Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 400, 2012 г.

В. И. Янчевский

ПРИВЕДЕННЫЕ ГРУППЫ УАЙТХЕДА И ПРОБЛЕМА СОПРЯЖЁННОСТИ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ УНИТАРНЫХ ГРУПП АНИЗОТРОПНЫХ ЭРМИТОВЫХ ФОРМ

§1. Введение

Пусть k – поле. В теории линейных алгебраических групп многие важные структурные проблемы (в частности, проблема нормального строения), сводятся к проблемам о группах $G(k)$ k-рациональных точек односвязных простых k-определенных групп G. С каждой такой группой можно связать абелеву группу – приведенную группу Уайтхеда. Приведенные группы Уайтхеда играют ключевую роль при изучении групп $G(k)$. Наиболее трудными для изучения (по крайней мере для групп классического типа) являются группы типа A_r (см., к примеру, [10, 11]). Исходя из явного представления групп $G(k)$, задача описания приведенных групп Уайтхеда сводится к описанию некоторых факторов групп обратимых элементов простых ассоциативных конечномерных k-алгебр. В самом деле, группы $G(k)$ описываются следующим образом.

Пусть $A = M_m(D)$ – полная матричная алгебра степени m над конечномерной ассоциативной центральной k-алгеброй с делением D индекса d, $\mathrm{Nrd}_A : A \longrightarrow k$ – отображение приведенной нормы алгебры A, $\mathrm{GL}(m, D)$ – группа обратимых элементов алгебры A, и

$$\mathrm{SL}(m, D) = \{g \in \mathrm{GL}(m, D) \mid \mathrm{Nrd}_A(g) = 1\}.$$

Известно, что группа $\mathrm{SL}(m, D)$ (см., например, [25]) отождествляется с группой k-рациональных точек односвязной группы (которую мы будем обозначать через $\mathbf{SL}(m, D)$), являющейся внутренней формой

Ключевые слова: анизотропные и изотропные алгебраические группы, приведенные группы Уайтхеда анизотропных и изотропных алгебраических групп, эрмитовы формы, специальные унитарные группы эрмитовых форм, группы рациональных точек анизотропных специальных унитарных групп эрмитовых форм.

Работы выполнена в рамках совместного проекта, поддержаного Белорусским республиканским и Российским фондами фундаментальных исследований, проект No. Ф10Р-110.

типа ${}^1A_{n-1}$ (здесь $n = md$). Приведенные группы Уайтхеда $\mathrm{Wh}(\mathbf{SL}(m,D)(k))$ групп $\mathrm{SL}(m,D)$ определяются в этом случае так.

$$\mathrm{Wh}(\mathbf{SL}(m,D)(k)) = \mathrm{SL}(m,D)/[\mathrm{GL}(m,D),\mathrm{GL}(m,D)],$$

где $[\mathrm{GL}(m,D),\mathrm{GL}(m,D)]$ – коммутант группы $\mathrm{GL}(m,D)$.

Замечание 1. Обычно группа $\mathrm{Wh}(\mathbf{SL}(m,D)(k))$ обозначается через $SK_1(M_m(D))$.

Для описания групп k-рациональных точек в случае внешних форм ${}^2A_{n-1}$ следует рассматривать специальные унитарные группы подходящих эрмитовых форм.

Более точно, пусть K/k – расширение Галуа полей степени 2, $A = M_m(D)$ – ассоциативная конечномерная простая центральная K-алгебра, где $M_m(D)$ – матричная алгебра степени m над D – K-алгеброй с делением индекса d. Предположим, что алгебра A обладает K/k-инволюцией τ (т.е. k совпадает с полем инвариантов ограничения τ на K). Известно тогда, что A обладает также K/k-инволюцией δ такой, что $D^\delta = D$ и $\|d_{ij}\|^\delta_{i,j=1,\ldots,m} = \|d^\delta_{ji}\|_{i,j=1,\ldots,m}$ (здесь $\|d_{ij}\|$ – $m\times m$ матрица над D, а элемент $d_{ij}\in D$ стоит в i-ой строке и j-ом столбце). Поскольку τ и δ имеют одинаковое ограничение на K, должна существовать матрица F такая, что $F^\delta = F$ и $a^\tau = F^{-1}a^\delta F$ для любого $a\in A$.

Для правого m-мерного векторного пространства V над D и его базиса $e_1,\ldots,e_m$ рассмотрим эрмитову на V форму f с матрицей F (относительно этого базиса) и положим:

$$\begin{aligned}\mathrm{U}(m,D,f) &= \{u\in\mathrm{GL}(m,D) \mid u^\delta F u = F\},\\ \mathrm{SU}(m,D,f) &= \{u\in\mathrm{U}(m,D,f) \mid \mathrm{Nrd}_A(u) = 1\}.\end{aligned}$$

Обе группы $\mathrm{U}(m,D,f)$ и $\mathrm{SU}(m,D,f)$ хорошо известным способом (снова см. [25]) отождествляются с группами k-рациональных точек соответствующих k-определенных алгебраических групп: унитарной $\mathbf{U}(m,D,f)$ и специальной унитарной $\mathbf{SU}(m,D,f)$ (напомним, что $\mathbf{U}(m,D,f)$) редуктивна, а $\mathbf{SU}(m,D,f)$ является ее полупростой частью). В частности, группа $\mathbf{SU}(m,D,f)$ является внешней формой группы типа ${}^2A_{n-1}$.

Группы $\mathrm{SL}(m,D)$ и $\mathrm{SU}(m,D,f)$ задают в силу предложений 17 и 18 из [25] все группы k-рациональных точек односвязных групп типа A_{n-1}.

Замечание 2. Определённые выше приведенные группы Уайтхеда отличаются, вообще говоря, от групп Уайтхеда, рассматривавшихся в [5, 14], но часто с ними совпадают (например, в изотропной ситуации).

В случае внешних форм приведенные группы Уайтхеда определяются следующим образом.

$$\mathrm{Wh}(\mathbf{SU}(m,D,f)(k)) = \mathrm{SU}(m,D,f)/[\mathrm{U}(m,D,f),\mathrm{U}(m,D,f)],$$

где $[\mathrm{U}(m,D,f),\mathrm{U}(m,D,f)]$ – коммутант группы $\mathrm{U}(m,D,f)$.

Заметим, что существует другая интерпретация групп k-рациональных точек внешних форм, которая возникает следующим образом.

Для произвольной K/k-инволюции μ алгебры A определены унитарная и специальная унитарная группы пары (A,μ):

$$\mathrm{U}(A,\mu) = \{u \in A | u^\mu u = 1\},$$
$$\mathrm{SU}(A,\mu) = \{u \in \mathrm{U}(A,\mu) \mid \mathrm{Nrd}_A(u) = 1\}.$$

Отметим, что между унитарными (специальными унитарными) группами эрмитовых форм и унитарными (специальными унитарными) группами алгебр с инволюциями имеется простая связь.

Пусть F, как и выше, – матрица эрмитовой формы f. Для любого $a \in A$ положим $\Theta(a) = F^{-1}a^\delta F$. Тогда Θ – K/k-инволюция алгебры A и

$$\mathrm{U}(m,D,f) = U(A,\Theta),$$

$$\mathrm{SU}(m,D,f) = \mathrm{SU}(A,\Theta).$$

При изучении приведенных групп Уайтхеда внутренних форм важную роль играет следующее обстоятельство: они не зависят от m. Более точно, имеют место следующие изоморфизмы

$$\mathrm{SK}_1(M_m(D)) \cong \mathrm{SK}_1(D),$$

где $\mathrm{SK}_1(D) := \mathrm{SK}_1(M_1(D))$. Таким образом, вычисление групп $\mathrm{SK}_1(M_m(D))$ не зависит от того, являются ли группы $\mathrm{SL}(m,D)$ изотропными или анизотропными над k. Положение оказывается иным в случае внешних форм. В изотропной ситуации группы $\mathrm{Wh}(\mathrm{SU}(m,A,f)$ $(k))$ оказываются изоморфными группам $\mathrm{SUK}_1(A,\delta) := \Sigma'_\delta(A)/\Sigma_\delta(A)$, где $\Sigma'_\delta(A) := \{d \in A : \mathrm{Nrd}_A(d) \in k \setminus \{0\}\}$, $\Sigma_\delta(A)$ – подгруппа, порождённая неподвижными относительно δ элементами из $\mathrm{GL}(m,D)$.

Замечание 3. Ясно, что группа $\Sigma'_\delta(A)$ зависит лишь от действия инволюции на k, и потому, рассматривая K/k-инволюции, мы будем часто опускать индекс δ. То же самое верно и для групп $\Sigma_\delta(A)$ (см. [28]), и потому мы будем пользоваться обозначением $\Sigma(D)$.

Группы $\mathrm{SK}_1(A)$ и $\mathrm{SUK}_1(A,\delta)$ достаточно хорошо изучены (см. [2], [4–7], [9], [14–20], [22–26], [28–31]). Оказывается, что многие свойства групп $\mathrm{SK}_1(A)$ присущи также группам $\mathrm{SUK}_1(A,\delta)$. Напротив, в анизотропной ситуации группы $\mathrm{Wh}(\mathbf{SU}(m,D,f)(k))$ мало изучены и их свойства сильно отличаются от свойств групп $SK_1(A)$ и $\mathrm{SUK}_1(A,\delta)$. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство мы будем обозначать группы $\mathrm{Wh}(\mathbf{SU}(m,D,f)(k))$ в анизотропной ситуации через $\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(A,\delta)$.

Основной объект наших рассмотрений – группы k-рациональных точек односвязных k-групп, относящихся к внешним формам типа ${}^2A_{n-1}$ и группы $\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(A,\delta)$.

Замечание 4. Ниже мы ограничиваемся наиболее интересным случаем некоммутативных D (по поводу случая $d=1$, k – поле алгебраических чисел см. [8]).

Длительное время считалось, что группы $\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(A,\delta)$ обладают свойствами, схожими со свойствами групп $\mathrm{SK}_1(A)$ и $\mathrm{SUK}_1(A,\delta)$ (по крайней мере в случае специальных полей k). Так, например, в [25] для глобальных полей k обсуждалась проблема тривиальности групп $\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(D,\delta)$ как один из начальных шагов для получения результатов о нормальном строении групп $\mathrm{SU}(1,D,\delta)$. Отметим, что соответствующие группы $\mathrm{SK}_1(D)$ и $\mathrm{SUK}_1(D,\delta)$ в этом случае тривиальны (см, [17, 26]). Однако оказалось, что положение на самом деле более сложное. Вначале Б. Сури и Б. А. Сетураман в [12] показали, что для полей рациональных функций от одной переменной над подходящими циклотомическими расширениями $\mathbb{Q}$ и специальных символ-алгебр произвольных степеней $n>2$ группы $\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(D,\delta)$ могут быть даже бесконечными, а затем Б. Сури в [13] вычислил группы $\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(D,\delta)$ для кватернионных алгебр D с делением над глобальными полями K, установив нетривиальность этих групп (по поводу альтернативного метода вычислений см. [27]). Заметим, что в случае глобальных полей K эти группы всегда конечны.

Никаких общих результатов о нетривиальности групп $\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(A,\delta)$, не зависящих от структуры A, до недавнего времени получено не было. Нашей целью является установление зависимости нетривиальности групп $\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(A,\delta)$ в случае “достаточно больших” групп $\mathrm{SUK}_1(A,\delta)$.

Помимо этого, мы устанавливаем критерий сопряжённости групп $\mathrm{U}(1, D, f)$ ($\mathrm{SU}(1, D, f)$) при произвольной кватернионной алгебре с делением D в терминах её мультипликативной группы. В заключение дается полное решение проблемы сопряжённости в случае глобальных полей k. Основные результаты, приведенные ниже, были анонсированы в [32] в чуть более слабой форме. Приведём формулировки этих результатов.

Первый результат указывает на связь проблем нетривиальности групп $\mathrm{SUK}_1(A, \delta)$ и $\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(A, \mu)$ для K/k-инволюций δ и μ. Связь эта состоит в следующем. Как установлено ещё в [28] для любых двух таких инволюций δ и μ группы $\mathrm{SUK}_1(A, \delta)$, $\mathrm{SUK}_1(A, \mu)$ совпадают. Группы же $\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(A, \delta)$ зависят, вообще говоря, от δ. Однако справедливо следующее утверждение, указывающее на зависимость нетривиальности $\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(A, \delta)$ от нетривиальности $\mathrm{SUK}_1(A, \delta)$.

Теорема 1.1. *Существует эпиморфизм*

$$\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(A, \delta) \longrightarrow \mathrm{SUK}_1(A, \delta).$$

Теорема 1 может быть доказана несколькими способами. Первый использует глубокие свойства алгебраических многообразий и связан с понятием R-эквивалентности на алгебраических многообразиях, важным бирациональным инвариантом этих многообразий, введённым Ю. И. Маниным [21]. Именно, пусть X – неприводимое алгебраическое многообразие над полем k с непустым множеством k-рациональных точек $X(k)$. Тогда две точки $x, y \in X(k)$ называются строго R-эквивалентными, если существует рациональное k-отображение f проективной прямой в X такое, что для подходящих k-точек a, b справедливо $f(a) = x$, $f(b) = y$. Две точки называются R-эквивалентными, если существует конечная цепочка $x = x_1, x_2, \ldots, x_n = y$ такая, что точки x_i и x_{i+1} строго R-эквивалентны, $1 \leqslant i \leqslant n-1$. В случае линейных алгебраических групп изучение этого понятия было начато Кольё-Теленом и Сансюком [3]. Заметим, что множество классов R-эквивалентности обладает естественной групповой структурой. Для односвязных групп, относящихся к внутренним формам типа ${}^1A_{n-1}$, изоморфность групп классов R-эквивалентности приведенным группам Уайтхеда $\mathrm{SK}_1(D)$ была установлена В. Е. Воскресенским (см. [19]). Для изотропных групп, относящихся к внешним формам типа ${}^2A_{n-1}$, изоморфность соответствующих групп классов R-эквивалентности приведенным унитарным группами Уайтхеда

$\mathrm{SUK}_1(A,\delta)$ была анонсирована автором в [31] (см. замечание на стр. 583), а доказательство этого факта было опубликовано в [22]. Наконец, в [2] А. С. Меркурьев и В. И. Черноусов, используя другие соображения, рассмотрели общий случай, из которого вытекает, что и в анизотропной ситуации группы классов R-эквивалентности также изоморфны приведенным группам Уайтхеда $\mathrm{SUK}_1(A,\delta)$. Пользуясь этим, можно быстро получить доказательство теоремы 1 (другое доказательство, основанное на прямых вычислениях в алгебре D, содержится в параграфе 1).

Наконец, из теоремы 1 вытекает следствие, решающее проблему нетривиальности группы $\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(A,\delta)$.

Следствие 1.1. *Нетривиальность* $\mathrm{SUK}_1(A,\delta)$ *влечёт нетривиальность групп* $\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(A,\delta)$.

Так как группы $\mathrm{U}(1,D,\delta)$ и $\mathrm{SU}(1,D,\delta)$ зависят от инволюций δ, то естественно возникает проблема сопряжённости таких подгрупп в мультипликативной группе $GL(1,D)$ алгебры D. Второй результат описывает критерий сопряжённости групп для кватернионных алгебр с делением (для простоты мы ограничиваемся случаем характеристики k, отличной от 2).

Пусть Q – кватернионная K-алгебра с делением с K/k-инволюцией τ,

$$S_\tau(Q) := \{s \in Q : s^\tau = s\},$$

$\mathrm{Inv}_{K/k}Q$ – множество K/k-инволюций алгебры Q. В этих обозначениях справедлива

Теорема 1.2. *Пусть* $\tau,\mu \in \mathrm{Inv}_{K/k}Q$, $\mu = \tau i_s$, *где* $s \in S_\tau(Q)\setminus\{0\}$, i_s *– внутренний автоморфизм* Q, *заданный сопряжением с помощью* s. *Тогда*

(i) *группы* $\mathrm{U}(1,Q,\tau)$, $\mathrm{U}(1,Q,\mu)$ *сопряжены в* $\mathrm{GL}(1,Q)$ *в том и только в том случае, когда* $\mathrm{Nrd}_Q(s) \in N_{K/k}(\mathrm{GL}(1,K))$, *где* $N_{K/k}$ *– гомоморфизм нормы расширения полей* K/k, $\mathrm{GL}(1,K)$ *– мультипликативная группа* K*;*

(ii) *группы* $\mathrm{SU}(1,Q,\tau)$, $\mathrm{SU}(1,Q,\mu)$ *сопряжены в* $\mathrm{GL}(1,Q)$ *в том и только в том случае, когда* $\mathrm{Nrd}_Q(s) \in N_{K/k}(\mathrm{GL}(1,K))$.

Следствие 1.2. *В обозначениях теоремы* 2 *сопряжённость групп* $\mathrm{SU}(1,Q,\tau)$, $\mathrm{SU}(1,Q,\mu)$ *в* $\mathrm{GL}(1,Q)$ *влечёт изоморфизм групп* $\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(Q,\tau)$, $\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(Q,\mu)$.

Оказывается, что в случае глобальных полей использование локальных инвариантов алгебр Q позволяет получить окончательное решение проблемы сопряжённости, которое и приводится в конце статьи.

В заключение автор выражает благодарность А. В. Прокопчуку и С. В. Тихонову за оказанную помощь при подготовке статьи к печати.

§2. Доказательство теоремы 1.1

Для доказательства теоремы 1.1 нам потребуются следующие обозначения.

Пусть $\mathbf{G}$ – алгебраическая группа, определенная над полем k, $R\mathbf{G}(k)$ – множество R-тривиальных элементов в $\mathbf{G}(k)$. Известно, что $R\mathbf{H}(k)$ – нормальная подгруппа в $R\mathbf{G}(k)$ для нормальной (замкнутой) подгруппы $\mathbf{H}$ в $\mathbf{G}$ (см. [2]).

Доказательство теоремы 1.1. Пусть

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}(m, D, f) \quad \text{и} \quad \mathbf{H} = \mathbf{SU}(m, D, f).$$

Так как группа $\mathbf{G}$ рациональна над k, то $\mathbf{G}(k) = R(\mathbf{G}(k))$ и, значит,

$$[R(\mathbf{G}(k)), R(\mathbf{G}(k))] = [\mathbf{G}(k), \mathbf{G}(k)]. \tag{1}$$

Ввиду леммы 1.2 (2) из [2] из абелевости $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ следует абелевость $R\mathbf{G}(k)/R(\mathbf{H}(k))$ и потому

$$[R(\mathbf{G}(k)), R(\mathbf{G}(k))] \subseteq R(\mathbf{H}(k)). \tag{2}$$

Теперь уже ясно, что естественный эпиморфизм $\mathbf{H}(k)$ на $\mathbf{H}(k)/R(\mathbf{H}(k))$ разлагается ввиду (1) и (2) в композицию эпиморфизмов

$$\mathbf{H}(k) \to \mathbf{H}(k)/[\mathbf{G}(k), \mathbf{G}(k)] \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbf{H}(k)/[R(\mathbf{G}(k)), R(\mathbf{G}(k))] \xrightarrow{\varphi} \mathbf{H}(k)/R(H(k)),$$

где id в силу (1) – тождественный изоморфизм. Остаётся заметить, что ввиду (1) $\mathbf{H}(k)/[R(\mathbf{G}(k)), R(\mathbf{G}(k))] = \mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(A, \delta)$, а

$$\mathbf{H}(k)/R(\mathbf{H}(k)) \cong \mathrm{SUK}_1(D, \delta)$$

ввиду теоремы 5.4 [2]. □

Как уже отмечалось во введении, за коротким доказательством предыдущей теоремы скрывается использование глубоких свойств, установление которых опирается на большой арсенал применяемых при этом средств. По некоторым соображениям в рассматриваемой ситуации, хотелось бы иметь более прямое доказательство предыдущей теоремы. Ниже мы приводим такое рассуждение для алгебр с делением A. Хотя утверждение, полученное в результате, имеет несколько более слабую форму, оба результата совпадают в случае, когда индекс исходной алгебры не делится на 4.

Теорема $1'$. *Пусть A – центральная K-алгебра с делением и K/k-инволюцией δ. Существует сюръективный гомоморфизм группы $\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(A,\delta)$ в группу*

$$\mathrm{SUK}_1(A,\delta)/{}_2\,\mathrm{SUK}_1(A,\delta),$$

где ${}_2\,\mathrm{SUK}_1(A,\delta)$ – подгруппа 2-кручения группы $\mathrm{SUK}_1(A,\delta)$.

Для доказательства этой теоремы нам потребуются следующие вспомогательные обозначения и утверждения.

Как и выше, пусть $S_\delta(A) := \{s \in A : s^\delta = s\}$, $S_\delta(A)^* := \{s \in A \setminus \{0\} : s^\delta = s\}$.

Положим также $K_\delta(A) := \{s \in A : s^\delta = -s\}$, $K_\delta(A)^* := \{s \in A \setminus \{0\} : s^\delta = -s\}$.

Лемма 2.1. *Пусть $b \in \Sigma'(A)$. Тогда k-линейное отображение $\varphi_b : S_\delta(A) \longrightarrow S_\delta(A)$, задаваемое формулой $\varphi_b(s) = bs + sb^\delta$, либо является k-автоморфизмом пространства $S_\delta(A)$, либо $bs \in K_\delta(A)^*$ для некоторого $s \in S_\delta(A)^*$.*

Доказательство. Пусть φ_b – не k-автоморфизм и $\varphi_b(s) = 0$ для подходящего $s \neq 0$. Тогда $bs + sb^\delta = 0$, а потому $bs = -sb^\delta = -(bs)^\delta$, что и требовалось. □

Лемма 2.2. *Пусть $b \in \Sigma'(A)$. Тогда $b^{-1+\delta} \in \Sigma(A)$, если $b \in K_\delta(A)$, и $b^{-1+\delta} \in SU(1, A, \delta i_{(b+b^\delta)^{-1}})$, если $b \notin K_\delta(A)$.*

Доказательство. Пусть $b \in K_\delta(A)$. Тогда $b^{-1+\delta} = b^{-1}(-b) = -1$, и потому $b^{-1+\delta} \in \Sigma(A)$. Если $b^\delta \neq -b$, то положив $b^\delta = bz$ и применив к обеим частям δ, получим $b = z^\delta b$, подставив выражение b из последнего равенства в предыдущее, будем иметь $b^\delta = z^\delta b^\delta z$. Снова применим к обеим частям δ. Тогда равенство $b = z^\delta bz$, сложенное с предыдущим, даёт $b + b^\delta = z^\delta(b + b^\delta)z$, что влечёт $z^{\delta i_{(b+b^\delta)^{-1}}} = z^{-1}$. Лемма доказана. □

Лемма 2.3. *Пусть $\tau, \mu \in \mathrm{Inv}_{K/k}(A)$. Тогда*

$$\mathrm{SU}(A,\tau)\Sigma(A) = \mathrm{SU}(A,\mu)\Sigma(A).$$

Доказательство. Покажем, что $\mathrm{SU}(A,\tau)\subset \mathrm{SU}(A,\mu)\Sigma(A)$. Пусть $\mu = \tau i_t$, $t\in S_\tau(A)^*$. Для произвольного элемента $u\in \mathrm{SU}(A,\tau)$ пусть $b\in K(u)$ такой, что $u=b^{-1+\tau}$. Предположим, что для любого $s\in S_\tau(A)^*$ $bs\notin K_\tau(A)$. Тогда отображение $\varphi_b : S_\tau(A)\longrightarrow S_\tau(A)$, определяемое формулой $\varphi_b(s)=bs+sb^\tau$, – автоморфизм k-линейного пространства $S_\tau(A)$ и, следовательно, найдётся $s'\in S_\tau(A)$ такой, что $\varphi_b(s')=t^{-1}$. Тогда ввиду предыдущей леммы $bs'\in SU(A,\mu)$, поэтому $b\in \mathrm{SU}(A,\mu)\Sigma(A)$, что влечёт и $u\in \mathrm{SU}(A,\mu)\Sigma(A)$, так как $b^{-1+\tau}\equiv b^{-1+\mu}(\mathrm{mod}\Sigma(A))$ и $b,b^\mu\in \mathrm{SU}(A,\mu)$. Если же $bs\in K_\tau(A)$, то $bs\in\Sigma(A)$, что влечёт $u\in\Sigma(A)$. Таким образом, $\mathrm{SU}(A,\tau)\Sigma(A)\subset \mathrm{SU}(A,\mu)\Sigma(A)$, а в силу симметричности вхождения τ и μ получаем обратное включение. Лемма доказана. □

Определим теперь гомоморфизм φ группы $\mathrm{SUK}_1(A,\tau)$ в группу $\mathrm{SU}(A,\tau)\Sigma(A)/\Sigma(A)$ следующим образом. Пусть $b\Sigma(A)\in \mathrm{SUK}_1(A,\tau)$. Положим $\varphi(b\Sigma(A)) = b^{-1+\tau}\Sigma(A)$. Гомоморфизм φ сюръективен, поскольку всякий элемент $u\in \mathrm{SU}(A,\tau)$ имеет вид $b^{-1+\tau}$ для подходящего $b\in K(u)\cap\Sigma'(A)$.

Лемма 2.4. *Ядро гомоморфизма φ имеет экспоненту равную* 2.

Доказательство. Действительно, пусть $b\in\Sigma'(A)$ и $\varphi(b\Sigma(A))=\Sigma(A)$ (т.е. $b^{-1+\tau}\in\Sigma(A)$). Так как $b^\tau = bz$, $z\in\Sigma(A)$, будем иметь $bb^\tau=b^2z$, и потому $b^2\in\Sigma(A)$, а значит $\varphi(b^2\Sigma(A))=\Sigma(A)$. Лемма доказана. □

Лемма 2.5. *Гомоморфизм φ может быть разложен в композицию*

$$\mathrm{SUK}_1(A,\tau)\xrightarrow{\pi}\mathrm{SUK}_1(A,\tau)/_2\,\mathrm{SUK}_1(A,\tau)\xrightarrow{\mu}\mathrm{SU}(A,\tau)\Sigma(A)/\Sigma(A),$$

где π – естественная проекция, а μ – инъективный гомоморфизм.

Доказательство. Разложимость φ в композицию π и подходящего гомоморфизма μ вытекает из предпоследней леммы. То, что μ – инъективный гомоморфизм, устанавливается так. Пусть $b\Sigma(A)_2\mathrm{SUK}_1(A,\tau)$ – нетривиальный элемент в $\mathrm{SUK}_1(A,\tau)/_2\,\mathrm{SUK}_1(A,\tau)$, тогда $(b\Sigma(A))^2\notin\Sigma(A)$, что влечёт $b^2\notin\Sigma(A)$. Если $b\Sigma(A)_2\,\mathrm{SUK}_1(A,\tau)$ принадлежит ядру гомоморфизма μ, тогда $\mu(b\Sigma(A))_2\,\mathrm{SUK}_1(A,\tau)=\varphi(b\Sigma(A))=b^{-1+\tau}\Sigma(A)$ $=\Sigma(A)$. Но $b^{-1+\tau}\notin\Sigma(A)$, поскольку $b^{-1+\tau}=b^{-2}bb^\tau$ и $b^2\notin\Sigma(A)$. Полученное противоречие влечет инъективность μ. □

Предложение 2.1. *Группа $SU(A,\tau)\Sigma(A)/\Sigma(A)$ изоморфна группе*

$$\mathrm{SUK}_1(A,\tau)/_2\,\mathrm{SUK}_1(A,\tau).$$

Доказательство. Гомоморфизм μ сюръективен ввиду сюръективности φ и инъективен ввиду предыдущей леммы. $\square$

Доказательство теоремы 1′. Ввиду предыдущего предложения для доказательства теоремы 1′ достаточно установить существование гомоморфизма группы $\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(A,\tau)$ на $\mathrm{SU}(A,\tau)\Sigma(A)/\Sigma(A)$. Это очевидно, поскольку имеем цепочку сюръективных гомоморфизмов

$$\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(A,\tau) \longrightarrow \mathrm{SU}(A,\tau)/(\Sigma(A)\cap \mathrm{SU}(A,\tau)) \longrightarrow \mathrm{SU}(A,\tau)\Sigma(A)/\Sigma(A).$$

Теорема доказана. $\square$

§3. Вопросы сопряжённости

Пусть Q – кватернионная алгебра с делением над K с K/k-инволюциями τ и μ. В этом параграфе мы устанавливаем критерий сопряжённости групп $\mathrm{SU}(1,Q,\tau)$ и $\mathrm{SU}(1,Q,\mu)$ для $\tau,\mu\in \mathrm{Inv}_{K/k}Q$. Для простоты будем предполагать, что $\mathrm{char}\, k\neq 2$ и $K=k(\sqrt{\alpha})$. В дальнейшем для краткости мы пишем $\mathrm{Nrd}(q)$ вместо $\mathrm{Nrd}_Q(q)$ для любого $q\in Q$.

Нам потребуются два технических утверждения.

Известно [1], что Q содержит кватернионную подалгебру T над k такую, что $Q=T\otimes_k K$ и ограничение τ на T является канонической инволюцией (т.е. такой, что единственными неподвижными относительно τ элементами T являются элементы из k). Положим, аналогично предыдущему,

$$K_\tau(T)=\{t\in T \mid t^\tau=-t\}.$$

В этих обозначениях справедлива

Лемма 3.1. (i) $S_\tau(Q)=k\oplus_k\{\sqrt{\alpha}K_\tau(T)\}$, *где* $\oplus_k$ *– прямая сумма* k*-линейных пространств;*

(ii) $Q=K\oplus_K K\langle\{\sqrt{\alpha}K_\tau(T)\}\rangle$, *где* $K\langle\{\sqrt{\alpha}K_\tau(T)\}\rangle$ *–* K*-линейная оболочка множества* $\{\sqrt{\alpha}K_\tau(T)\}$, *а* $\oplus_K$ *– прямая сумма* K*-линейных пространств.*

Доказательство. Пусть e_1,e_2,e_3 – k-базис $K_\tau(T)$. Тогда $1,e_1,e_2,e_3$ – k-базис T и потому (ввиду $Q=T\otimes_k K$) K-базис Q. Далее, 1, $\sqrt{\alpha}e_1$, $\sqrt{\alpha}e_2$, $\sqrt{\alpha}e_3$ – система, линейно независимая над K (а следовательно, и над k), состоящая из элементов, принадлежащих $S_\tau(Q)$, и, значит,

$$S_\tau(Q)=k\oplus_k\{\sqrt{\alpha}K_\tau(T)\}.$$

Из того, что набор 1, $\sqrt{\alpha}e_1$, $\sqrt{\alpha}e_2$, $\sqrt{\alpha}e_3$ является также K-базисом Q, немедленно следует, что

$$Q = K \oplus_K K\langle\{\sqrt{\alpha}K_\tau(T)\}\rangle.$$

Лемма доказана. □

Ввиду леммы 1(i) всякий элемент $s \in S_\tau(Q)$ может быть представлен в виде $k_s + \sqrt{\alpha}K_s$, где $k_s \in k$, $K_s \in K_\tau(Q)$. В этих обозначениях справедлива следующая

Лемма 3.2. *Пусть $s \notin k$ и $\mathrm{Nrd}\,(s) = u^2 - \alpha v^2$, $u, v \in k$. Тогда для того, чтобы s мог быть представлен в виде $s = agg^\tau$, $g \in Q$, $a \in k$ необходимо и достаточно, чтобы пересечение Z аффинной гиперповерхности*

$$(x_1^2 - \alpha x_2^2)x_5^2 - 2(x_1x_3 - x_2x_4\alpha)k_sx_5 + (x_3^2 - \alpha x_4^2)(k_s^2 - u^2 + \alpha v^2) = 0$$

и главного открытого множества $(x_1x_3 - x_2x_4\alpha)x_5 \neq 0$ содержало k-рациональную точку.

Доказательство. *Необходимость.* Ввиду леммы 1(ii) элемент g в представлении $s = agg^\tau$ может быть записан в виде $k_1 + k_2\sqrt{\alpha}K_g$, $k_1, k_2 \in K$, K_g – ненулевой элемент в $K_\tau(T)$ (поскольку $s \notin k$). Подставляя это выражение для g в равенство $s = agg^\tau$, приходим к равенствам

$$k_s = ak_1k_1^\tau + k_2k_2^\tau a\alpha K_g^2, \tag{1}$$

$$K_s = (k_1k_2^\tau + k_1^\tau k_2)aK_g. \tag{2}$$

В силу того, что $s \notin k$, заключаем, что

$$(k_1k_2^\tau + k_1^\tau k_2)a \neq 0. \tag{3}$$

Исключая K_g в равенстве (1) с помощью равенства (2) и учитывая, что $\mathrm{Nrd}(s) = k_s^2 - \alpha K_s^2$ и $\mathrm{Nrd}(s) = u^2 - \alpha v^2$, приходим к равенству

$$k_s = ak_1k_1^\tau + k_2k_2^\tau(k_1k_2^\tau + k_1^\tau k_2)^{-2}a^{-1}(k_s^2 - u^2 + \alpha v^2).$$

Умножение обеих частей последнего равенства на $(k_1k_2^\tau + k_1^\tau k_2)^2a$ приводит к равенству

$$k_s(k_1k_2^\tau + k_1^\tau k_2)^2a = a^2k_1k_1^\tau(k_1k_2^\tau + k_1^\tau k_2)^2 + k_2k_2^\tau(k_s^2 - u^2 + \alpha v^2),$$

которое эквивалентно

$$k_1k_1^\tau(k_1k_2^\tau + k_1^\tau k_2)^2a^2 - k_s(k_1k_2^\tau + k_1^\tau k_2)^2a + k_2k_2^\tau(k_s^2 - u^2 + \alpha v^2) = 0.$$

Пусть $k_1 = p + q\sqrt{\alpha}$, $k_2 = m + n\sqrt{\alpha}$. Тогда последнее равенство приобретает вид

$$4(p^2 - \alpha q^2)(pm - qn\alpha)^2 a^2 - 4k_s(pm - qn\alpha)^2 a + (m^2 - \alpha n^2)(k_s^2 - u^2 + \alpha v^2) = 0. \quad (4)$$

Из равенства (4) немедленно следует, что точка $A = (p, q, m, n, 2(pm - qn\alpha)a)$ является k-рациональной точкой, принадлежащей гиперповерхности

$$(x_1^2 - \alpha x_2^2)x_5^2 - 2(x_1x_3 - x_2x_4\alpha)k_s x_5 + (x_3^2 - \alpha x_4^2)(k_s^2 - u^2 + \alpha v^2) = 0.$$

Неравенство (3) преобразуется в условие

$$(pm - qn\alpha)a \neq 0,$$

которое означает принадлежность точки A главному открытому множеству, определяемому неравенством $(x_1x_3 - x_2x_4\alpha)x_5 \neq 0$.

Достаточность. Пусть $A = (p, q, m, n, r)$ – k-точка, принадлежащая пересечению гиперповерхности и главного открытого множества, упомянутых в формулировке леммы. Поскольку p, q, m и n таковы, что $(pm - qn\alpha) \neq 0$ и $r \neq 0$, то r может быть представлено в виде $r = 2(pm - qn\alpha)a$. Положим $g = (p + q\sqrt{\alpha}) + (m + n\sqrt{\alpha})\sqrt{\alpha} \cdot K_s/(pm - qn\alpha)a$. Исходя из наличия точки $A = (p, q, m, n, 2(pm - qn\alpha)a)$ и обращая рассуждения из доказательства необходимости, получаем, что указанные a и g приводят к представлению $s = agg^\tau$. Лемма доказана. □

Теорема 3.1. *Элемент $s \in S_\tau(Q)^*$ представим в виде $s = agg^\tau$, $a \in k$, $g \in Q$, тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Nrd}(s) \in N_{K/k}(\mathrm{GL}(1, K))$.

Доказательство. Пусть $s \in k$, тогда $\mathrm{Nrd}(s) \in N_{K/k}(\mathrm{GL}(1, K))$. Ясно, что $s = agg^\tau$ при $a = s$, $g = 1$. Обратно, пусть $s = agg^\tau$. Тогда $\mathrm{Nrd}(s) = s^2$, следовательно, лежит в $\mathrm{Nrd}(s) \in N_{K/k}(\mathrm{GL}(1, K))$.

Пусть $s \notin k$ и $s = agg^\tau$. Рассматривая приведенные нормы правой и левой частей последнего равенства, заключаем,

$$\mathrm{Nrd}(s) = a^2 \,\mathrm{Nrd}(g)\,\mathrm{Nrd}(g)^\tau \in N_{K/k}(\mathrm{GL}(1, K)).$$

Обратно, ввиду леммы 2, представимость s в виде agg^τ эквивалентна существованию k-рациональной точки у пересечения Z из леммы 2. В случае $v = 0$ искомой точкой будет точка $(1, 1, 1, 1, k_s + u)$, а при $v \neq 0$ – точка $(1, -v/(u + k_s), 1, 0, k_s + u)$. Заметим, что $u + k_s \neq 0$, поскольку в противном случае $v^2 = K_s^2$, чего не может быть, так как элемент K_s нецентрален. Теорема доказана. □

Целью этого параграфа является установление следующего критерия сопряжённости специальных унитарных (и унитарных) групп для различных K/k-инволюций. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2. *Пусть D – центральная K-алгебра с делением,* char $D \neq 2$, *и либо* char $K = 0$, *либо* char K *взаимно проста с индексом d. Пусть, кроме того, D обладает K/k-инволюцией τ. Тогда для произвольной K/k-инволюции μ такой, что $\mu = \tau i_s$, где i_s – внутренний автоморфизм D, индуцируемый сопряжением ненулевым элементом $s \in S_\tau(D)$, следующие условия эквивалентны:*

(i) $s = agg^\tau$, *где* $a \in k$, $g \in D$;

(ii) *группы* $\mathrm{U}(1,\tau)$ *и* $\mathrm{U}(1,\mu)$ *сопряжены в* $\mathrm{GL}(1,D)$;

(iii) *группы* $\mathrm{SU}(1,\tau)$ *и* $\mathrm{SU}(1,\mu)$ *сопряжены в* $GL(1,D)$.

Доказательство теоремы основано на следующих предварительных утверждениях.

Лемма 3.3. *K-линейная оболочка $K\langle \mathrm{U}(D,\tau)\rangle$ множества $\mathrm{U}(D,\tau)$ совпадает с D.*

Доказательство. Покажем, что $S_\tau(D)$ – подмножество множества $K\langle \mathrm{U}(D,\tau)\rangle$. Так как $S_\tau(D)$ содержит K-базис D, то отсюда будет следовать совпадение $K\langle \mathrm{U}\,(D,\tau)\rangle$ и D. Поскольку всякий симметрический элемент $t \in S_\tau(D)$ принадлежит какому-нибудь максимальному подполю L алгебры D со свойством $L^\tau = L$, то нам достаточно показать, что t принадлежит K-линейной оболочке множества $L \cap \mathrm{U}\,(D,\tau)$. Обозначим через L_τ подполе поля L неподвижных относительно τ элементов. Тогда $L_\tau = k(z)$ для подходящего $z \in L_\tau$. Ясно, что $L = K(z)$. Рассмотрим элемент $u = (1 + z\sqrt{\alpha})/(1 - z\sqrt{\alpha})$, принадлежащий, очевидно, $L \cap \mathrm{U}(D,\tau)$. Так как

$$u = 1 + \frac{2}{\frac{1}{z\sqrt{\alpha}} - 1},$$

то u – примитивный элемент расширения L/K. Тогда L – K-линейная оболочка множества $\{1, u, u^2, \ldots\}$, содержащаяся, очевидно, в K-линейной оболочке множества $L \cap \mathrm{U}\,(D,\tau)$, и потому t принадлежит этой K-линейной оболочке. Лемма доказана. □

Лемма 3.4. *В обозначениях предыдущей леммы K-линейная оболочка $K\langle \mathrm{SU}(D,\tau)\rangle$ множества $\mathrm{SU}(D,\tau)$ совпадает с D.*

Доказательство. Ввиду предыдущей леммы, достаточно показать, что множество $K\langle \mathrm{U}(D,\tau)\rangle$ является подмножеством $K\langle \mathrm{SU}(D,\tau)\rangle$. Произвольный элемент $u \in \mathrm{U}(D,\tau)$ содержится в некотором максимальном подполе L алгебры D со свойством $L^\tau = L$. Обозначим через z симметрический относительно τ элемент поля L такой, что $L = K(z)$ и рассмотрим семейство

$$\{u_r\}_{r\in k}, \quad \text{где} \quad u_r = \frac{1+rz\sqrt{\alpha}}{1-rz\sqrt{\alpha}}.$$

Заметим, что при любом ненулевом r элемент u_r порождает над K поле L и принадлежит $\mathrm{U}(D,\tau)$. Предположим, что для некоторого ненулевого $r^* \in k$, $K(u_{r^*}) = K(u_{r^*}^d)$, где d – индекс алгебры D. В этом случае будем иметь $\mathrm{Nrd}(u_{r^*}^{-1})u_{r^*}^d \in \mathrm{SU}(D,\tau)$, и потому $K(u_{r^*})$ совпадает с $K(\mathrm{Nrd}(u_{r^*}^{-1})u_{r^*}^d)$. Последнее же поле, очевидно, содержится в $K\langle \mathrm{SU}(D,\tau)\rangle$. Заметим, что всегда существует ненулевой элемент $r^* \in k$ со свойством $K(u_r^d) \neq K$. В противном случае, для любого ненулевого $r \in k$, $u_r^d \in K$, что влечёт

$$(1+rz\sqrt{\alpha})^d = (1-rz\sqrt{\alpha})^d a_r,$$

где $a_r \in K$. Из последнего равенства вытекает, что z является корнем многочлена

$$f(x) = (1+rx\sqrt{\alpha})^d - (1-rx\sqrt{\alpha})^d a_r.$$

Заметим, что коэффициенты при x^d и x^{d-2} равны соответственно $r^d(\sqrt{\alpha})^d(1+(-1)^{d+1}a_r)$ и $C_d^{d-2}r^{d-2}(\sqrt{\alpha})^{d-2}(1+(-1)^{d-1}a_r)$. Предположим, что $(1+(-1)^{d+1}a_r) \neq 0$ для бесконечного числа элементов $r \in k$. Тогда для этих r коэффициент минимального многочлена z над K при x^{d-2} равен

$$\frac{C_d^{d-2}}{(\alpha\, r)^2}.$$

С другой стороны, этот коэффициент не зависит от r. Полученное противоречие показывает, что должно быть $(1+(-1)^{d+1}a_r) = 0$. Откуда $a_r = (-1)^d$ для бесконечного числа $r \in k$. Но такое равенство в поле L возможно лишь для конечного числа элементов u_r. Однако все элементы u_r различны, и потому равенство $a_r = (-1)^d$ не может выполняться для всех ненулевых $r \in k$. Отсюда заключаем, что найдется r^* такое, что $K(u_{r^*}^d) \neq K$. В случае простого d это влечёт справедливость утверждения леммы.

Предположим теперь, что лемма верна для всех алгебр с делением, индекс которых меньше чем d. Рассмотрим, как и выше, семейство $\{u_r\}_{r\in k}$. Тогда для какого-то r^* $K(u^d_{r^*}) \neq K$. Обозначим через T централизатор поля $K(u^d_{r^*})$ в алгебре D. Тогда T – центральная $K(u^d_{r^*})$-алгебра с делением со свойством $T^\tau = T$ индекса меньшего чем d. Ввиду нашего предположения T совпадает с $K(u^d_{r^*})$-оболочкой множества $\mathrm{SU}(1, T, \tau|_T)$. Поскольку $K(u^d_{r^*})$ содержится в K-линейной оболочке степеней элемента $\mathrm{Nrd}(u^{-1}_{r^*})u^d_{r^*}$, то $K(u^d_{r^*})$ содержится в $K\langle\mathrm{SU}(D,\tau)\rangle$, а так как $\mathrm{SU}(1, T, \tau|_T) \subset \mathrm{SU}(D, \tau)$, то L лежит в $K\langle\mathrm{SU}(D,\tau)\rangle$. Лемма доказана. □

Лемма 3.5. *Для $\tau, \mu \in \mathrm{Inv}_{K/k}(D)$ пусть $\mu = \tau i_s$, $s \in S_\tau(D) \cap S_\mu(D)$. Тогда k-пространства $S_\tau(D)$, $S_\mu(D)$ сопряжены некоторым ненулевым элементом $g \in D$:*

$$S_\mu(D) = gS_\tau(D)g^{-1}$$

в том и только в том случае, когда $s = agg^\tau, a \in k$.

Доказательство. Пусть вначале $S_\mu(D) = gS_\tau(D)g^{-1}$. Тогда ввиду того, что $S_\mu(D) = sS_\tau(D)$ $sS_\tau(D) = gS_\tau(D)g^{-1} = gg^\tau(g^{-\tau}S_\tau(D)g^{-1})$. Но
$g^{-\tau}S_\tau(D)g^{-1} = S_\tau(D)$, поэтому $sS_\tau(D) = gg^\tau S_\tau(D)$. Положим $a^{-1} = s^{-1}gg^\tau$. Тогда из последнего заключаем $a^{-1}S_\tau(D) = S_\tau(D)$. Откуда немедленно следует, что $a^{-1} \in S_\tau(D)$. Далее, для любого $e \in S_\tau(D)$

$$(a^{-1}e)^\tau = e^\tau a^{-\tau} = ea^{-1}, \quad (a^{-1}e)^\tau = (a^{-1}e),$$

что влечёт $a \in K$ ввиду того, что $S_\tau(D)$ – базис D/K. Так как $a \in S_\tau(D)$, то $a \in k$. Значит, $s = agg^\tau$, $a \in k$, что и требовалось.

Обратно, пусть $s = agg^\tau$, $a \in k$. Тогда

$$S_\mu(D) = sS_\tau(D) = gg^\tau S_\tau(D) = gg^\tau(g^{-\tau}S_\tau(D)g^{-1}) = gS_\tau(D)g^{-1}.$$

□

Доказательство теоремы 2. Покажем вначале, что условие (i) теоремы эквивалентно сопряжённости

$$g\mathrm{U}(D,\tau)g^{-1} = \mathrm{U}(D,\mu).$$

Действительно, пусть $s = agg^\tau$ и $u \in \mathrm{U}(D,\tau)$. Тогда поскольку $u^\tau = u^{-1}$, то $(gug^{-1}) \cdot (gug^{-1})^\mu = (gug^{-1})(gg^\tau)(g^{-\tau}u^{-1}g^\tau)(gg^\tau)^{-1} = 1$, т.е.

$gug^{-1} \in \mathrm{U}(D,\mu)$. Для получения обратного включения достаточно заметить, что $s^{-1} \in S_\mu(D)$, $\tau = \mu i_{s^{-1}}$ и $s^{-1} = a^{-1}(g^{-1}g^{-\mu})$, поскольку ввиду симметрии тогда $g^{-1}\,\mathrm{U}(D,\mu)g \subset \mathrm{U}(D,\tau)$.

Обратно, предположим, что

$$g\mathrm{U}(D,\tau)g^{-1} = \mathrm{U}(D,\mu).$$

Пусть $s \in S_\tau(D) \setminus \{0\}$. Тогда $u = (1+s\sqrt{\alpha})/(1-s\sqrt{\alpha}) \in \mathrm{U}(D,\tau)$, элемент $gug^{-1} \in \mathrm{U}(D,\mu)$ и потому $gug^{-1} = (1+s^*\sqrt{\alpha})/(1-s^*\sqrt{\alpha})$, где $s^* \in S_\mu(D) \setminus \{0\}$. Значит, имеем равенство

$$\frac{(1+gsg^{-1}\sqrt{\alpha})}{(1-gsg^{-1}\sqrt{\alpha})} = \frac{(1+s^*\sqrt{\alpha})}{(1-s^*\sqrt{\alpha})}.$$

Левая часть последнего равенства равна

$$1+\frac{2}{\frac{1}{gsg^{-1}\sqrt{\alpha}}-1},$$

а правая –

$$1+\frac{2}{\frac{1}{s^*\sqrt{\alpha}}-1}.$$

Откуда следует, что $gsg^{-1} = s^*$, т.е. $gsg^{-1} \in S_\mu(D)$. Ввиду произвольности $s \in S_\tau(D)\setminus\{0\}$ заключаем $gS_\tau(D)g^{-1} \subset S_\mu(D)$ и по размерностным соображениям $gS_\tau(D)g^{-1} = S_\mu(D)$. В силу леммы 5 $s = agg^\tau$ для подходящего $a \in k$.

Далее, приведенные нормы сопряжённых элементов одинаковы и потому, ввиду предыдущего, условие $s = agg^\tau$ влечёт сопряжённость

$$g\,\mathrm{SU}(D,\tau)g^{-1} = \mathrm{SU}(D,\mu). \qquad (*)$$

Обратно, пусть совпадение $(*)$ имеет место для некоторого $g \in D$ и u – произвольный элемент из $\mathrm{SU}(D,\tau)$. Ввиду $(*)$,

$$gug^{-1} \in \mathrm{SU}(D,\mu),$$

то есть $(gug^{-1})^\mu gug^{-1} = 1$ или $sg^{-\tau}u^{-1}g^\tau s^{-1} = gu^{-1}g^{-1}$. Последнее равенство влечёт $(g^{-1}sg^{-\tau})u^{-1}(g^{-1}sg^{-\tau})^{-1} = u^{-1}$. Таким образом, элемент $g^{-1}sg^{-\tau}$ перестановочен со всеми элементами из группы $\mathrm{SU}(D,\tau)$, а потому и из её K-линейной оболочки, что ввиду леммы 4 означает, что $g^{-1}sg^{-\tau} \in K$. Для $a = g^{-1}sg^{-\tau}$ имеем $s = agg^\tau$ и $s = a^\tau gg^\tau$, что влечёт $a \in k$. Теорема доказана. □

Из теоремы немедленно вытекает

Следствие 3.1. *Если группы* $\mathrm{SU}(D,\tau)$, $\mathrm{SU}(D,\mu)$ *сопряжены* $(\tau,\mu \in \mathrm{Inv}_{K/k}(D))$, *то* $\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(D,\tau) \cong \mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(D,\mu)$.

Доказательство. Если $\mathrm{SU}(D,\mu) = g\,\mathrm{SU}(D,\tau)g^{-1}$, то $\mathrm{U}(D,\mu) = \mathrm{gU}(D,\tau)g^{-1}$, что влечёт $[\mathrm{U}(D,\mu),\mathrm{U}(D,\mu)] = g[\mathrm{U}(D,\tau),\mathrm{U}(D,\tau)]g^{-1}$. □

В дальнейшем нам потребуется следующее утверждение.

Предложение 3.1. *Пусть* Q *– кватернионная* K*-алгебра с делением,* $\tau \in \mathrm{Inv}_{K/k}(Q)$. *Тогда существует единственная кватернионная* k*-подалгебра* D_τ *с делением такая, что* $D_\tau^\tau = D_\tau$ *и ограничение* $\tau|_{D_\tau}$ τ *на* D_τ *– каноническая инволюция алгебры* D_τ.

Доказательство. В [1] установлено существование k-кватернионной подалгебры D в Q с каноническим k-базисом $\{1,i,j,ij\}$ таким, что $Q = D \otimes_k K$, $i^\tau = i$, $j^\tau = j$, $ij = -ji$. Тогда k-линейная оболочка D_τ множества $\{1, i\sqrt{\alpha}, j\sqrt{\alpha}, ij\alpha\}$ – искомая алгебра. Предположим, что D'_τ – другая кватернионная k-подалгебра со свойством ${D'_\tau}^\tau = D'_\tau$, $\tau|_{D'_\tau}$ – каноническая инволюция и $Q = D'_\tau \otimes_k K$. Ясно, что $K_\tau(D_\tau) \oplus k\sqrt{\alpha} = K_\tau(Q)$ и $K_\tau(D'_\tau) \oplus k\sqrt{\alpha} = K_\tau(Q)$. Если $M \in K_\tau(D_\tau)$, то $M = K' + c\sqrt{\alpha}$, $K' \in K_\tau(D'_\tau)$, $c \in k$. Так как $M^2, {K'}^2 \in k$, то из $M^2 = {K'}^2 + c^2\alpha + 2c\sqrt{\alpha}$ следует $c = 0$, $M = K'$ и потому $K_\tau(D_\tau) \subseteq K_\tau(D'_\tau)$. Ясно, что верно и обратное включение, поэтому $K_\tau(D_\tau) = K_\tau(D'_\tau)$. Откуда $D_\tau = D'_\tau$, так как $D_\tau = k \oplus K_\tau(D_\tau)$, $D'_\tau = k \oplus K_\tau(D'_\tau)$. Предложение доказано. □

Для всякой кватернионной k-алгебры с делением E такой, что $Q = E \otimes_k K$ и канонической инволюции δ алгебры E, отображение $\tau = \delta \otimes \sigma$, где σ – нетривиальный k-автоморфизм поля K, является инволюцией второго рода, для которой $D_\tau = E$. Таким образом, все инволюции $\tau \in \mathrm{Inv}_{K/k}(Q)$ параметризуются кватернионными алгебрами D_τ.

Проблема сопряжённости групп $\{\mathrm{SU}(Q,\tau)\}_{\tau \in \mathrm{Inv}_{K/k}(Q)}$ теперь может быть редуцирована к случаю, когда алгебры D_τ и D_μ k-изоморфны и изоморфны группы $\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(Q,\tau)$ и $\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(Q,\mu)$.

Действительно, справедливы две следующие леммы.

Лемма 3.6. *Пусть группы* $\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(Q,\tau)$ *и* $\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(Q,\mu)$ *не изоморфны. Тогда не сопряжены группы* $\mathrm{SU}(Q,\tau)$ *и* $\mathrm{SU}(Q,\mu)$.

Доказательство. Предположив противное заключению леммы, мы бы пришли к противоречию со следствием. □

Лемма 3.7. *Пусть алгебры* D_τ *и* D_μ *не* k*-изоморфны. Тогда группы* $SU(Q,\tau)$ *и* $SU(Q,\mu)$ *не сопряжены.*

Доказательство. Покажем, что k-линейная оболочка $k\langle \mathrm{SU}(Q,\tau)\rangle$ группы $\mathrm{SU}(Q,\tau)$ совпадает с D_τ. Заметим, что если $g \in D_\tau \setminus k$ и $g^2 + mg + n = 0$ при $m, n \in k$, то для того, чтобы показать, что $g \in k\langle \mathrm{SU}(Q,\tau)\rangle$ ввиду $\mathrm{SU}(Q,\tau) = \mathrm{SL}(1, D_\tau)$, достаточно показать, что g^2 содержится в k-линейной оболочке группы $\mathrm{SL}(1, D_\tau)$. Поскольку $g^2 = \mathrm{Nrd}(g)z$, где $z \in \mathrm{SL}(1, D_\tau)$, то $D_\tau \subset k\langle \mathrm{SU}(Q,\tau)\rangle$. Обратное включение очевидно, и таким образом, $D_\tau = k\langle \mathrm{SU}(Q,\tau)\rangle$. Предположим, что $\mathrm{SU}(Q,\mu) = g\,\mathrm{SU}(Q,\tau)g^{-1}$. Тогда

$$k\langle \mathrm{SU}(Q,\mu)\rangle = gk\langle \mathrm{SU}(Q,\tau)\rangle g^{-1},$$

и потому $D_\mu = gD_\tau g^{-1}$, что влечёт k-изоморфность D_μ и D_τ в противовес условию леммы. Таким образом, группы $\mathrm{SU}(Q,\tau)$ и $\mathrm{SU}(Q,\mu)$ не сопряжены. $\square$

Для кватернионных алгебр Q имеет место

Теорема 3.3. *Группы $\mathrm{SU}(Q,\tau)$ и $\mathrm{SU}(Q,\mu)$ сопряжены в том и только в том случае, когда алгебры D_τ и D_μ k-изоморфны.*

Доказательство. Заметим, что k-изоморфность D_τ и D_μ влечёт их сопряжённость в $\mathrm{GL}(1,Q)$. Действительно, пусть $\varphi : D_\mu \to D_\tau$ – k-изоморфизм. Тогда ввиду $Q = D_\mu \otimes_k K$, $Q = D_\tau \otimes_k K$, $\varphi \otimes \mathrm{id}_k$ – K-автоморфизм алгебры Q. По теореме Сколема–Нётер, $\varphi \otimes \mathrm{id}_k$ – внутренний автоморфизм и, следовательно, $D_\mu = gD_\tau g^{-1}$ для подходящего $g \in \mathrm{GL}(1,Q)$. Далее, $\mathrm{SU}(Q,\mu) = \mathrm{SL}(1, D_\mu)$, $\mathrm{SU}(Q,\tau) = \mathrm{SL}(1, D_\tau)$ и, значит, поэтому $\mathrm{SU}(Q,\mu) = g\,\mathrm{SU}(Q,\tau)g^{-1}$. Если же D_τ и D_μ не являются k-изоморфными, то как мы знаем (лемма 7), группы $\mathrm{SU}(Q,\tau)$ и $\mathrm{SU}(Q,\mu)$ не сопряжены. $\square$

Собирая вместе предыдущие рассмотрения, получаем следующее описание классов сопряжённости.

Теорема 3.4. *Классы сопряжённости групп $\{\mathrm{SU}(Q,\tau)\}_{\tau \in Inv_{K/k}(Q)}$ в $\mathrm{GL}(1,Q)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с классами k-изоморфизмов алгебр $\{D_\tau\}_{\tau \in \mathrm{Inv}_{K/k}(Q)}$.*

Ввиду теоремы нам достаточно описать классы k-изоморфизмов алгебр D.

§4. Проблема сопряжённости. Случай глобальных полей

Пользуясь последней теоремой, мы в состоянии получить окончательное решение проблемы сопряжённости для кватернионных алгебр с делением над глобальными полями характеристики, отличной от 2.

Пусть ниже Q – кватернионная K-алгебра с делением и K/k-инволюцией τ. Опишем сначала абелевы группы, реализующиеся в виде групп $\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(Q,\tau)$. Обозначим через V_k^f множество неархимедовых точек поля k и рассмотрим два подмножества множества V_k^f:

$E = \{v \in V_k^f \mid k_v(\sqrt{\alpha})/k_v$ – квадратичное неразветвлённое расширение пополнения k_v поля k относительно $v\}$;

$F = \{v \in V_k^f \mid k_v(\sqrt{\alpha})/k_v$ – квадратичное вполне разветвлённое расширение $k_v\}$.

Для всякого конечного подмножества $M \subset E$ и подмножества $N \subset F$ (множество F конечно) положим

$$G_{M,N} = \Big(\oplus_{v\in M} \, (\mathbb{Z}/(q_v+1)\mathbb{Z})\Big) \bigoplus \Big(\bigoplus_{v\in N} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_v \Big),$$

где при $M = \varnothing$ (соответственно $N = \varnothing$) группа $\oplus_{v\in M}(\mathbb{Z}/(q_v+1)\mathbb{Z})$ (соответственно группа $\oplus_{v\in N}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_v$) предполагается тривиальной, если $M \neq \varnothing$, то q_v – число элементов в поле вычетов поля k_v и для $N \neq \varnothing$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_v$ – группа второго порядка. Тогда имеет место следующая

Теорема 4.1. *Группы $G_{M,N}$ и только они реализуются в виде групп $\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(Q,\tau)$ для подходящих кватернионных K-алгебр с делением Q и K/k-инволюций τ.*

Доказательство. Напомним [1], что всякая кватернионная K-алгебра с делением Q и K/k-инволюцией τ имеет вид $Q = Q_\tau \otimes_k K$, где Q_τ – кватернионная k-алгебра с делением и, кроме того, $Q_\tau^\tau = Q_\tau$, $\tau|_{Q_\tau}$ – каноническая инволюция. В этих обозначениях основной результат из [13] (по поводу другого доказательства этого результата см. [27]) может быть сформулирован так.

Пусть $S \subset V_k^f$ – множество точек, в которых Q_τ ветвится (то есть $Q_\tau \otimes_k k_v$ не является матричной алгеброй над k_v), $M = S \cap E$, $N = S \cap F$. Тогда

$$\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(Q,\tau) \cong G_{M,N}.$$

Обратно, пусть M – конечное подмножество множества E и N – подмножество множества F. Рассмотрим следующие кватернионные k-алгебры с делением Q_τ:

(i) в случае M, N – пустые множества пусть Q_τ – кватернионная k-алгебра с делением, ветвящаяся только в двух различных точках $v_1, v_2 \in V_k^f \setminus (E \cup F)$;

(ii) в случае $M \cup N$ – непустое множество пусть Q_τ ветвится только в точках $M \cup N \cup \{v_1, v_2\}, v_1, v_2 \in V_k^f \setminus (E \cup F)$, если $M \cup N$ состоит из чётного числа элементов и в точках $M \cup N \cup \{v_1\}, v_1 \in V_k^f \setminus (E \cup F)$ в противном случае.

Тогда алгебра $Q = Q_\tau \otimes_k K$ удовлетворяет условию

$$\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(Q, \tau) \cong G_{M,N} \tag{$**$}$$

для $\tau = \mu \otimes \sigma$, где μ – каноническая инволюция Q_τ, σ – нетривиальный k-автоморфизм поля K.

Действительно, в обоих случаях ввиду выбора v_1, v_2 Q – алгебра с делением и инволюцией $\tau \in \mathrm{Inv}_{K/k}(Q)$. То, что выполнено условие $(**)$, немедленно следует из предыдущей формулировки основного результата из [13]. $\square$

Ввиду теоремы 3.4 для завершения решения проблемы сопряжённости достаточно установить количество различных классов сопряжённости групп $\mathrm{SU}(Q, \tau)$ с фиксированной алгеброй Q и изоморфными группами $\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(Q, \tau)$ $(\tau \in \mathrm{Inv}_{K/k}(Q))$, а также указать множество возможных инволюций с неизофорфными группами $\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(Q, \tau)$. Эта цель достигается следующим образом. Нижеследующая теорема 2 описывает в терминах локальных инвариантов все K/k-инволюции алгебры Q (с помощью соответствия $\tau \leftrightarrow Q_\tau$). Далее, теорема 3.3 позволяет разбить множество $\mathrm{Inv}_{K/k}(Q)$ на классы инволюций с изоморфными группами $\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(Q, \tau)$. Наконец, в теореме 3 устанавливается, что число инволюций в каждом таком классе конечно.

Теорема 4.2. *Пусть* $\mathrm{Ram}\, Q$ *– множество точек ветвления (включая и архимедовы) кватернионной K-алгебры Q с делением и K/k-инволюцией и* $\mathrm{Ram}\ Q|_k$ *– множество точек поля k, лежащих под точками из* $\mathrm{Ram}\ Q$ *(т.е. ограничений точек из* $\mathrm{Ram}\ Q$*). Тогда для любого конечного подмножества S точек поля k, состоящего из точек v поля k, для которых $[k_v(\sqrt{\alpha}) : k_v] = 2$ и такого, что число элементов* *в множестве* $S \cup \mathrm{Ram}\ Q|_k$ *чётно, существует единственная с точностью до* k*-изоморфизма кватернионная* k*-подалгебра* $Q_{S\cup \mathrm{Ram}\ Q|_k}$*, для которой множество точек ветвления совпадает с* $S \cup \mathrm{Ram}\ Q|_k$*. Обратно, всякая* k*-кватернионная подалгебра* Q *с точностью до* k*-изоморфизма является алгеброй вида* $Q_{S\cup \mathrm{Ram}\ Q|_k}$ *для подходящего* S*.*

Доказательство. Поскольку множество $S\cup \mathrm{Ram}\ Q|_k$ состоит из четного числа элементов, то существует единственная с точностью до k-изоморфизма кватернионная k-алгебра, для которой множество точек ветвления совпадает с $S \cup \mathrm{Ram}\ Q|_k$. Обозначим эту алгебру через $Q_{S\cup \mathrm{Ram}\ Q|_k}$ и покажем, что алгебра $Q_{S\cup \mathrm{Ram}\ Q|_k} \otimes_k K$ K-изоморфна алгебре Q. Поскольку все точки поля K, лежащие над точками из S (т.е. продолжения точек из S до точек поля K), не являются точками ветвления алгебры $Q_{S\cup \mathrm{Ram}\ Q|_k}$, а над точками v из $\mathrm{Ram}\ Q|_k$ лежат в точности точки из $\mathrm{Ram}\ Q$, обладающие свойством $k_v(\sqrt{\alpha}) = k_v$, то множества точек ветвления алгебр $Q_{S\cup \mathrm{Ram}\ Q|_k} \otimes_k K$ и Q совпадают. Тогда эти алгебры K-изоморфны и, в частности, алгебра $Q_{S\cup \mathrm{Ram}\ Q|_k}$ отождествляется с k-подалгеброй алгебры Q.

Обратно, пусть T – кватернионная k-подалгебра алгебры Q. Тогда $Q = T \otimes_k K$ и точки ветвления алгебры T разбиваются на два подмножества: (i) точки v, для которых $[k_v(\sqrt{\alpha}) : k_v] = 2$; (ii) точки v, для которых $k_v(\sqrt{\alpha}) = k_v$. Первое подмножество обозначим через S, а второе подмножество, как нетрудно видеть, совпадает с $\mathrm{Ram}\ Q|_k$. Тогда ясно, что T k-изоморфна алгебре $Q_{S\cup \mathrm{Ram}\ Q|_k}$. □

Следствие 4.1. *Множество* K/k*-инволюций на* Q *с неизоморфными группами* $\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(Q,\tau)$ *бесконечно.*

Ввиду теоремы и следствия важным представляется описание классов сопряжённости групп $\mathrm{SU}(Q,\tau)$ с фиксированной группой $\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(Q,\tau)$. В этом случае имеет место следующая

Теорема 4.3 (конечности). *Число классов сопряжённости групп* $\mathrm{SU}(Q,\tau)_{\tau\in \mathrm{Inv}_{K/k}(Q)}$ *с изоморфными группами* $\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(Q,\tau)$ *конечно.*

Доказательство. Пусть Q – кватернионная K-алгебра с делением и K/k-инволюцией τ, $q_1,\dots,q_t$ – различные примарные числа и $m \geq 0$ такие, что

$$\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(Q,\tau) \cong \Big(\mathbb{Z}/(q_1+1)\mathbb{Z}\Big)^{r_1} \bigoplus \Big(\mathbb{Z}/(q_2+1)\mathbb{Z}\Big)^{r_2}$$

$$\bigoplus \dots \bigoplus \Big(\mathbb{Z}/(q_t+1)\mathbb{Z}\Big)^{r_t} \bigoplus \Big(\bigoplus_{i=1}^{m} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\Big).$$

Ввиду $Q = Q_\tau \otimes_k K$ и основного результата из [13] множество точек ветвления алгебры Q_τ содержится в конечном множестве, состоящем из множества всех архимедовых точек поля k, всех точек v таких, что мощность поля вычетов пополнения k_v совпадает с одним из чисел $q_1, \dots, q_t$, и множества точек v, для которых расширение $k_v(\sqrt{\alpha})/k_v$ вполне разветвлено. Таким образом, число классов попарно не k-изоморфных алгебр Q_τ конечно, что завершает доказательство теоремы ввиду теоремы 3.3. □

Замечание 5. Нетрудно видеть, что несложное комбинаторное вычисление позволяет получить точную формулу для вычисления числа классов сопряженности групп $\mathrm{SU}(Q,\tau)$ с изоморфными группами $\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(Q,\tau)$.

Литература

1. A. A. Albert, *Involutorial simple algebras and real Riemann matrices.* — Ann. Math. **36** (1935), 886–964.
2. V. Chernousov, A. Merkurjev, *R-equivalence and special unitary groups.* — J. Algebra **209** (1998), 175–198.
3. J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, *La R-équivalence sur les tores.* — Ann. Sci. École Norm. Sup. **10** (1977), 175–229.
4. P. Draxl, SK_1 *von Algebren über vollständig diskret bewerteten Körpern und Galoiskohomologie abelscher Körpererweiterungen.* — J. reine angew. Math. **293-294** (1977), 116–142.
5. Ph. Gille, *Le problème de Kneser–Tits.* — Séminaire Bourbaki 60ème anée No. 983 (2006–2007), 1–40.
6. R. Hazrat, A. R. Wadsworth, SK_1 *of graded division algebras.* — Israel J. Math. **183** (2011), 117–163.
7. R. Hazrat, A. R. Wadsworth, *Unitary* SK_1 *of graded and valued division algebras.* — Proc. London Math. Soc. (3) **103** (2011), 508–534.
8. M. Kneser, *Orthogonale Gruppen über algebraischen Zahlkörpern.* — J. reine angew. Math. **196** (1956), 213–220.
9. M.-A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost, J.-P. Tignol, *The book of involutions.* Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **44** (1998), 593.
10. Y. Segev, *On finite homomorphic images of the multiplicative groups of a division algebra.* — Ann. Math. **149** (1999), 219–251.
11. Y. Segev, G. Seitz, *Anisotropic groups of type* A_n *and the commuting graph of finite simple groups.* — Pacific J. Math. **202** (2002), No. 1, 125–225.
12. B. A. Sethuraman, B. Sury, *On the special unitary group of a division algebra.* — Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2005), 351–354.

13. B. Sury, *On* $\mathrm{SU}(1,D)/[\mathrm{U}(1,D),\mathrm{U}(1,D)]$ *for a quaternion division algebra* D. — Arch. Math. **90** (2008), 493–500.
14. J. Tits, *Groupes de Whitehead de groupes algébriques simples sur un corps (d'après V. P. Platonov et. al.).* Séminaire Bourbaki (1976–1977), No. 505, Lect. Notes Math. **677** (1978), 218–236.
15. A. R. Wadsworth, *Unitary* SK_1 *of semiramified graded and valued division algebras.* — Manuscripta Math., in press, preprint available `arXiv:1009.3904`.
16. A. R. Wadsworth, V. I. Yanchevskii, *Unitary* SK_1 *for a graded division ring and its quotient division ring.* — J. Algebra **352** (2012), 62–78.
17. S. Wang, *On the commutator group of a simple algebra.* — Amer. J. Math. **72** (1950), 323–334.
18. V. I. Yanchevskii, *Whitehead groups and groups of R-equivalence classes of linear algebraic groups of noncommutative classical type over some virtual fields.* — In Proceeding of the International Conference on Algebraic Groups and Arithmetic, December (2001), TIFR, Mumbai, pp. 491–505.
19. В. Е. Воскресенский, *Алгебраические торы.* Наука, М., 1977.
20. Ю. Л. Ершов, *Гензелевы нормирования тел и группа* SK_1. — Матем. сб. **117** (1982) No. 159, вып. 1, 60–68.
21. Ю. И. Манин, *Кубические формы.* Наука, М., 1972.
22. А. П. Монастырный, В. И. Янчевский, *Группы Уайтхеда спинорных групп.* — Изв. АН СССР, сер. мат. **54** (1990), No. 1, 60–96.
23. В. П. Платонов, *О проблеме Таннака–Артина.* — ДАН СССР **221** (1975), No. 5, 1038–1041.
24. В. П. Платонов, *Проблема Таннака–Артина и приведенная K-теория.* — Известия АН СССР, сер. матем., **40** (1976), No. 2, 227–261.
25. В. П. Платонов, А. С. Рапинчук, *Алгебраические группы и теория чисел.* Наука, М., 1991.
26. В. П. Платонов, В. И. Янчевский, *Структура унитарных групп и коммутант простой алгебры над глобальными полями.* — Докл. АН СССР **208** (1973), No. 3, 541–544.
27. А. В. Прокопчук, В. И. Янчевский, *О другом доказательстве теоремы Б. Сури*, — Зап. научн. семин. ПОМИ **365** (2009), 196–207.
28. В. И. Янчевский, *Простые алгебры с инволюциями и унитарные группы.* — Матем. сб. **93** (1974), No. 3, 368–380.
29. В. И. Янчевский, *Приведенная унитарная K-теория и тела над гензелевыми дискретно нормированными полями.* — Изв. АН СССР, сер. матем. **42** (1978), No. 4, 879–918.
30. В. И. Янчевский, *Обратная задача приведенной унитарной K-теории.* — Матем. заметки **26** (1979), No. 3, 475–482.
31. В. И. Янчевский, *Приведенная унитарная K-теория. Приложения к алгебраическим группам.* — Матем. сб. **110(152)** (1979), No. 4(12), 579–596.
32. В. И. Янчевский, *О проблеме сопряжённости групп рациональных точек внешних форм анизотропных групп типа* A_n. — Докл. НАН Беларуси **54** (2010) No. 3, 5–7.

Yanchevskii V. I. Reduced Whitehead groups and conjugacy problem for special unitary groups of anisotropic hermitian forms.

Let K/k be a separable field extension of degree 2, D be a finite-dimensional central division algebra over K with K/k-involution τ, h be an hermitian anisotropic form on a right D-vector space with respect to τ and let $U(h)$ be the unitary group of h. Then the reduced Whitehead group of its special linear subgroup is defined as follows: $\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(h) = \mathrm{SU}(h)/[U(h), U(h)]$, where $[U(h), U(h)]$ is the commutator subgroup of $U(h)$. The first main result establishes a link between the above group and its analog $\mathrm{SUK}_1(h)$ for the case of isotropic h (with respect to the same τ).

Theorem. *There exists a surjective homomorphism from* $\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(h)$ *to* $\mathrm{SUK}_1(h)$.

Furthermore, we give also a solution of conjugacy problem for special unitary subgroups of anisotropic hermitian forms over quaternion division algebras as subgroups of their multiplicative groups.

Институт математики НАН Беларуси
E-mail: yanch@im.bas-net.by

Поступило 20 февраля 2012 г.