\mathfrak{F} \text{ и } z\ne 0,\\ 0, & \text{если } z=0.\end{cases}$$

Ясно, что

$$f(M)(\operatorname{sgn} M)^{2n}-f(N)(\operatorname{sgn} N)^{2n} \\ =(\operatorname{sgn} M)^{2n}\big(f(M)-f(N)\big)+\big((\operatorname{sgn} M)^{2n}N-(\operatorname{sgn} N)^{2n}N\big)g(N)$$

для любых нормальных операторов M и N. Применяя теперь лемму 4.4, получаем

$$\|f(M)(\operatorname{sgn} M)^{2n}-f(N)(\operatorname{sgn} N)^{2n}\|\le\|f(M)-f(N)\| \\ +(\sup|g|)\|(\operatorname{sgn} M)^{2n}N-(\operatorname{sgn} N)^{2n}N\|\le(2n+1)\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}\|M-N\|.$$

□

Замечание 1. Пусть $n > 0$. Ясно, что $\|z\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} = 1$, если $\mathfrak{F}$ содержит по крайней мере две точки. Из доказательства следствия 4.3 нетрудно понять, что $\|z \operatorname{sgn}^{2n} z\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} \ge 2n+1$, если, например, множество $\mathfrak{F}$ содержит бесконечно много точек какой-нибудь окружности с центром в нуле. Следовательно, константа $2|n|+1$ в теореме 4.2 не может быть уменьшена для таких множеств $\mathfrak{F}$.

Замечание 2. Функция $\operatorname{sgn}^{2n+1} z$ не лежит в пространстве $\mathfrak{M}_0(\mathfrak{F})$, если, например, множество $\mathfrak{F}$ содержит прямую или хотя бы объединение двух дизъюнктных лучей, лежащих на одной прямой. Это следует из того, что сужение функции $z \operatorname{sgn}^{2n+1} z$ на любую прямую не имеет производной в бесконечности. Заметим, что функция $z \operatorname{sgn}^{2n+1} z$ не имеет производной в нуле ни по какому направлению. Следовательно, функция $\operatorname{sgn}^{2n+1} z$ не может принадлежать пространству $\mathfrak{M}_0(\mathfrak{F})$, если $\mathfrak{F}$ содержит отрезок, содержащий внутри себя начало координат.

Переходим к описанию пространства $\mathfrak{M}(\mathfrak{F})$. Ясно, что произведение двух ограниченных функций класса $\mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ принадлежит пространству $\mathrm{OL}(\mathfrak{F})$. Отсюда мгновенно вытекает следующее утверждение.

Теорема 4.5. *Пусть $\mathfrak{F}$ – компактное подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Тогда пространство $\mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ является алгеброй. Другими словами, $\mathfrak{M}(\mathfrak{F}) = \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$.*

В случае произвольного замкнутого множества $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F} \subset \mathbb{C}$, имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.6. *Пусть w – функция, заданная на замкнутом множестве $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F} \subset \mathbb{C}$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(i) $w \in \mathfrak{M}(\mathfrak{F})$,

(ii) *функции w и $zw(z)$ операторно липшицевы на $\mathfrak{F}$,*

(iii) *функции w и $\bar{z}w(z)$ операторно липшицевы на $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Если $0 \in \mathfrak{F}$, то результат следует из теоремы 4.1, поскольку $\mathfrak{M}(\mathfrak{F}) = \mathrm{OL}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{M}_0(\mathfrak{F})$. Если же $0 \notin \mathfrak{F}$, то случай множества $\mathfrak{F}$ легко сводится к уже разобранному случаю множества $\mathfrak{F} \cup \{0\}$. $\square$

Теорема 4.7. *Пусть w – функция, заданная на замкнутом множестве $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F} \subset \mathbb{C}$. Предположим, что $a \in \mathbb{C} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(i) $w \in \mathfrak{M}(\mathfrak{F})$,

(ii) *функции* w *и* $zw(z)$ *операторно липшицевы на* $\mathfrak{F}$,

(iii) *функция* $(z-a)w(z)$ *операторно липшицева на* $\mathfrak{F}$,

(iv) *функции* w *и* $\bar{z}w(z)$ *операторно липшицевы на* $\mathfrak{F}$,

(v) *функция* $(\bar{z}-\bar{a})w(z)$ *операторно липшицева на* $\mathfrak{F}$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $a=0$. Эквивалентность утверждений (i), (ii) и (iv) следует из теоремы 4.6. Докажем эквивалентность утверждений (i), (iii) и (v). Для этого продолжим произвольным образом функцию w на множество $\mathfrak{F}\cup\{0\}$. Теперь всё сводится к теореме 4.1 и равенству $\mathfrak{M}(\mathfrak{F}\cup\{0\})=\mathfrak{M}_0(\mathfrak{F}\cup\{0\})$, см. замечание в начале этого параграфа. □

§5. Операторно липшицевы функции комплексной переменной и дробно-линейные преобразования

Теорема 5.1. *Пусть* $f\in\mathrm{OL}(\mathbb{C})$. *Положим*

$$g_n(z)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\begin{cases} z^{1+n}\bar{z}^{1-n}(f(z^{-1})-f(0)), & \text{\textit{если} } z\neq 0,\\ 0, & \text{\textit{если} } z=0,\end{cases}$$

где $n\in\mathbb{Z}$. *Тогда* $g_n\in\mathrm{OL}(\mathbb{C})$ *и*

$$c_n^{-1}\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{C})}\le\|g_n\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{C})}\le c_n\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{C})}, \tag{5.1}$$

где $c_n=\max(3,2|n|+1)$.

Доказательство. Обозначим через T_n преобразование, которое переводит функцию f в функцию g_n. Заметим, что $T_n(T_nf)=f-f(0)$. Таким образом, мы можем ограничиться доказательством только верхних оценок полунорм функций g_n. Кроме того, $T_{-n}f=\overline{T_n\overline{f}}$. Следовательно, достаточно рассмотреть случай, когда $n\ge 0$. Можно считать, что $\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{C})}=1$ и $f(0)=0$. Рассмотрим случай $n=0$. В силу леммы 2.2 достаточно доказать, что

$$\|M^*Mf(M^{-1})-N^*Nf(N^{-1})\|\le 3\|M-N\|$$

для любых обратимых нормальных операторов M и N. Имеем:

$$\begin{aligned} &M^*Mf(M^{-1})-N^*Nf(N^{-1})\\ &\quad=f(M^{-1})M(M^*-N^*)+f(M^{-1})MN^*-MN^*f(N^{-1})\\ &\qquad\qquad+(M-N)N^*f(N^{-1}). \end{aligned}\tag{5.2}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\|M^*Mf(M^{-1}) - N^*Nf(N^{-1})\| \\
&\qquad \le \|f(M^{-1})M\|\|M^* - N^*\| + \|M - N\|\|N^*f(N^{-1})\| \\
&\quad + \max(\|M^{-1}MN^* - MN^*N^{-1}\|, \|(M^*)^{-1}MN^* - MN^*(N^*)^{-1}\|) \\
&\qquad \le 2\|M - N\| + \max(\|N^* - MN^*N^{-1}\|, \|(M^*)^{-1}MN^* - M\|).
\end{aligned}$$

Остаётся оценить нормы $\|N^* - MN^*N^{-1}\|$ и $\|(M^*)^{-1}MN^* - M\|$. Имеем:

$$\|N^* - MN^*N^{-1}\| = \|(N - M)N^{-1}N^*\| \le \|M - N\|$$

и

$$\|(M^*)^{-1}MN^* - M\| = \|M(M^*)^{-1}(N^* - M^*)\| \le \|M^* - N^*\|.$$

Случай $n = 1$ может быть рассмотрен аналогично случаю $n = 0$, но вместо тождества (5.2) мы воспользуемся тождеством

$$\begin{aligned}
&f(M^{-1})M^2 - N^2f(N^{-1}) \\
&= f(M^{-1})M(M-N) + f(M^{-1})MN - MNf(N^{-1}) + (M-N)Nf(N^{-1}).
\end{aligned}$$

После этого останется заметить, что

$$\begin{aligned}
&\|(M^{-1})^*MN - MN(N^{-1})^*\| \\
&\qquad = \|\big((M^{-1})^*M\big)(N^* - M^*)\big(N(N^{-1})^*\big)\| \le \|M - N\|.
\end{aligned}$$

Наконец, пусть $n \ge 2$. Тогда

$$\begin{aligned}
g_n(M) - g_n(N) &= (\operatorname{sgn} M)^{2n-2}g_1(M) - (\operatorname{sgn} N)^{2n-2}g_1(N) \\
&= (\operatorname{sgn} M)^{2n-2}\big(g_1(M) - g_1(N)\big) \\
&\quad + \big((\operatorname{sgn} M)^{2n-2}N - (\operatorname{sgn} N)^{2n-2}N\big)Nf(N^{-1}).
\end{aligned}$$

Теперь ясно, что

$$\|g_n(M) - g_n(N)\| \le (2n + 1)\|M - N\|$$

в силу разобранного случая $n = 1$ и леммы 4.4. □

Пусть $\mathfrak{F}$ – замкнутое подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Положим $\mathfrak{F}_{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : z^{-1} \in \mathfrak{F}\}$. Ясно, что множество $\mathfrak{F}_{-1}$ тоже замкнуто. Кроме того, $(\mathfrak{F}_{-1})_{-1} = \{0\} \cup \mathfrak{F}$.

Докажем теперь следующее обобщение теоремы 5.1.

Теорема 5.2. *Пусть $f \in \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F}$ – замкнутое подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$, причём $\mathfrak{F} \ni 0$. Положим*

$$g_n(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} z^{1+n}\bar{z}^{1-n}\big(f(z^{-1}) - f(0)\big), & \textit{если } z \in \mathfrak{F}_{-1} \textit{ и } z \neq 0, \\ 0, & \textit{если } z = 0, \end{cases}$$

где $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $g_n \in \mathrm{OL}(\mathfrak{F}_{-1})$ и

$$c_n^{-1}\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} \le \|g_n\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F}_{-1})} \le c_n\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}, \tag{5.3}$$

где $c_n = \max(3, 2|n| + 1)$.

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 5.1, достаточно получить только верхние оценки полунорм функций g_n и можно считать, что $n \ge 0$. Заметим, что если множество $\mathfrak{F}$ неограничено, то мы можем почти дословно повторить доказательство теоремы 5.1. Действительно, в этом случае 0 является предельной точкой множества $\mathfrak{F}_{-1}$, и мы можем переписать все оценки доказательства теоремы 5.1 для нормальных операторов M и N со спектрами, содержащимися в $\mathfrak{F}_{-1} \setminus \{0\}$. Этого будет достаточно в силу леммы 2.2.

Мы несколько модифицируем доказательство теоремы 5.1 так, чтобы оно работало в общем случае. Можно считать, что $\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} = 1$ и $f(0) = 0$. Рассмотрим сначала случай $n = 0$. В силу теоремы 2.3 достаточно доказать, что

$$\|g_0(N)R - Rg_0(N)\| \le 3\max\big(\|NR - RN\|, \|N^*R - RN^*\|\big)$$

для любых операторов N и R таких, что N – нормальный оператор с конечным спектром, лежащим в $\mathfrak{F}_{-1}$. Положим

$$h_0(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} \bar{z}f(z^{-1}), & \text{если } z \in \mathfrak{F}_{-1} \text{ и } z \neq 0, \\ 0, & \text{если } z = 0, \end{cases}$$

$h_1(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} h_0(z)\operatorname{sgn}^2 z$. Ясно, что $g_0(z) = zh_0(z) = \bar{z}h_1(z)$ при всех $z \in \mathfrak{F}_{-1}$ и

$$\sup_{\mathfrak{F}_{-1}}|h_0| = \sup_{\mathfrak{F}_{-1}}|h_1| \le \|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})} \le \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} = 1.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} g_0(N)R - Rg_0(N) &= Nh_0(N)R - RN^*h_1(N) \\ &= h_0(N)(NR - RN) + h_0(N)RN - N^*Rh_1(N) \\ &\qquad + (N^*R - RN^*)h_1(N), \end{aligned}$$

откуда

$$\|g_0(N)R - Rg_0(N)\| \le 2\max\bigl(\|NR - RN\|, \|N^*R - RN^*\|\bigr)$$
$$+\|h_0(N)RN - N^*Rh_1(N)\|.$$

Таким образом, нам нужно доказать следующее неравенство:

$$\|h_0(N)RN - N^*Rh_1(N)\|$$
$$\le \max\bigl(\|NR - RN\|, \|N^*R - RN^*\|\bigr). \quad (5.4)$$

Если оператор N обратим, то, используя теорему 2.3, получаем:

$$\|h_0(N)RN - N^*Rh_1(N)\| = \|f(N^{-1})N^*RN - N^*RNf(N^{-1})\|$$
$$\le \max\bigl(\|N^{-1}N^*RN - N^*R)\|, \bigl\|RN - N^*RN(N^*)^{-1}\|\bigr)$$
$$= \max\bigl(\|N^{-1}N^*(RN - NR)\|, \bigl\|(RN^* - N^*R)N(N^*)^{-1}\|\bigr)$$
$$\le \max\bigl(\|RN - NR\|, \bigl\|RN^* - N^*R\|\bigr).$$

Докажем теперь это неравенство для произвольного нормального оператора с конечным спектром, лежащим в $\mathfrak{F}_{-1}$. Обозначим через $\mathcal{H}_0$ множество значений оператора N. Заметим, что множество $\mathcal{H}_0$ замкнуто в силу конечности спектра оператора N. Рассмотрим оператор N_0 на пространстве $\mathcal{H}_0$ такой, что $N_0u = Nu$ для всех $u \in \mathcal{H}_0$. Оператор N_0 нормален, поскольку $\mathcal{H}_0$ – приводящее подпространство оператора N. Кроме того, оператор N_0 обратим, поскольку $\sigma(N_0) = \sigma(N) \setminus \{0\}$. Таким образом, для оператора N_0 неравенство (5.4) мы уже доказали. Пусть P обозначает ортогональный проектор на $\mathcal{H}_0$. Ясно, что множества значений операторов $h_0(N)$ и $h_1(N)$ содержатся в $\mathcal{H}_0$, $\ker h_0(N) \supset \ker N$ и $\ker h_1(N) \supset \ker N$. Следовательно,

$$\|h_0(N)RN - N^*Rh_1(N)\| = \|h_0(N_0)PRPN_0 - N_0^*PRPh_1(N_0)\|$$
$$= \|f(N_0^{-1})N_0^*PRPN_0 - N_0^*PRPN_0f(N_0^{-1})\|$$
$$\le \max\bigl(\|N_0^{-1}N_0^*PRPN_0 - N_0^*PRP\|, \|PRPN_0 - N_0^*PRPN_0(N_0^{-1})^*\|\bigr)$$

в силу теоремы 2.3. Остаётся заметить, что

$$\|N_0^{-1}N_0^*PRPN_0 - N_0^*PRP\| = \|PRPN_0 - N_0PRP\|$$
$$= \|P(RN - NR)P\| \le \|NR - RN\|$$

и

$$\|PRPN_0 - N_0^*PRPN_0(N_0^{-1})^*\| = \|PRPN_0^* - N_0^*PRP\|$$
$$= \|P(RN^* - N^*R)P\| \le \|N^*R - RN^*\|.$$

Переходим теперь к случаю $n = 1$. Доказательство во многом повторяет доказательство для $n = 0$, и мы будем использовать обозначения, введённые при рассмотрении случая $n = 0$. Имеем:

$$\begin{aligned}
&g_1(N)R - Rg_1(N) = Nh_1(N)R - RNh_1(N) \\
&\ = h_1(N)(NR - RN) + h_1(N)RN - NRh_1(N) + (NR - RN)h_1(N),
\end{aligned}$$

откуда

$$\|g_1(N)R - Rg_1(N)\| \le 2\|NR - RN\| + \|h_1(N)RN - NRh_1(N)\|.$$

Нам нужно доказать, что

$$\|h_1(N)RN - NRh_1(N)\| \le \max\big(\|NR - RN\|, \|N^*R - RN^*\|\big).$$

Если оператор N обратим, то

$$\begin{aligned}
\|h_1(N)RN - NRh_1(N)\| &= \|f(N^{-1})NRN - NRNf(N^{-1})\| \\
&\le \max\big(\|RN - NR\|, \|(N^{-1})^*NRN - NRN(N^{-1})^*\|\big) \\
&= \max\big(\|RN - NR\|, \|(N^{-1})^*N(RN^* - N^*R)N(N^{-1})^*\|\big) \\
&= \max\big(\|NR - RN\|, \|N^*R - RN^*\|\big).
\end{aligned}$$

Докажем теперь это неравенство для произвольного нормального оператора с конечным спектром, лежащим в $\mathfrak{F}_{-1}$. Имеем:

$$\begin{aligned}
&\|h_1(N)RN - NRh_1(N)\| = \|h_1(N_0)PRPN_0 - N_0PRPh_1(N_0)\| \\
&\qquad = \|f(N_0^{-1})N_0PRPN_0 - N_0PRPN_0f(N_0^{-1})\| \\
&\le \max\big(\|PRPN_0 - N_0PRP\|, \|(N_0^{-1})^*N_0PRPN_0 - N_0PRPN_0(N_0^{-1})^*\|\big).
\end{aligned}$$

Это доказывает нужное нам неравенство, поскольку

$$\|PRPN_0 - N_0PRP\| = \|P(RN - NR)P\| \le \|NR - RN\|$$

и

$$\begin{aligned}
&\|(N_0^{-1})^*N_0PRPN_0 - N_0PRPN_0(N_0^{-1})^*\| \\
&\qquad = \|(N_0^{-1})^*N_0(PRPN_0^* - N_0^*PRP)N_0(N_0^{-1})^*\| \\
&\quad = \|PRPN_0^* - N_0^*PRP\| = \|P(RN^* - N^*R)P\| \le \|N^*R - RN^*\|.
\end{aligned}$$

Переходим к случаю $n \ge 2$. Ясно, что

$$\begin{aligned} g_n(M) - g_n(N) &= (\operatorname{sgn} M)^{2n-2} g_1(M) - (\operatorname{sgn} N)^{2n-2} g_1(N) \\ &= (\operatorname{sgn} M)^{2n-2} \big(g_1(M) - g_1(N)\big) \\ &\quad + \big((\operatorname{sgn} M)^{2n-2} N - (\operatorname{sgn} N)^{2n-2} N)\big) h_1(N) \end{aligned}$$

для любых нормальных операторов M и N таких, что $\sigma(M)$, $\sigma(N) \subset \mathfrak{F}_{-1}$. Остаётся воспользоваться разобранным случаем $n = 1$ и леммой 4.4. $\square$

Следствие 5.3. *Пусть $f \in \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F}$ – замкнутое подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$, причём $\mathfrak{F} \not\ni 0$. Положим*

$$g_n(z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} z^{1+n} \bar{z}^{1-n} f(z^{-1}), & \text{если } z \in \mathfrak{F}_{-1} \text{ и } z \ne 0, \\ 0, & \text{если } z = 0, \end{cases}$$

где $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $g_n \in \mathrm{OL}(\mathfrak{F}_{-1})$ и

$$c_n^{-1} \max\left(\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}, \sup_{z \in \mathfrak{F}} \frac{|f(z)|}{|z|}\right) \\ \le \|g_n\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F}_{-1})} \le c_n \left(\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} + \sup_{z \in \mathfrak{F}} \frac{|f(z)|}{|z|}\right),$$

где $c_n = \max(3, 2|n| + 1)$.

Доказательство. Рассмотрим продолжение f_0 функции f на множество $\mathfrak{F}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{F} \cup \{0\}$ такое, что $f_0(0) = 0$. Заметим, что

$$\max\left(\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}, \sup_{z \in \mathfrak{F}} \frac{|f(z)|}{|z|}\right) \le \|f_0\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F}_0)} \le \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} + \sup_{z \in \mathfrak{F}} \frac{|f(z)|}{|z|},$$

где первое неравенство очевидно, а второе вытекает из леммы 2.7. Остаётся применить теорему 5.2 к функции f_0. $\square$

Напомним, что $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ обозначает группу Мёбиуса дробно-линейных преобразований расширенной комплексной плоскости $\widehat{\mathbb{C}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) : f(\infty) = \infty\}$.

Пусть $\varphi \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$. С каждым замкнутым подмножеством $\mathfrak{F}$ множества комплексных чисел $\mathbb{C}$ мы связываем множество $\mathfrak{F}_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C} \cap \varphi^{-1}(\mathfrak{F} \cup$

$\{\infty\}$). Легко видеть, что замкнутость множества $\mathfrak{F}$ влечёт замкнутость множества $\mathfrak{F}_\varphi$. Ясно, что $\mathfrak{F}_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi^{-1}(\mathfrak{F})$, если $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$. Если $\varphi \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, то $\varphi^{-1}(\infty) \in \mathfrak{F}_\varphi$.

Отметим ещё, что $(\mathfrak{F}_\varphi)_{\varphi^{-1}} = \mathbb{C} \cap (\mathfrak{F} \cup \varphi(\infty))$. Другими словами, $(\mathfrak{F}_\varphi)_{\varphi^{-1}} = \mathfrak{F} \cup \varphi(\infty)$, если $\varphi \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$; и $(\mathfrak{F}_\varphi)_{\varphi^{-1}} = \mathfrak{F}$, если $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$. С каждой функцией f на множестве $\mathfrak{F}$ мы связываем функцию $T_{\varphi,n}f$, заданную на множестве $\mathfrak{F}_\varphi$ следующим образом:

$$(T_{\varphi,n}f)(z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{f(\varphi(z))}{|\varphi'(z)|\,\mathrm{sgn}^n(\varphi'(z))}, & \text{если } z \in \mathfrak{F}_\varphi \text{ и } \varphi(z) \neq \infty, \\ 0, & \text{если } \varphi(z) = \infty \text{ и } z \in \mathbb{C}, \end{cases}$$

где $n \in \mathbb{Z}$.

Если $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, то $(T_{\varphi,n}f)(z) = \dfrac{f(\varphi(z))}{|\varphi'(z)|\,\mathrm{sgn}^n(\varphi'(z))}$ при всех $z \in \mathfrak{F}_\varphi$. В этом случае $\varphi' = \mathrm{const}$. Однако в основном нас будет интересовать случай, когда $\varphi \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$.

Теорема 5.4. *Пусть $\varphi \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ и $f \in \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F}$ – замкнутое подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Предположим, что $\varphi(\infty) \in \mathfrak{F}$ и $f(\varphi(\infty)) = 0$. Тогда функция $T_{\varphi,n}f$ операторно липшицева и*

$$c_n^{-1}\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} \le \|T_{\varphi,n}f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F}_\varphi)} \le c_n\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} \tag{5.5}$$

при всех $n \in \mathbb{Z}$, где $c_n = \max(3, 2|n|+1)$. Кроме того, $T_{\varphi,n}(\mathrm{OL}_{\varphi(\infty)}(\mathfrak{F})) = \mathrm{OL}_{\varphi^{-1}(\infty)}(\mathfrak{F}_\varphi)$.

Доказательство. Докажем сначала неравенства (5.5). Положим $\phi_c(z) \stackrel{\text{def}}{=} cz^{-1}$, где $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$. Заметим, что $T_{\phi_1,n}f = (-1)^n g_n$, где g_n обозначает то же, что в теореме 5.2. Таким образом, случай $\varphi = \phi_1$ сводится к теореме 5.2. Случай $\varphi = \phi_c$ сводится к случаю $c = 1$ при помощи растяжений и вращений. Сведём теперь общий случай к случаю $\varphi = \phi_c$. Положим $a \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\infty)$ и $b \stackrel{\text{def}}{=} \varphi^{-1}(\infty)$. По условию $a \in \mathfrak{F} \subset \mathbb{C}$. Следовательно, $b \in \mathbb{C}$, и функция φ представима в виде $\varphi(z) = a + \dfrac{c}{z-b}$, где $c \neq 0$. Положим $\tau_h(z) \stackrel{\text{def}}{=} z - h$, где $h \in \mathbb{C}$. Тогда $T_{\varphi,n}f = (T_{\phi_c,n}(f \circ \tau_a^{-1})) \circ \tau_b$. Это доказывает неравенства (5.5) и включение

$$T_{\varphi,n}(\mathrm{OL}_{\varphi(\infty)}(\mathfrak{F})) \subset \mathrm{OL}_{\varphi^{-1}(\infty)}(\mathfrak{F}_\varphi). \tag{5.6}$$

Чтобы доказать противоположное включение, достаточно заметить, что $f = T_{\varphi,n}(T_{\varphi^{-1},n}f)$ и применить включение (5.6) к дробно-линейному преобразованию φ^{-1} и множеству $\mathfrak{F}_\varphi$. $\square$

Следствие 5.5. *Пусть $\varphi \in \operatorname{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ и $f \in \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F}$ – замкнутое подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Предположим, что $\varphi(\infty) \notin \mathfrak{F}$. Тогда $T_{\varphi,n}f \in \mathrm{OL}(\mathfrak{F}_\varphi)$ и*

$$c_n^{-1} \max\left(\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}, \sup_{z\in\mathfrak{F}} \frac{|f(z)|}{|z-\varphi(\infty)|}\right) \le \|T_{\varphi,n}f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F}_\varphi)}$$

$$\le c_n\left(\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} + \sup_{z\in\mathfrak{F}} \frac{|f(z)|}{|z-\varphi(\infty)|}\right)$$

при всех $n \in \mathbb{Z}$, где $c_n = \max(3, 2|n|+1)$. Кроме того[6], *$T_{\varphi,n}(\mathrm{OL}(\mathfrak{F})) = \mathrm{OL}_{\varphi^{-1}(\infty)}(\mathfrak{F}_\varphi)$.*

Доказательство. Если $\varphi(\infty) = \infty$, то $\varphi \in \operatorname{Aut}(\mathbb{C})$. Тогда ясно, что $T_{\varphi,n}(\mathrm{OL}(\mathfrak{F})) = \mathrm{OL}(\mathfrak{F}_\varphi)$ и $\|T_{\varphi,n}f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F}_\varphi)} = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}$ при всех $f \in \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ и $n \in \mathbb{Z}$. Пусть теперь $\varphi(\infty) \in \mathbb{C}$. Чтобы в этом случае свести следствие к теореме 5.4, мы можем продолжить каждую функцию $f \in \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ до функции $f_0 \in \mathrm{OL}(\mathfrak{F} \cup \{\varphi(\infty)\})$, положив $f_0(\varphi(\infty)) = 0$. Тогда $T_\varphi f_0 = T_\varphi f$. Следовательно,

$$T_{\varphi,n}(\mathrm{OL}(\mathfrak{F})) = T_{\varphi,n}\big(\mathrm{OL}_{\varphi(\infty)}(\mathfrak{F} \cup \{\varphi(\infty)\})\big) = \mathrm{OL}_{\varphi^{-1}(\infty)}(\mathfrak{F}_\varphi).$$

Чтобы закончить доказательство, достаточно применить лемму 2.7 точно так же, как это было сделано в доказательстве следствия 5.3. $\square$

Замечание 1. Если $f(z) = \bar{z}$, то $g_n(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (T_n f)(z) = z \operatorname{sgn}^{2n} z = \bar{z}\operatorname{sgn}^{2n+2} z$. Напомним, что $\|g_n\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{C})} = 2n+1$ при $n \ge 0$ в силу следствия 4.3, см. также теорему 3.5 статьи [3]. Отсюда видно, что при $n \ne 0$ константа c_n в неравенстве (5.1) не может быть улучшена. То же самое можно сказать о константе c_n^{-1}. Принимая во внимание замечание 1 после доказательства теоремы 4.2, мы видим, что при $n \ne 0$ константы c_n^{-1} и c_n не могут быть улучшены в неравенстве (5.3), если, например, бесконечно много точек множества $\mathfrak{F}$ лежит на какой-нибудь окружности с центром в нуле. Отсюда видно, что при $n \ne 0$

[6] Здесь мы считаем, что $\mathrm{OL}_\infty(\mathfrak{F}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$.

константа c_n (соответственно c_n^{-1}) не может быть улучшена в неравенстве (5.5), если, например, бесконечно много точек множества $\mathfrak{F}$ лежит на какой-нибудь окружности с центром в $\varphi(\infty)$ (соответственно $\varphi^{-1}(\infty)$). Автору неизвестно, можно ли улучшить константы $c_0^{-1} = \dfrac{1}{3}$ и $c_0 = 3$ в неравенствах (5.1).

Замечание 2. Почти все результаты этой статьи, относящиеся к операторно липшицевым функциям, имеют естественные аналоги для обычных липшицевых функций. Более того, доказательства большинства результатов работают и для пространств липшицевых функций $\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})$, если в них заменить операторы числами или операторами, действующими в одномерном гильбертовом пространстве; при этом получатся оценки с теми же константами. В частности, мы можем переписать замечание 1 для пространств $\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})$ с той лишь разницей, что теперь точность констант c_n и c_n^{-1} для невырожденных множеств $\mathfrak{F}$ легко проверяется и при $n = 0$. Чтобы убедиться в этом, достаточно доказать, что константа $c_0 = 3$ в соответствующем аналоге неравенства (5.1) не может быть улучшена. Для этого положим $f(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} |z-1|$. Тогда $g_0(z) = |z^2 - z| - |z|^2$. Остаётся заметить, что $\|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathbb{C})} = 1$ и $\|g_0\|_{\mathrm{Lip}(\mathbb{C})} \ge \|g_0\|_{\mathrm{Lip}([0,1])} = 3$.

Замечание 3. Неравенства (5.1) очевидным образом влекут следующие неравенства:

$$\|g_n\|_{\mathrm{Lip}(\mathbb{C})} \le c_n \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{C})} \quad \text{и} \quad \|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathbb{C})} \le c_n \|g_n\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{C})}. \tag{5.7}$$

Аргументы, изложенные в замечании 1, показывают, что константа c_n не может быть уменьшена даже в неравенствах (5.7), если $n \ne 0$. С другой стороны, можно доказать, что при $n = 0$ константу $c_0 = 3$ в неравенствах (5.7) можно улучшить.

Мы рассмотрим теперь некоторые частные случаи результатов, полученных в этом параграфе. Пусть κ обозначает преобразование Кэли, $\kappa(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \dfrac{i-z}{i+z}$. Применяя теорему 5.4 для $\varphi = \kappa$ и $\mathfrak{F} = \mathbb{T}$, получим $T_{\kappa,n}(\mathrm{OL}_{-1}(\mathbb{T})) \subset \mathrm{OL}_{-i}(\mathbb{R} \cup \{-i\})$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. Применяя ещё раз теорему 5.4 теперь для $\varphi = \kappa^{-1}$ и $\mathfrak{F} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, получим $T_{\kappa,n}(\mathrm{OL}_{-1}(\mathbb{T})) = \mathrm{OL}_{-i}(\mathbb{R} \cup \{-i\})$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. Положим $X_n f \stackrel{\mathrm{def}}{=} (T_{\kappa,n} f)|\mathbb{R}$, где $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $X_n(\mathrm{OL}_{-1}(\mathbb{T})) = \mathrm{OL}(\mathbb{R})$.

Теорема 5.6. *Пусть $n \in \mathbb{Z}$. Тогда оператор X_n является линейной биекцией пространства $\mathrm{OL}_{-1}(\mathbb{T})$ на пространство $\mathrm{OL}(\mathbb{R})$, причём*

$$(2c_n)^{-1}\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{T})} \le \|X_n f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} + |(X_n f)(0)| \le 2c_n\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{T})}$$

для всех $f \in \mathrm{OL}_{-1}(\mathbb{T})$, где $c_n = \max(3, 2|n|+1)$.

Доказательство. Нам нужно доказать только неравенства, поскольку всё остальное было по существу объяснено выше. Из теоремы 5.4 следует, что

$$c_n^{-1}\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{T})} \le \|X_n f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R}\cup\{-i\})} \le c_n\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{T})}.$$

Остаётся доказать, что

$$\frac{1}{2}\|X_n f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R}\cup\{-i\})} \le \|X_n f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} + |(X_n f)(0)| \le 2\|X_n f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R}\cup\{-i\})}. \tag{5.8}$$

Заметим, что $\|X_n f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} \le \|X_n f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R}\cup\{-i\})}$ и

$$|(X_n f)(0)| = |(X_n f)(0) - (X_n f)(-i)| \le \|X_n f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R}\cup\{-i\})},$$

откуда получаем второе неравенство формулы (5.8). Применяя лемму 2.7, получаем

$$\begin{aligned}\|X_n f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R}\cup\{-i\})} &\le \|X_n f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} + \sup_{t\in\mathbb{R}}\frac{|(X_n f)(t)|}{|t+i|}\\ &\le \|X_n f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} + \sup_{t\in\mathbb{R}}\frac{|(X_n f)(t) - (X_n f)(0)|}{|t+i|} + \sup_{t\in\mathbb{R}}\frac{|(X_n f)(0)|}{|t+i|}\\ &\le 2\|X_n f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} + |(X_n f)(0)|,\end{aligned}$$

откуда мгновенно получается первое неравенство формулы (5.8). $\square$

Замечание 1. Аналогично можно построить линейную биекцию X_n пространства $\mathrm{OL}_{-1}(\overline{\mathbb{D}})$ на пространство $\mathrm{OL}(\overline{\mathbb{C}}_+)$ такую, что

$$(2c_n)^{-1}\|f\|_{\mathrm{OL}(\overline{\mathbb{D}})} \le \|X_n f\|_{\mathrm{OL}(\overline{\mathbb{C}}_+)} + |(X_n f)(0)| \le 2c_n\|f\|_{\mathrm{OL}(\overline{\mathbb{D}})}$$

для всех $f \in \mathrm{OL}_{-1}(\overline{\mathbb{D}})$, где

$$\overline{\mathbb{D}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\} \quad \text{и} \quad \overline{\mathbb{C}}_+ \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \ge 0\}.$$

Замечание 2. Применяя теорему 5.2 для $\mathfrak{F} = \overline{\mathbb{D}}$ и следствие 5.3 для $\mathfrak{F} = \mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$, можно получить линейные биекции пространства $\mathrm{OL}_0(\overline{\mathbb{D}})$ на пространство $\mathrm{OL}(\mathbb{C}\setminus\mathbb{D})$.

Пусть $a \in (0, +\infty)$. Обозначим через $\mathrm{OL}(\mathbb{R}/a\mathbb{Z})$ множество всех функций пространства $\mathrm{OL}(\mathbb{R})$, имеющих период a. Положим

$$\mathrm{OL}_c(\mathbb{R}/a\mathbb{Z}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{f \in \mathrm{OL}(\mathbb{R}/a\mathbb{Z}) : f(c) = 0\},$$

где $c \in \mathbb{R}$.

Нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 5.7. *Отображение, которое сопоставляет функции $f(\zeta)$ на единичной окружности $\mathbb{T}$ функцию $f(e^{it})$, является изоморфизмом пространства $\mathrm{OL}(\mathbb{T})$ на пространство $\mathrm{OL}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, при этом*

$$\frac{1}{3\sqrt{2}\pi}\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{T})} \le \|f(e^{it})\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} \le \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{T})}$$

для любой функции $f \in \mathrm{OL}(\mathbb{T})$.

Мы не будем здесь доказывать эту лемму. Доказательство этой леммы можно извлечь из статьи [2]. Отметим, что верхняя оценка полунормы $\|f(e^{it})\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$ следует из того, что $\|e^{it}\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} = 1$. Нижняя оценка полунормы $\|f(e^{it})\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$ по крайней мере для гладких функций f может быть выведена из леммы 9.8 статьи [2]. Отказаться от условия гладкости можно при помощи аппроксимативной единицы.

Рассмотрим оператор Y, который сопоставляет функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ функцию $Yf : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $(Yf)(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (1 + t^2) f(\operatorname{arctg} t)$.

Теорема 5.8. *Отображение Y является линейной биекцией пространства $\mathrm{OL}_{\frac{\pi}{2}}(\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})$ на пространство $\mathrm{OL}(\mathbb{R})$, при этом*

$$\frac{1}{6}\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} \le \|Yf\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} + |(Yf)(0)| \le 18\sqrt{2}\pi\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$$

для любой функции $f \in \mathrm{OL}_{\frac{\pi}{2}}(\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})$.

Доказательство. Пусть $g \in \mathrm{OL}_{\frac{\pi}{2}}(\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})$. Тогда в силу леммы 5.7 существует единственная функция $f \in \mathrm{OL}_{-1}(\mathbb{T})$ такая, что $g(t/2) = f(e^{it})$. Кроме того, из леммы 5.7 следует, что

$$\frac{2}{3\sqrt{2}\pi}\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{T})} \le \|g\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} \le 2\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{T})}. \tag{5.9}$$

Имеем:

$$\begin{aligned}(Yg)(t) = (1 + t^2) g(\operatorname{arctg} t) &= (1 + t^2) f(e^{2i \operatorname{arctg} t}) \\ &= (1 + t^2) f\left(\frac{i - t}{i + t}\right) = 2(X_0 f)(t).\end{aligned}$$

Теперь из теоремы 5.6 следует, что Y является линейной биекцией. Кроме того, из теоремы 5.6 следует, что

$$\frac{1}{3}\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{T})} \le \|Yg\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} + |(Yg)(0)| \le 12\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{T})}.$$

Отсюда и из неравенств (5.9) следуют требуемые оценки. □

Пусть Z обозначает оператор, который сопоставляет функции $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ функцию

$$(Zg)(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} (\cos^2 x)\, g(\operatorname{tg} x), & \text{если} \quad \cos x \ne 0, \\ 0, & \text{если} \quad \cos x = 0. \end{cases}$$

Следствие 5.9. *Отображение Z является линейной биекцией пространства $\mathrm{OL}(\mathbb{R})$ на пространство $\mathrm{OL}_{\frac{\pi}{2}}(\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})$, при этом*

$$\frac{1}{18\sqrt{2}\pi}(\|g\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} + |g(0)|) \le \|Zg\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} \le 6(\|g\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} + |g(0)|)$$

для любой функции $g \in \mathrm{OL}(\mathbb{R})$.

§6. Операторно липшицевы функции и дифференциальные операторы

В §3 мы доказали, что для любой функции $f \in \mathrm{OL}(\mathbb{R})$ существует функция $g \in \mathrm{OL}(\mathbb{R})$ такая, что $g'(t) = f'(t^{-1})$. Наша ближайшая цель – получить аналог этого утверждения для пространства $\mathrm{OL}(\mathbb{C})$. Мы построим дифференциальный оператор $\mathfrak{D}$, который обладает следующим свойством: для любой функции $f \in \mathrm{OL}(\mathbb{C})$ существует функция $g \in \mathrm{OL}(\mathbb{C})$ такая, что $(\mathfrak{D}g)(z) = (\mathfrak{D}f)(z^{-1})$. К сожалению, построенный нами дифференциальный оператор не будет инвариантен относительно сдвига. Это обстоятельство не позволит нам получить полные аналоги одномерных результатов: в отличие от одномерного случая мы не сможем дробно-линейное преобразование z^{-1} заменить произвольным дробно-линейным преобразованием.

Положим

$$Df \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \overline{D}f \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial \bar z}, \quad \mathfrak{D}f \stackrel{\mathrm{def}}{=} Df + \frac{\bar z}{z}\overline{D}f,$$

$$\Theta_2 f \stackrel{\mathrm{def}}{=} z\mathfrak{D}f = zDf + \bar z\overline{D}f = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Операторы D, $\overline{D}$ и Θ_2 определены на пространстве обобщённых функций $\mathscr{D}'(\mathbb{C})$, а оператор $\mathfrak{D}$ – на пространстве обобщённых функций $\mathscr{D}'(\mathbb{C}\setminus\{0\})$. Легко видеть, что равенство $\mathfrak{D}f=0$ (или, что то же самое, $\Theta_2 f=0$) в пространстве $\mathscr{D}'(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ выполняется тогда и только тогда, когда f – однородная обобщённая функция степени 0. Отметим ещё, что $\mathfrak{D}f\in L^\infty(\mathbb{C})$ для любой функции $f\in\operatorname{Lip}(\mathbb{C})$. Кроме того, если $\mathfrak{D}f=0$ для некоторой функции $f\in\operatorname{Lip}(\mathbb{C})$, то $f=\mathrm{const}$, поскольку функция f должна быть одновременно непрерывной и однородной степени 0.

Определим пространство $(\mathrm{OL})'_0(\mathbb{C})$ как множество всех функций $g\in L^\infty(\mathbb{C})$ таких, что $g=\mathfrak{D}f$ для некоторой функции $f\in\mathrm{OL}(\mathbb{C})$, $\|g\|_{(\mathrm{OL})'_0(\mathbb{C})}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{C})}$. Ясно, что последнее определение корректно и задаёт норму на пространстве $(\mathrm{OL})'_0(\mathbb{C})$. Заметим, что в отличие от класса $(\mathrm{OL})'(\widehat{\mathbb{R}})$ функции класса $(\mathrm{OL})'_0(\mathbb{C})$ мы определяем лишь с точностью до множества меры 0. Ещё одно отличие заключается в том, что пространство $(\mathrm{OL})'_0(\mathbb{C})$ не инвариантно относительно сдвигов. Таким образом, если у нас есть какое-то утверждение, касающееся пространства $(\mathrm{OL})'_0(\mathbb{C})$, и мы хотим перенести начало координат в точку $a\in\mathbb{C}$, то тогда пространства $(\mathrm{OL})'_0(\mathbb{C})$ нужно будет заменить пространством $(\mathrm{OL})'_a(\mathbb{C})$,

$$(\mathrm{OL})'_a(\mathbb{C})\stackrel{\mathrm{def}}{=}\left\{(Df)(z)+\frac{\bar z-\bar a}{z-a}(\overline{D}f)(z):f\in\mathrm{OL}(\mathbb{C})\right\}.$$

Теорема 6.1. *Пусть* $g\in(\mathrm{OL})'_0(\mathbb{C})$. *Тогда* $g(z)\operatorname{sgn}^{2n}z\in(\mathrm{OL})'_0(\mathbb{C})$ *при всех* $n\in\mathbb{Z}$ *и* $\|g(z)\operatorname{sgn}^{2n}z\|_{(\mathrm{OL})'_0(\mathbb{C})}\le(2|n|+1)\|g\|_{(\mathrm{OL})'_0(\mathbb{C})}$.

Доказательство. По определению пространства $(\mathrm{OL})'_0(\mathbb{C})$ существует функция $f\in\mathrm{OL}(\mathbb{C})$ такая, что $\mathfrak{D}f=g$. Тогда $\mathfrak{D}(f(z)\operatorname{sgn}^{2n}z)=g(z)\operatorname{sgn}^{2n}z$. Следовательно, $g(z)\operatorname{sgn}^{2n}z\in(\mathrm{OL})'_0(\mathbb{C})$ и

$$\begin{aligned}&\|g(z)\operatorname{sgn}^{2n}z\|_{(\mathrm{OL})'_0(\mathbb{C})}\\&\qquad=\|f(z)\operatorname{sgn}^{2n}z\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{C})}\le(2|n|+1)\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{C})}=\|g\|_{(\mathrm{OL})'_0(\mathbb{C})}\end{aligned}$$

в силу теоремы 4.2. □

Теорема 6.2. *Пусть* $f\in\mathrm{OL}(\mathbb{C})$. *Тогда функция* $\dfrac{f(z)-f(0)}{z}$ *принадлежит пространству* $(\mathrm{OL})'_0(\mathbb{C})$, *причём*

$$\left\|\frac{f(z)-f(0)}{z}\right\|_{(\mathrm{OL})'_0(\mathbb{C})}\le\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{C})}.$$

Доказательство. Можно считать, что $f(0)=0$. Функция f удовлетворяет условию Липшица, поэтому она дифференцируема почти всюду на $\mathbb{C}$ как функция двух вещественных переменных, см., например, [11, глава VIII, теорема 1]. Следовательно, при почти всех $z\in\mathbb{C}$ справедливо равенство:

$$f(z)=\int_0^1\frac{(\Theta_2 f)(tz)\,dt}{t}=z\int_0^1(\mathfrak{D}f)(tz)\,dt.$$

Положим

$$h(z)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\int_0^1\frac{f(tz)\,dt}{t}.$$

Тогда $h\in\mathrm{OL}(\mathbb{C})$ и $\|h\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{C})}\le\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{C})}$ в силу леммы 2.6. Заметим, что $\mathfrak{D}\left(\dfrac{f(tz)}{t}\right)=(\mathfrak{D}f)(tz)$ при почти всех $t\in[0,1]$ и почти всех $z\in\mathbb{C}$. Следовательно,

$$(\mathfrak{D}h)(z)=\int_0^1(\mathfrak{D}f)(tz)\,dt=\frac{f(z)}{z}$$

при почти всех $z\in\mathbb{C}$. □

Следствие 6.3. *Пусть $f\in\mathrm{OL}(\mathbb{C})$. Тогда функция $\dfrac{f(z)-f(0)}{z}\operatorname{sgn}^{2n}z$ принадлежит пространству $(\mathrm{OL})'_0(\mathbb{C})$ и*

$$\left\|\frac{f(z)-f(0)}{z}\operatorname{sgn}^{2n}z\right\|_{(\mathrm{OL})'_0(\mathbb{C})}\le(2|n|+1)\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{C})}$$

при всех $n\in\mathbb{Z}$. В частности, $\left\|\dfrac{f(z)-f(0)}{\bar z}\right\|_{(\mathrm{OL})'_0(\mathbb{C})}\le 3\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{C})}$.

Теорема 6.4. *Пусть $g\in(\mathrm{OL})'_0(\mathbb{C})$. Тогда $g(az^{-1})\in(\mathrm{OL})'_0(\mathbb{C})$ для всех $a\in\mathbb{C}$, $a\ne0$, и*

$$\frac19\|g(az^{-1})\|_{(\mathrm{OL})'_0(\mathbb{C})}\le\|g\|_{(\mathrm{OL})'_0(\mathbb{C})}\le 9\|g(az^{-1})\|_{(\mathrm{OL})'_0(\mathbb{C})}.$$

Доказательство. В силу равенства $\mathfrak{D}(f(az))=a(\mathfrak{D}f)(az)$ достаточно рассмотреть случай $a=1$. Представим функцию g в виде $g=\mathfrak{D}f$, где $f\in\mathrm{OL}_0(\mathbb{C})$. Положим $h\stackrel{\mathrm{def}}{=}T_1 f$, где T_1 обозначает то же, что в доказательстве теоремы 5.1. Из теоремы 5.1 следует, что $\|h\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{C})} \le 3\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{C})} = 3\|g\|_{(\mathrm{OL})'_0(\mathbb{C})}$. Заметим, что

$$(\mathfrak{D}h)(z) = 2z^{-1}h(z) - g(z^{-1}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\|g(z^{-1})\|_{(\mathrm{OL})'_0(\mathbb{C})} \le 2\|z^{-1}h(z)\|_{(\mathrm{OL})'_0(\mathbb{C})} + \|\mathfrak{D}h\|_{(\mathrm{OL})'_0(\mathbb{C})} \\ \le 3\|h\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{C})} \le 9\|g\|_{(\mathrm{OL})'_0(\mathbb{C})}.\end{aligned}$$

$\square$

§7. Коммутаторно липшицевы функции и дробно-линейные преобразования

Функцию f, заданную на множестве $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F} \subset \mathbb{C}$, будем называть[7] *коммутаторно липшицевой*, если существует константа C такая, что

$$\|f(M)R - Rf(N)\| \le C\|MR - RN\| \tag{7.1}$$

для любых нормальных операторов M и N с конечными спектрами $\sigma(M)$ и $\sigma(N)$, лежащими в $\mathfrak{F}$, и для любого оператора R.

Множество всех коммутаторно липшицевых функций, заданных на $\mathfrak{F}$, обозначим через $\mathrm{CL}(\mathfrak{F})$. Наименьшую из констант C, удовлетворяющих условию (7.1), обозначим через $\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})}$. Положим $\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} = +\infty$, если $f \notin \mathrm{CL}(\mathfrak{F})$. Ясно, что $\mathrm{CL}(\mathfrak{F}) \subset \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ и $\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} \le \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})}$. Так же, как и в случае операторно липшицевых функций, легко убедиться в том, что

$$\|f(M)R - Rf(N)\| \le \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})}\|MR - RN\|$$

для любого оператора R и любых нормальных операторов M и N таких, что $\sigma(M), \sigma(N) \subset \mathfrak{F}$. Аналогично может быть доказан следующий вариант леммы 2.2.

Лемма 7.1. *Пусть* $f \in \mathrm{CL}(\mathfrak{F})$. *Тогда существует единственное непрерывное продолжение функции* f *до функции* $\widetilde{f}$, *заданной на множестве* $\operatorname{clos}\mathfrak{F}$, *и* $\|\widetilde{f}\|_{\mathrm{CL}(\operatorname{clos}\mathfrak{F})} = \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})}$.

---

[7] В статьях [8] и [10] такие функции называются *коммутаторно ограниченными* или точнее: *коммутаторно* $\mathfrak{S}^b$*-ограниченными*.

Из результатов статьи [5] следует, что функция $f \in \mathrm{CL}(\mathfrak{F})$ дифференцируема как функция комплексной переменной в каждой неизолированной точке множества $\mathfrak{F}$. Кроме того, если множество $\mathfrak{F}$ не ограничено, то существует конечный предел $\lim\limits_{|z|\to+\infty} z^{-1}f(z) \stackrel{\text{def}}{=} f'(\infty)$ для любой функции $f \in \mathrm{CL}(\mathfrak{F})$. Таким образом, функция $f \in \mathrm{CL}(\mathfrak{F})$ аналитична в каждой внутренней точке множества $\mathfrak{F}$. Отсюда мгновенно получается, что $\mathrm{CL}(\mathbb{C}) = \{az + b : a, b \in \mathbb{C}\}$.

Замкнутое множество $\mathfrak{F}$ называется множеством Фугледе, если $\bar{z} \in \mathrm{CL}(\mathfrak{F})$, см. [8], где это понятие было введено для компактных множеств $\mathfrak{F}$. Таким образом, если $\mathfrak{F}$ – множество Фугледе, то функция $\bar{z}$ дифференцируема как функция комплексной переменной в каждой неизолированной точке множества $\mathfrak{F}$. Кроме того, существует предел $\lim\limits_{|z|\to+\infty} z^{-1}\bar{z}$, если $\mathfrak{F}$ – неограниченное множество Фугледе. Ясно, что $\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} \le \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} \le \|\bar{z}\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})}\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}$ для любой функции, заданной на $\mathfrak{F}$. Следовательно, равенство $\mathrm{OL}(\mathfrak{F}) = \mathrm{CL}(\mathfrak{F})$ выполняется в том и только в том случае, когда $\mathfrak{F}$ – множество Фугледе, см. [8]. Заметим, что $\|\bar{z}\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} \ge 1$, если множество $\mathfrak{F}$ содержит по крайней мере две точки. Из результатов статьи [6] следует, что $\|\bar{z}\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} \le 1$ в том и только в том случае, когда множество $\mathfrak{F}$ лежит на прямой или на окружности. Таким образом, $\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} = \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})}$ для любой функции f на множестве $\mathfrak{F}$ в том и только в том случае, когда множество $\mathfrak{F}$ лежит на прямой или на окружности.

Теперь мы сформулируем аналог теоремы 2.3 для коммутаторно липшицевых функций.

Теорема 7.2. *Пусть f – непрерывная функция, заданная на замкнутом подмножестве $\mathfrak{F}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(i) $\|f(N)R - Rf(N)\| \le \|NR - RN\|$ *для всех операторов R и всех нормальных операторов N таких, что $\sigma(N) \subset \mathfrak{F}$;*

(ii) $\|f(M)R - Rf(N)\| \le \|MR - RN\|$ *для всех операторов R и всех нормальных операторов M и N таких, что $\sigma(M), \sigma(N) \subset \mathfrak{F}$.*

Эта теорема была доказана в [3], см. также [8], где похожее утверждение доказано для симметричных норм.

Отметим, что леммы 2.6 и 2.7 допускают естественные аналоги для коммутаторно липшицевых функций. Мы приводим эти аналоги без доказательств, поскольку они аналогичны доказательствам лемм 2.6 и 2.7.

Лемма 7.3. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *– пространство с мерой. Предположим, что отображение* $\omega \mapsto \Phi_\omega$*, заданное почти всюду на* Ω*, действует в пространство* $\mathrm{CL}(\mathfrak{F})$ *и обладает следующими свойствами:*

(a) *функция* $\omega \mapsto \Phi_\omega(z)$ *измерима при всех* $z \in \mathfrak{F}$*,*

(b) *функция* $\omega \mapsto \Phi_\omega(z_0)$ *суммируема при некотором* $z_0 \in \mathfrak{F}$*,*

(c) *функция* $\omega \mapsto \|\Phi_\omega\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})}$ *суммируема.*

Тогда функция $\omega \mapsto \Phi_\omega(z)$ *суммируема при всех* $z \in \mathfrak{F}$*, функция* $f(z) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_\Omega \Phi_\omega(z)\, d\mu(\omega)$ *принадлежит пространству* $\mathrm{CL}(\mathfrak{F})$ *и*

$$\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} \le \int\limits_\Omega \|\Phi_\omega\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})}\, d\mu(\omega).$$

Лемма 7.4. *Пусть* f *– функция, заданная на множестве* $\mathfrak{F} \cup \{z_0\}$*, где* $\mathfrak{F}$ *– замкнутое подмножество комплексной плоскости* $\mathbb{C}$*,* $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathfrak{F}$*. Тогда*

$$\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F}\cup\{z_0\})} \le \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} + \sup_{z\in\mathfrak{F}} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}.$$

Нам понадобится ещё одна лемма.

Лемма 7.5. *Пусть* $f \in \mathrm{CL}(\mathfrak{F})$*, где* $\mathfrak{F}$ *– замкнутое подмножество множества* $\mathbb{C}$*. Тогда функция* $\dfrac{f(z)}{z-a}$ *принадлежит пространству* $\mathrm{CL}(\mathfrak{F})$ *при всех* $a \in \mathbb{C} \setminus \mathfrak{F}$ *и*

$$\left\|\frac{f(z)}{z-a}\right\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} \le \left(\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} + \sup_{z\in\mathfrak{F}} \frac{|f(z)|}{|z-a|}\right) (\mathrm{dist}(a, \mathfrak{F}))^{-1}.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $a = 0$. В силу теоремы 7.2 нам нужно доказать, что при

$$C = (\mathrm{dist}(0, \mathfrak{F}))^{-1} \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} + (\mathrm{dist}(0, \mathfrak{F}))^{-1} \sup_{z\in\mathfrak{F}} \frac{|f(z)|}{|z|}$$

выполняется следующее неравенство:

$$\|N^{-1}f(N)R - RN^{-1}f(N)\| \le C\|NR - RN\|$$

для всех операторов R и всех нормальных операторов N таких, что $\sigma(N)\subset\mathfrak{F}$. Чтобы доказать это неравенство, достаточно заметить, что

$$N^{-1}f(N)R-RN^{-1}f(N)\\ =N^{-1}(f(N)R-Rf(N))+N^{-1}(RN-NR)N^{-1}f(N).$$

□

Приведём теперь аналог теоремы 5.4 для коммутаторно липшицевых функций. Как уже было отмечено выше, коммутаторно липшицева функция дифференцируема как функции комплексной переменной в каждой неизолированной точке своей области задания. Таким образом, нас будут интересовать преобразования $T_{\varphi,n}$ только при $n=1$, поскольку при $n\ne1$ функция $|\varphi'(z)|\operatorname{sgn}^n(\varphi')$ нигде не дифференцируема как функция комплексной переменной, если, конечно, исключить тривиальный случай, когда $\varphi\in\operatorname{Aut}(\mathbb{C})$. Напомним, что $T_\varphi\stackrel{\text{def}}{=}T_{\varphi,1}$ и $\mathrm{CL}_a(\mathfrak{F})\stackrel{\text{def}}{=}\{f\in\mathrm{CL}(\mathfrak{F}):f(a)=0\}$, где $a\in\mathfrak{F}$.

Теорема 7.6. *Пусть $\varphi\in\operatorname{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ и $f\in\mathrm{CL}(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F}$ – замкнутое подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Предположим, что $\varphi(\infty)\in\mathfrak{F}$ и $f(\varphi(\infty))=0$. Тогда $T_\varphi f\in\mathrm{CL}(\mathfrak{F}_\varphi)$ и*

$$\frac13\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})}\le\|T_\varphi f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F}_\varphi)}\le3\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})}.$$

Кроме того, $T_\varphi(\mathrm{CL}_{\varphi(\infty)}(\mathfrak{F}))=\mathrm{CL}_{\varphi^{-1}(\infty)}(\mathfrak{F}_\varphi)$.

Доказательство. Равенство $T_\varphi(\mathrm{CL}_{\varphi(\infty)}(\mathfrak{F}))=\mathrm{CL}_{\varphi^{-1}(\infty)}(\mathfrak{F}_\varphi)$ выводится из включения $T_\varphi(\mathrm{CL}_{\varphi(\infty)}(\mathfrak{F}))\subset\mathrm{CL}_{\varphi^{-1}(\infty)}(\mathfrak{F}_\varphi)$ так же, как в случае операторно липшицевых функций, см. доказательство теоремы 5.4. Таким образом, достаточно доказать только неравенства. Так же, как и в случае операторно липшицевых функций, достаточно рассмотреть случай, когда $\varphi(z)=z^{-1}$. Можно считать, что $\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})}=1$ и $f(0)=0$. Положим $g\stackrel{\text{def}}{=}T_\varphi f$. Из равенства $f=T_\varphi g$ следует, что достаточно доказать оценку сверху для $\|g\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})}$, т.е. в силу теоремы 7.2 следующее неравенство:

$$\|g(N)R-Rg(N)\|\le3\|NR-RN\|$$

для любого оператора R и любого нормального оператора N со спектром в $\mathfrak{F}_{-1}$. Кроме того, в силу леммы 2.1 можно дополнительно предположить, что спектр оператора N конечен. Положим

$$h(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} -zf(z^{-1}), & \text{если } z \in \mathfrak{F}_{-1} \text{ и } z \neq 0, \\ 0, & \text{если } z = 0. \end{cases}$$

Ясно, что $g(z) = zh(z)$ при всех $z \in \mathfrak{F}_{-1}$ и

$$\sup_{\mathfrak{F}_{-1}} |h| \le \|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})} \le \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} = 1.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} &g(N)R - Rg(N) \\ &\qquad = h(N)(NR - RN) + h(N)RN - NRh(N) + (NR - RN)h(N), \end{aligned}$$

откуда

$$\|g(N)R - Rg(N)\| \le 2\|NR - RN\| + \|h(N)RN - NRh(N)\|.$$

Остаётся доказать следующее неравенство:

$$\|h(N)RN - NRh(N)\| \le \|NR - RN\| \tag{7.2}$$

для любого оператора R и любого нормального оператора N с конечным спектром, лежащим в $\mathfrak{F}_{-1}$. Если оператор N обратим, то

$$\begin{aligned} \|h(N)RN - NRh(N)\| &= \|f(N^{-1})NRN - NRNf(N^{-1})\| \\ &\le \|N^{-1}NRN - NRNN^{-1}\| = \|NR - RN\|. \end{aligned}$$

Обозначим через $\mathcal{H}_0$ множество значений оператора N. Заметим, что множество $\mathcal{H}_0$ замкнуто в силу конечности спектра оператора N. Рассмотрим оператор N_0 на пространстве $\mathcal{H}_0$ такой, что $N_0 u = Nu$ для всех $u \in \mathcal{H}_0$. Оператор N_0 нормален, поскольку $\mathcal{H}_0$ – приводящее подпространство оператора N. Кроме того, оператор N_0 обратим, поскольку $\sigma(N_0) = \sigma(N) \setminus \{0\}$. Таким образом, для оператора N_0 неравенство (7.2) мы уже доказали. Пусть P обозначает ортогональный проектор на $\mathcal{H}_0$. Ясно, что множество значений оператора $h(N)$ содержится в $\mathcal{H}_0$ и $\ker h(N) \supset \ker N$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\|h(N)RN - NRh(N)\| &= \|h(N_0)PRPN_0 - N_0PRPh(N_0)\| \\ &= \|f(N_0^{-1})N_0PRPN_0 - N_0PRPN_0f(N_0^{-1})\| \\ &\le \|N_0^{-1}N_0PRPN_0 - N_0PRPN_0N_0^{-1}\| \\ &= \|P(RN - NR)P\| \le \|RN - NR\|.\end{aligned}$$

□

Следствие 7.7. *Пусть* $\varphi \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ *и* $f \in \mathrm{CL}(\mathfrak{F})$, *где* $\mathfrak{F}$ *– замкнутое подмножество комплексной плоскости* $\mathbb{C}$. *Предположим, что* $\varphi(\infty) \notin \mathfrak{F}$. *Тогда* $T_\varphi f \in \mathrm{CL}(\mathfrak{F}_\varphi)$ *и*

$$\frac{1}{3}\max\left(\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})}, \sup_{z\in\mathfrak{F}}\frac{|f(z)|}{|z-\varphi(\infty)|}\right) \le \|T_\varphi f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F}_\varphi)} \le 3\left(\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} + \sup_{z\in\mathfrak{F}}\frac{|f(z)|}{|z-\varphi(\infty)|}\right).$$

Кроме того[8], $T_\varphi(\mathrm{CL}(\mathfrak{F})) = \mathrm{CL}_{\varphi^{-1}(\infty)}(\mathfrak{F}_\varphi)$.

Доказательство. Если $\varphi(\infty) = \infty$, то $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$. Тогда ясно, что $T_\varphi(\mathrm{CL}(\mathfrak{F})) = \mathrm{CL}(\mathfrak{F}_\varphi)$ и $\|T_\varphi f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F}_\varphi)} = \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})}$ при всех $f \in \mathrm{CL}(\mathfrak{F})$. Пусть теперь $\varphi(\infty) \in \mathbb{C}$. Чтобы в этом случае свести следствие к теореме 7.6, мы можем продолжить каждую функцию $f \in \mathrm{CL}(\mathfrak{F})$ до функции $f_0 \in \mathrm{CL}(\mathfrak{F} \cup \{\varphi(\infty)\})$, положив $f_0(\varphi(\infty)) = 0$. Тогда $T_\varphi f_0 = T_\varphi f$. Следовательно,

$$T_\varphi(\mathrm{CL}(\mathfrak{F})) = T_\varphi\big(\mathrm{CL}_{\varphi(\infty)}(\mathfrak{F} \cup \{\varphi(\infty)\})\big) = \mathrm{CL}_{\varphi^{-1}(\infty)}(\mathfrak{F}_\varphi).$$

Чтобы доказать неравенства, заметим, что

$$\max\left(\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})}, \sup_{z\in\mathfrak{F}}\frac{|f(z)|}{|z-\varphi(\infty)|}\right) \le \|f_0\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F}\cup\{\varphi(\infty)\})} \le \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} + \sup_{z\in\mathfrak{F}}\frac{|f(z)|}{|z-\varphi(\infty)|},$$

где первое неравенство очевидно, а второе вытекает из леммы 7.4. Остаётся ещё раз воспользоваться теоремой 7.6. □

[8] Здесь мы считаем, что $\mathrm{CL}_\infty(\mathfrak{F}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{CL}(\mathfrak{F})$.

Пример 1. Хорошо известно, что экспонента принадлежит пространству $\mathrm{CL}(\mathfrak{F})$, если проекция множества $\mathfrak{F}$ на вещественную прямую ограничена сверху. Действительно,

$$\exp(M)R - R\exp(N) = -\exp(M)\int_0^1 d(\exp(-tM)R\exp(tN))$$
$$= \int_0^1 \exp((1-t)M)(MR - RN)\exp(tN)\,dt,$$

откуда

$$\|\exp(M)R - R\exp(N)\| \le e^{\sup \operatorname{Re}\mathfrak{F}}\|MR - RN\|$$

для любого оператора R и любых нормальных операторов M и N со спектром в $\mathfrak{F}$. Применив теорему 7.6 к коммутаторно липшицевой функции $f = -\exp|\mathfrak{F}$ при $\mathfrak{F} = \left\{\operatorname{Re} z \le -\frac{1}{2}\right\}$ и дробно-линейной функции $\varphi(z) = (z-1)^{-1}$, получим, что функция

$$h(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} (z-1)^2\exp\left((z-1)^{-1}\right), & \text{если } z \in \mathbb{C} \text{ и } z \ne 1, \\ 0, & \text{если } z = 1, \end{cases}$$

коммутаторно липшицева в замкнутом единичном круге.

Это было доказано (другим способом) Э. В. Киссиным и В. С. Шульманом [7], чтобы дать ответ на один вопрос Дж. П. Уильямса [12].

Заметим, что если в качестве $\mathfrak{F}$ мы возьмём полуплоскость $\{\operatorname{Re} z \le 0\}$, то получим, что функция h коммутаторно липшицева в полуплоскости $\{\operatorname{Re} z \le 1\}$. Если в качестве $\mathfrak{F}$ мы возьмём полуплоскость $\{\operatorname{Re} z \le a\}$, где $a > 0$, то получим, что функция h коммутаторно липшицева в каждом кольце вида $\{|z - 1 - \varepsilon| \ge \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$.

Пример 2. Теорема 1.1 статьи Э. В. Киссина и В. С. Шульмана [9] содержит в себе следующее равенство:

$$\mathrm{CL}(\overline{\mathbb{D}}) = \{f \in C_A : f|\mathbb{T} \in \mathrm{OL}(\mathbb{T})\}, \tag{7.3}$$

где C_A обозначает диск-алгебру. Результаты нашей статьи позволяют “перенести” это равенство из круга в полуплоскость:

$$\mathrm{CL}(\overline{\mathbb{C}}_+) = \{f \in \mathcal{A}_1 : f|\mathbb{R} \in \mathrm{OL}(\mathbb{R})\}, \tag{7.4}$$

где $\mathcal{A}_1$ обозначает множество всех функций f, заданных и непрерывных в замкнутой верхней полуплоскости $\overline{\mathbb{C}}_+$, аналитических в открытой верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ и таких, что $\sup\limits_{z\in\mathbb{C}_+}(1+|z|)^{-1}|f(z)|<+\infty$.

Чтобы доказать равенство (7.4), достаточно убедиться в том, что выполняется включение $\{f\in\mathcal{A}_1 : f|\mathbb{R}\in\mathrm{OL}(\mathbb{R})\}\subset\mathrm{CL}(\overline{\mathbb{C}}_+)$, поскольку противоположное включение очевидно. Пусть $g\in\mathcal{A}_1$ и $g|\mathbb{R}\in\mathrm{OL}(\mathbb{R})$. Положим

$$f(z)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\begin{cases}\dfrac{(g\circ\varphi)(z)}{\varphi'}, & \text{если } |z|\le 1, z\ne -1,\\[2ex] 0, & \text{если } z=-1,\end{cases}$$

где $\varphi(z)=\kappa^{-1}(z)=i\dfrac{1-z}{1+z}$. Докажем, что $f\in C_A$. Для этого достаточно проверить только непрерывность функции f в точке -1. Имеем:

$$\lim_{z\to-1}|f(z)|=\frac{1}{2}\lim_{z\to-1}\left(|z+1|^2\left|g\left(i\frac{1-z}{1+z}\right)\right|\right)=0,$$

поскольку $|g(w)|\le c+c|w|$ при некотором $c>0$. В обозначениях теоремы 5.6 мы имеем: $X_1(f|\mathbb{T})=g|\mathbb{R}$. Следовательно, $f\in\mathrm{OL}_{-1}(\mathbb{T})$ в силу теоремы 5.6. Таким образом, $f\in\mathrm{CL}(\overline{\mathbb{D}})$ согласно равенству (7.3). Теперь из теоремы 7.6, применённой к $\mathfrak{F}=\overline{\mathbb{D}}$ и $\varphi=\kappa$, следует, что $g\in\mathrm{CL}(\overline{\mathbb{C}}_+)$.

Пусть теперь $\mathfrak{F}$ обозначает совершенное подмножество расширенной комплексной плоскости $\widehat{\mathbb{C}}$. Тогда мы можем определить пространство $(\mathrm{CL})'(\mathfrak{F})$, состоящее из производных (в комплексном смысле) функций класса $\mathrm{CL}(\mathfrak{F}\cap\mathbb{C})$, т. е. $(\mathrm{CL})'(\mathfrak{F})\stackrel{\mathrm{def}}{=}\{f' : f\in\mathrm{CL}(\mathfrak{F}\cap\mathbb{C})\}$. Положим

$$\|h\|_{(\mathrm{CL})'(\mathfrak{F})}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\inf\bigl\{\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F}\cap\mathbb{C})} : f'(z)=h(z)\quad\forall\ z\in\mathfrak{F}\bigr\}.$$

Ясно, что $(\mathrm{CL})'(\mathfrak{F})$ – банахово пространство.

Пусть φ – дробно-линейное преобразование. Мы собираемся рассмотреть вопрос о справедливости равенства

$$\bigl\{h\circ\varphi : h\in(\mathrm{CL})'(\mathfrak{F})\bigr\}=(\mathrm{CL})'(\varphi^{-1}(\mathfrak{F})). \tag{7.5}$$

Это равенство очевидным образом выполняется, если $\varphi\in\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$. Однако, вообще говоря, это равенство неверно. Например, если $\mathfrak{F}=\overline{\mathbb{D}}$ и $\varphi(z)=\frac{1}{z}$, то функция φ принадлежит пространству $\bigl\{h\circ\varphi : h\in$

$(\mathrm{CL})'(\mathfrak{F})\}$, но не принадлежит пространству $(\mathrm{CL})'(\varphi^{-1}(\mathfrak{F}))$. Это связано с тем, что множество $\varphi^{-1}(\mathfrak{F}) \cap \mathbb{C}$ в данном случае не является односвязным.

Автору неизвестно, справедливо ли равенство (7.5) при условии, что оба множества $\mathfrak{F} \cap \mathbb{C}$ и $\varphi^{-1}(\mathfrak{F}) \cap \mathbb{C}$ односвязны. Мы докажем это равенство при условии, что оба множества $\mathfrak{F} \cap \mathbb{C}$ и $\varphi^{-1}(\mathfrak{F}) \cap \mathbb{C}$ выпуклы.

Докажем сначала следующее обобщение теоремы 3.4.

Теорема 7.8. *Пусть f – непрерывная функция, заданная на совершенном подмножестве $\mathfrak{F}$ расширенной комплексной плоскости $\widehat{\mathbb{C}}$. Предположим, что $\mathfrak{F} \cap \mathbb{C}$ – звёздное множество с центром в точке a. Тогда если функция $(z-a)f(z)$ принадлежит пространству $\mathrm{CL}(\mathfrak{F} \cap \mathbb{C})$, то $f \in (\mathrm{CL})'(\mathfrak{F})$ и $\|f\|_{(\mathrm{CL})'(\mathfrak{F})} \le \|(z-a)f(z)\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F}\cap\mathbb{C})}$.*

Доказательство. Можно считать, что $a = 0$. Пусть $[0, z]$ обозначает отрезок, соединяющий точку 0 с точкой $z \in \mathfrak{F} \cap \mathbb{C}$. Положим

$$F(z) = \int\limits_{[0,z]} f(\zeta)\, d\zeta = \int\limits_0^1 z f(tz)\, dt.$$

Заметим, что $zf(tz) \in \mathrm{CL}(t^{-1}(\mathfrak{F} \cap \mathbb{C}))$ и

$$\|zf(tz)\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F}\cap\mathbb{C})} \le \|zf(tz)\|_{\mathrm{CL}(t^{-1}(\mathfrak{F}\cap\mathbb{C}))} = \|zf(z)\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F}\cap\mathbb{C})}$$

при всех $t \in (0, 1]$. Таким образом, из леммы 7.3 следует, что $F \in \mathrm{CL}(\mathfrak{F} \cap \mathbb{C})$ и $\|F\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F}\cap\mathbb{C})} \le \|zf(z)\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F}\cap\mathbb{C})}$. Остаётся убедиться в том, что $F'(z) = f(z)$ при всех $z \in \mathfrak{F}$. Это очевидно при $z = 0$, а также при $z = \infty$, если $\infty \in \mathfrak{F}$. Пусть теперь $z = z_0$, $z_0 \in \mathfrak{F}$, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Функция F дифференцируема как функция комплексной переменной всюду на $\mathfrak{F} \cap \mathbb{C}$, поскольку $F \in \mathrm{CL}(\mathfrak{F})$ и все точки множества $\mathfrak{F}$ предельные. Таким образом, чтобы доказать равенство $F'(z_0) = f(z_0)$, достаточно заметить, что

$$F'(z_0) = \lim_{s\to 0} \frac{F((1+s)z_0) - F(z_0)}{sz_0} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \int\limits_1^{1+s} f(tz_0)\, dt = f(z_0).$$

$\square$

Теорема 7.9. *Пусть $f \in \mathrm{CL}(\mathfrak{F} \cap \mathbb{C})$, где $\mathfrak{F}$ – совершенное подмножество расширенной комплексной плоскости $\widehat{\mathbb{C}}$. Предположим, что*

$\mathfrak{F}\cap\mathbb{C}$ – звёздное множество с центром в точке a. Тогда функция $\dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}$ принадлежит пространству $(\mathrm{CL})'(\mathfrak{F})$ и

$$\left\|\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\right\|_{(\mathrm{CL})'(\mathfrak{F})}\le\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F}\cap\mathbb{C})}.$$

Доказательство. Результат мгновенно следует из теоремы 7.8. □

Теорема 7.10. *Пусть $f\in\mathrm{CL}(\mathfrak{F}\cap\mathbb{C})$, где $\mathfrak{F}$ – совершенное подмножество расширенной комплексной плоскости $\widehat{\mathbb{C}}$. Предположим, что множество $\mathfrak{F}\cap\mathbb{C}$ выпукло. Тогда функция $\dfrac{f(z)}{z-a}$ принадлежит пространству $(\mathrm{CL})'(\mathfrak{F})$ и*

$$\left\|\frac{f(z)}{z-a}\right\|_{(\mathrm{CL})'(\mathfrak{F})}\le 2\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F}\cap\mathbb{C})}+\sup_{z\in\mathfrak{F}\cap\mathbb{C}}\frac{|f(z)|}{|z-a|}$$

при всех $a\in\mathbb{C}\setminus\mathfrak{F}$.

Доказательство. Пусть b – точка множества $\mathfrak{F}$, ближайшая к a. Заметим, что

$$\frac{f(z)(z-b)}{z-a}=f(z)+(a-b)\frac{f(z)}{z-a}.$$

Используя теорему 7.8 и лемму 7.5, получим

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f(z)}{z-a}\right\|_{(\mathrm{CL})'(\mathfrak{F})}&\le\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F}\cap\mathbb{C})}\\&+|a-b|\left(\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F}\cap\mathbb{C})}+\sup_{\zeta\in\mathfrak{F}\cap\mathbb{C}}\frac{|f(z)|}{|z-a|}\right)(\mathrm{dist}(a,\mathfrak{F}))^{-1}\\&=2\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F}\cap\mathbb{C})}+\sup_{\zeta\in\mathfrak{F}\cap\mathbb{C}}\frac{|f(z)|}{|z-a|}.\end{aligned}$$

□

Теорема 7.11. *Пусть $\varphi\in\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})\setminus\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ и $h\in(\mathrm{CL})'(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F}$ – совершенное подмножество расширенной комплексной плоскости $\widehat{\mathbb{C}}$. Предположим, что множество $\varphi^{-1}(\mathfrak{F})\cap\mathbb{C}$ выпукло. Тогда $h\circ\varphi\in(\mathrm{CL})'(\varphi^{-1}(\mathfrak{F}))$ и $\|h\circ\varphi\|_{(\mathrm{CL})'(\varphi^{-1}(\mathfrak{F}))}\le 49\|h\|_{(\mathrm{CL})'(\mathfrak{F})}$.*

Доказательство. Пусть a – ближайшая к $\varphi(\infty)$ точка множества $\mathfrak{F}$. Возьмём функцию $f \in \mathrm{CL}(\mathfrak{F})$ такую, что $f' = h$ и $f(a) = 0$. Имеем:

$$h \circ \varphi = \left(\frac{f \circ \varphi}{\varphi'}\right)' + \frac{f \circ \varphi}{\varphi'} \cdot \frac{\varphi''}{\varphi'} = (T_\varphi f)' - \frac{2}{z - \varphi^{-1}(\infty)} T_\varphi f. \tag{7.6}$$

Докажем, что

$$\|T_\varphi f\|_{\mathrm{CL}(\varphi^{-1}(\mathfrak{F}) \cap \mathbb{C})} \le \begin{cases} 3\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F} \cap \mathbb{C})}, & \text{если } \varphi(\infty) \in \mathfrak{F}, \\ 9\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F} \cap \mathbb{C})}, & \text{если } \varphi(\infty) \notin \mathfrak{F}. \end{cases} \tag{7.7}$$

Если $\varphi(\infty) \in \mathfrak{F}$, то $\|T_\varphi f\|_{\mathrm{CL}(\varphi^{-1}(\mathfrak{F}) \cap \mathbb{C})} \le 3\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F} \cap \mathbb{C})}$ в силу теоремы 7.6. Если $\varphi(\infty) \notin \mathfrak{F}$, то, применяя следствие 7.7, получаем

$$\begin{aligned} \|T_\varphi f\|_{\mathrm{CL}(\varphi^{-1}(\mathfrak{F}) \cap \mathbb{C})} &\le 3 \left(\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F} \cap \mathbb{C})} + \sup_{z \in \mathfrak{F}} \frac{|f(z) - f(a)|}{|z - \varphi(\infty)|} \right) \\ &\le \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F} \cap \mathbb{C})} \left(3 + 3 \sup_{z \in \mathfrak{F}} \frac{|z - a|}{|z - \varphi(\infty)|} \right) \le 9\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F} \cap \mathbb{C})}. \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $\infty \in \mathfrak{F}$. Тогда из тождества (7.6), неравенства (7.7) и теоремы 7.9 следует, что

$$\|h \circ \varphi\|_{(\mathrm{CL})'(\varphi^{-1}(\mathfrak{F}))} \le \begin{cases} 9\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F} \cap \mathbb{C})}, & \text{если } \varphi(\infty) \in \mathfrak{F} \text{ и } \infty \in \mathfrak{F}, \\ 27\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F} \cap \mathbb{C})}, & \text{если } \varphi(\infty) \notin \mathfrak{F} \text{ и } \infty \in \mathfrak{F}. \end{cases}$$

Чтобы разобраться со случаем, когда $\infty \notin \mathfrak{F}$, нам понадобится ещё следующее неравенство:

$$\sup_{z \in \varphi^{-1}(\mathfrak{F}) \cap \mathbb{C}} \frac{|(T_\varphi f)(z)|}{|z - \varphi^{-1}(\infty)|} \le \begin{cases} \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F} \cap \mathbb{C})}, & \text{если } \varphi(\infty) \in \mathfrak{F}, \\ 2\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F} \cap \mathbb{C})}, & \text{если } \varphi(\infty) \notin \mathfrak{F}. \end{cases} \tag{7.8}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{|(T_\varphi f)(z)|}{|z - \varphi^{-1}(\infty)|} &= \frac{|f(\varphi(z)) - f(a)|}{|\varphi'(z)| \cdot |z - \varphi^{-1}(\infty)|} \\ &\le \frac{|\varphi(z) - a|}{|\varphi'(z)| \cdot |z - \varphi^{-1}(\infty)|} \|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F} \cap \mathbb{C})}. \end{aligned}$$

Прямые вычисления показывают, что

$$\frac{|\varphi(z) - \varphi(\infty)|}{|\varphi'(z)| \cdot |z - \varphi^{-1}(\infty)|} = 1$$

при всех $z \in \mathbb{C}$. Это доказывает нужное нам неравенство при $a = \varphi(\infty)$, т.е. в случае, когда $\varphi(\infty) \in \mathfrak{F}$. Если $\varphi(\infty) \notin \mathfrak{F}$, то

$$\frac{|\varphi(z) - a|}{|\varphi'(z)| \cdot |z - \varphi^{-1}(\infty)|} \le \frac{|\varphi(z) - \varphi(\infty)| + |\varphi(\infty) - a|}{|\varphi'(z)| \cdot |z - \varphi^{-1}(\infty)|} \le 2\frac{|\varphi(z) - \varphi(\infty)|}{|\varphi'(z)| \cdot |z - \varphi^{-1}(\infty)|} = 2$$

при $z \in \varphi^{-1}(\mathfrak{F}) \cap \mathbb{C}$. Таким образом, в случае, когда $\infty \notin \mathfrak{F}$, из тождества (7.6), неравенства (7.7), теоремы 7.10 и неравенства (7.8) следует, что

$$\|h \circ \varphi\|_{(\mathrm{CL})'(\varphi^{-1}(\mathfrak{F}))} \le \begin{cases} 17\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F}\cap\mathbb{C})}, & \text{если } \varphi(\infty) \in \mathfrak{F} \text{ и } \infty \notin \mathfrak{F}, \\ 49\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F}\cap\mathbb{C})}, & \text{если } \varphi(\infty) \notin \mathfrak{F} \text{ и } \infty \notin \mathfrak{F}. \end{cases}$$

$\square$

Из теоремы 7.11 мгновенно вытекает следующий результат.

Теорема 7.12. *Пусть $\varphi \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$, где $\mathfrak{F}$ – совершенное подмножество расширенной комплексной плоскости $\widehat{\mathbb{C}}$. Предположим, что множества $\mathfrak{F} \cap \mathbb{C}$ и $\varphi^{-1}(\mathfrak{F}) \cap \mathbb{C}$ выпуклы. Тогда для любой функции h, заданной на $\mathfrak{F}$, включение $h \circ \varphi \in (\mathrm{CL})'(\varphi^{-1}(\mathfrak{F}))$ имеет место в том и только в том случае, когда $h \in (\mathrm{CL})'(\mathfrak{F})$. Кроме того,* $\frac{1}{49}\|h\|_{(\mathrm{CL})'(\mathfrak{F})} \le \|h \circ \varphi\|_{(\mathrm{CL})'(\varphi^{-1}(\mathfrak{F}))} \le 49\|h\|_{(\mathrm{CL})'(\mathfrak{F})}$.

Литература

1. A. B. Aleksandrov, V. V. Peller, *Functions of perturbed unbounded self-adjoint operators. Operator Bernstein type inequalities.* — Indiana Univ. Math. J. **59:4** (2010), 1451–1490.
2. A. B. Aleksandrov, V. V. Peller, *Estimates of operator moduli of continuity.* — J. Funct. Anal. **261:10** (2011), 2741–2796.
3. A. B. Aleksandrov, V. V. Peller, *Operator and commutator moduli of continuity for normal operators.* Proc. London Math. Soc. (в печати).
4. К. Иосида, *Функциональный анализ.* Мир, М., 1967.
5. B. E. Johnson, J. P. Williams, *The range of a normal derivation.* — Pacific J. Math. **58** (1975), 105–122.
6. H. Kamowitz, *On operators whose spectrum lies on a circle or a line.* — Pacific J. Math. **20** (1967), 65–68.
7. E. Kissin, V. S. Shulman, *On a problem of J. P. Williams.* – Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 3605–3608.

8. E. Kissin, V. S. Shulman, *Classes of operator-smooth functions. I. Operator-Lipschitz functions.* — Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **48** (2005), 151–173.
9. E. Kissin, V. S. Shulman, *On fully operator Lipschitz functions.* — J. Funct. Anal. **253** (2007), 711–728.
10. E. Kissin, V. S. Shulman, L. B. Turowska, *Extension of operator Lipschitz and commutator bounded functions. The extended field of operator theory.* — In: Oper. Theory Adv. Appl. **171**, Birkhäuser, Basel (2007), pp. 225–244.
11. И. М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.* М., Мир, 1973.
12. J. P. Williams, *Derivation ranges: open problems.* — Topics in Modern Operator Theory, (Timisoara/Herculane, 1980), pp. 319–328, Operator Theory: Adv. Appl., 2, Birkhäuser, Basel-Boston, MA, 1981.

Aleksandrov A. B. Operator Lipschitz functions and linear fractional transformations.

It is known that the function $t^2 \sin \frac{1}{t}$ is an operator Lipschitz function on the real line $\mathbb{R}$. We prove that the function sin can be replaced by any operator Lipschitz function f with $f(0)=0$. In other words, for every operator Lipschitz function f the function $t^2 f(\frac{1}{t})$ is also operator Lipschitz if $f(0)=0$. The function f can be defined on an arbitrary closed subset of the complex plane $\mathbb{C}$. Moreover, the linear fractional transformation $\frac{1}{t}$ can be replaced by every linear fractional transformation φ. In this case, we assert that the function $\dfrac{f\circ\varphi}{\varphi'}$ is operator Lipschitz for every operator Lipschitz function f provided $f(\varphi(\infty))=0$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: alex@pdmi.ras.ru

Поступило 23 апреля 2012 г.