Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 400, 2012 г.

А. В. Яковлев

О ЗАДАЧЕ ПОГРУЖЕНИЯ С ЦИКЛИЧЕСКИМ ЯДРОМ ДЛЯ ЧИСЛОВЫХ ПОЛЕЙ

Хорошо известно, что для разрешимости задачи погружения с циклическим ядром нечетного порядка достаточно, чтобы выполнялось условие согласности. Однако это уже не так, если ядро является циклической группой порядка 2^n, $n \geq 3$, даже если задача рассматривается для полей алгебраических чисел. Этот факт оказывается очень серьезным препятствием при решении задач, более сложных, чем задача погружения с абелевым ядром. Тем не менее, оказалось, что при некоторых ограничениях, которым достаточно легко удовлетворить, согласность все же достаточна для погружаемости и в случае, когда ядро – циклическая 2-группа. Этому и посвящена настоящая статья.

Замечание. *Пользуясь случаем, укажем, что в предыдущей статье автора* [8]*, тоже посвященной задаче погружения числовых полей, допущена ошибка: теорема* 4 *справедлива только при* $p = 2$*, потому что в группе унитреугольных матриц порядка* 3 *над полем из* p *элементов, где* p *– нечетное простое число, кроме указанных там двух нециклических подгрупп, есть и другие собственные нециклические подгруппы.*

1. **Предварительные сведения.** Напомним некоторые определения, связанные с задачей погружения полей. Как обычно, мы обозначаем через $\mathrm{Gal}(K/k)$ группу Галуа расширения Галуа K/k и через K^H, где $H \subset \mathrm{Gal}(K/k)$ – поле всех H-инвариантных элементов поля K. Всюду в этом пункте K/k – конечное расширение Галуа с группой Галуа F, φ – эпиморфизм конечной группы G на группу F, $A = \mathrm{Ker}\,\varphi$. Мы обозначаем через $(K/k, G, \varphi)$ или, короче, через $(K/k, \varphi)$ следующую задачу погружения: построить расширение Галуа L/k с группой Галуа G, такое что $K \subset L$, причем ограничение на K любого автоморфизма $g \in G = \mathrm{Gal}(L/k)$ совпадает с автоморфизмом $\varphi(g) \in F$ поля K. Группа $A = \mathrm{Ker}\,\varphi$ называется ядром задачи погружения $(K/k, \varphi)$.

Ключевые слова: расширение Галуа, задача погружения.

Пусть $G' \supset A$ – подгруппа G, $B \subset A = \operatorname{Ker}\varphi$ – нормальная подгруппа G', $k' = K^{\varphi(G')}$. Обозначим через

$$\varphi' : G'/B \to \mathrm{Gal}(K/k')$$

эпиморфизм, индуцированный эпиморфизмом φ. Мы говорим, что задача погружения $(K/k', \varphi')$ сопутствующая для задачи $(K/k, \varphi)$.

Пусть теперь ядро A задачи погружения $(K/k, \varphi)$ – абелева группа периода n. Группа A естественным образом превращается в F-модуль: для любых $a \in A$, $f \in F$

$$a^f = g^{-1}ag, \quad \text{где } g \in G \text{ – любой элемент, такой что } \varphi(g) = f.$$

Если, кроме того, поле K содержит первообразный корень степени n из 1, то группа характеров $\bar{A} = \mathrm{Hom}(A, K^*)$ тоже может рассматриваться как F-модуль, если для любых $\chi \in \bar{A}$, $a \in A$, $f \in F$ положить

$$\chi^f(a) = (\chi(a^{f^{-1}}))^f = (\chi(gag^{-1}))^f, \quad \text{где } \varphi(g) = f.$$

Задача погружения $(K/k, \varphi)$ называется брауэровской, если её ядро A – циклическая группа порядка n, поле K содержит первообразный корень степени n из 1 и группа $F = \mathrm{Gal}(K/k)$ действует на группе характеров $\bar{A}$ тривиально.

2. **Условие согласности.** Одно необходимое условие существования решения задачи погружения было открыто Д. К. Фаддеевым в [1] и позднее переоткрыто Х. Хассе [2] (правда, только для случая абелева ядра). Оно называется условием согласности. Напомним одну из формулировок этого условия.

Пусть $(K/k, G, \varphi)$ – задача погружения, ядро A которой – абелева группа периода n. Вообще говоря, поле K не обязано содержать все корни степени n из 1; пусть K_1 – поле, полученное присоединением к полю K первообразного корня степени n из 1. Обозначим через F_1 группу Галуа расширения K_1/k, а через ψ – канонический эпиморфизм группы $F_1 = \mathrm{Gal}(K_1/k)$ на группу $F = \mathrm{Gal}(K/k)$. Пусть, далее,

$$G_1 = G \times_F F_1 = \{(g, f_1) \in G \times F_1 \mid \varphi(g) = \psi(f_1)\},$$

и пусть φ_1 – канонический эпиморфизм группы G_1 на группу $F_1 = \mathrm{Gal}(K_1/k)$. Известно, что задачи погружения $(K/k, \varphi)$ и $(K_1/k, \varphi_1)$ эквивалентны. Мы говорим, что для задачи $(K/k, \varphi)$ (и для эквивалентной ей задачи $(K_1/k, \varphi_1)$) выполняется условие согласности, если разрешимы все сопутствующие задаче $(K_1/k, \varphi_1)$ брауэровские задачи погружения.

Условие согласности не достаточно для разрешимости задачи погружения $(K/k, \varphi)$, даже если K – поле алгебраических чисел, а $\operatorname{Ker}\varphi$ – циклическая 2-группа (см. [3]). Но в некоторых важных случаях согласность достаточна для существования решений таких задач. Целью настоящей работы является доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть k – поле алгебраических чисел (т.е. конечное расширение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$), K/k – такое расширение Галуа, что 2 полностью раскладывается в K, и пусть $\varphi : G \to \operatorname{Gal}(K/k)$ – эпиморфизм групп с циклическим ядром. Если для задачи погружения $(K/k, \varphi)$ условие согласности выполняется, то эта задача разрешима.*

3. **Дополнительное условие погружаемости.** Как мы упомянули выше, условие согласности не достаточно для разрешимости задачи погружения. Для случая абелева ядра A необходимое и достаточное дополнительное условие было найдено в [4], [5]. Более явная форма этого условия для числовых полей была получена в [6]; к сожалению, в формулировке последнего условия использовался неканонический изоморфизм. Но для доказательства теоремы 1 этот общий результат нам не понадобится, и будет достаточно воспользоваться только следующим непосредственным следствием из него.

Лемма 1. *Пусть K_1 – поле алгебраических чисел, содержащее первообразный корень степени n из 1, и пусть K_1/k – расширение Галуа с группой Галуа F_1. Далее, пусть $(K_1/k, \varphi_1)$ – задача погружения, ядро A которой – абелева группа периода n. Как и выше, пусть $\bar{A}$ – F_1-модуль характеров группы A. Обозначим через Π множество всех простых дивизоров поля K_1; для любого дивизора $\mathfrak{P} \in \Pi$ обозначим через $F_{1\mathfrak{P}} \subset F_1$ его группу разложения. Если условие согласности выполняется для задачи погружения $(K_1/k, \varphi)$ и если пересечение ядер всех гомоморфизмов ограничения*

$$r_{\mathfrak{P}} : H^1(F_1, \bar{A}) \to H^1(F_{1\mathfrak{P}}, \bar{A}) \quad (\mathfrak{P} \in \Pi)$$

является нулевой подгруппой группы когомологий $H^1(F_1, \bar{A})$, то задача погружения $(K_1/k, \varphi_1)$ разрешима.

4. **Основная лемма.** Пусть поле алгебраических чисел k и его конечное расширение Галуа K таковы, что 2 полностью раскладывается в K. Пусть F – группа Галуа расширения K/k и пусть B – F-модуль,

который как абстрактная группа является циклической группой порядка 2^r. Далее, пусть K_1 – поле, полученное присоединением первообразного корня степени 2^r из 1 к полю K, и пусть $F_1 = \mathrm{Gal}(K_1/k)$. F-модуль B может рассматриваться как F_1-модуль; обозначим F_1-модуль $\mathrm{Hom}(B, K_1^*)$ через $\bar{B}$. Как выше, пусть Π – множество всех простых дивизоров поле K_1, и для любого дивизора $\mathfrak{P} \in \Pi$ пусть $F_{\mathfrak{P}} \subset F_1$ – его группа разложения. В этих обозначениях и предположениях справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Пересечение ядер всех гомоморфизмов ограничения*

$$r_{\mathfrak{P}} : H^1(F_1, \bar{B}) \to H^1(F_{\mathfrak{P}}, \bar{B}) \quad (\mathfrak{P} \in \Pi)$$

является нулевой подгруппой группы когомологий $H^1(F_1, \bar{B})$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{Q}$ – один из делителей 2 в поле K_1, и пусть $F_{\mathfrak{Q}} \subseteq F_1$ – его группа разложения. Обозначим через $F^0 \subset F_1$ группу всех элементов из F_1, которые тривиально действуют на $\bar{B}$. Покажем сначала, что любой элемент $f \in F_1$ можно представить в виде произведения $f = f_{\mathfrak{Q}} f_0$ элементов $f_{\mathfrak{Q}} \in F_{\mathfrak{Q}}$ и $f_0 \in F^0$. В самом деле, группа $\bar{B}$ циклическая, поэтому есть такое (нечетное) целое число s, что $\chi^f = \chi^s$ для всех характеров $\chi \in \bar{B}$. Поскольку 2 полностью раскладывается в K, группа разложения $F_{\mathfrak{Q}}$ дивизора $\mathfrak{Q}$ простого числа 2 совпадает с группой Галуа расширения $\mathrm{Gal}(K(\zeta)/K)$, где ζ – первообразный корень степени 2^r из 1. Снова вспомнив, что 2 полностью раскладывается в K, мы заключаем, что $(K(\zeta) : K) = (\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q})$; поэтому подгруппа $\mathrm{Gal}(K_1/K)$ группы $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ совпадает со всей группой $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$, и значит, найдется элемент $f_{\mathfrak{Q}} \in F_{\mathfrak{Q}}$, такой что $\zeta^{f_{\mathfrak{Q}}} = \zeta^s$. Группа B – модуль над $F = \mathrm{Gal}(K/k)$, поэтому группа $F_{\mathfrak{Q}} = \mathrm{Gal}(K_1/K)$ действует на B тривиально; отсюда следует, что для всех $\chi \in \bar{B}$, $a \in B$

$$\chi^{f_{\mathfrak{Q}}}(a) = (\chi(a^{f_{\mathfrak{Q}}^{-1}}))^{f_{\mathfrak{Q}}} = (\chi(a))^s = \chi^f(a).$$

Таким образом, $\chi^{f_{\mathfrak{Q}}} = \chi^f$, и потому $f = f_{\mathfrak{Q}} f_0$, где $f_0 = f_{\mathfrak{Q}}^{-1} f$ – элемент из F^0.

Мы можем теперь завершить доказательство леммы. Пусть l_f ($f \in F_1$) – 1-коцикл группы F_1 в F_1-модуле $\bar{B}$, ограничения которого на группы разложения всех простых дивизоров поля K_1 расщепляются. Пусть сначала $f_0 \in F^0$; циклическая группа, порожденная f_0, как и любая циклическая подгруппа группы Галуа, является группой разложения некоторого простого дивизора, поэтому ограничение коцикла

l_f на эту подгруппу расщепляется. Это значит, что для некоторого элемента $\bar{a} \in \bar{B}$ будет $l_{f_0} = \bar{a}^{f_0}/\bar{a}$; но f_0 тривиально действует на $\bar{B}$, так что $\bar{a}^{f_0} = \bar{a}$ и $l_{f_0} = \bar{a}^{f_0}/\bar{a} = 1$.

Ограничение коцикла l_f на группу разложения $\mathfrak{Q}$ тоже расщепляется; поэтому есть элемент $\bar{b} \in \bar{B}$, такой что $l_g = \bar{b}^g/\bar{b}$ для всех $g \in F_{1\mathfrak{Q}}$. Но, как мы доказали выше, любой элемент $f \in F_1$ имеет вид $f = gf_0$, где $g \in F_{\mathfrak{Q}}$, $f_0 \in F^0$. Снова учитывая, что f_0 действует на $\bar{B}$ тривиально, мы получим:

$$l_f = l_{gf_0} = l_g^{f_0} l_{f_0} = (\bar{b}^g/\bar{b})^{f_0} \cdot 1 = \bar{b}^{gf_0}/\bar{b}^{f_0} = \bar{b}^f/\bar{b}.$$

Итак, мы доказали, что любой 1-коцикл группы F_1 в F_1-модуле $\bar{B}$, ограничения которого на группы разложения всех простых дивизоров поля K_1 расщепляются, и сам расщепляется.

5. Доказательство теоремы 1. Циклическое ядро A нашей задачи погружения раскладывается в прямое произведение циклической 2-группы B и циклической группы нечетного порядка C; пусть

$$\varphi_1 : G/C \to F, \qquad \varphi_2 : G/B \to F$$

– эпиморфизмы, индуцированные $\varphi : G \to F$. Хорошо известно (см., например, [7]), что задача $(K/k, \varphi)$ разрешима тогда и только тогда, когда обе задачи $(K/k, \varphi_1)$, $(K/k, \varphi_2)$ разрешимы, а условие согласности выполняется для задачи $(K/k, \varphi)$ тогда и только тогда, когда оно выполняется для обеих задач $(K/k, \varphi_1)$ $(K/k, \varphi_2)$. Поэтому достаточно доказать теорему в предположении, что $A = B$ – циклическая 2-группа, или что $A = C$ – циклическая группа нечетного порядка. В первом случае утверждение сразу следует из лемм 1 и 2, а во втором оно хорошо известно: Д.К.Фаддеев доказал в [1], что условие согласности достаточно для разрешимости любой задачи погружения с циклическим ядром нечетного порядка.

6. Ещё о согласности. Прежде, чем сформулировать основной результат этого пункта, напомним следующее простое и хорошо известное элементарное утверждение, справедливое не только для полей алгебраических чисел, но и для любых полей, характеристика которых не делит порядок ядра.

Лемма 3. *Пусть K/k – расширение Галуа, $\varphi : G \to \mathrm{Gal}(K/k)$ – эпиморфизм групп с абелевым ядром A, порядок которого не делится на характеристику поля k. Для того чтобы для задачи погружения*

$(K/k, \varphi)$ выполнялось условие согласности, достаточно, чтобы все сопутствующие ей задачи с циклическими ядрами были разрешимы.

Для полноты изложения приведем доказательство этой леммы. Пусть n – период A, $F = \mathrm{Gal}(K/k)$, K_1 – поле, полученное присоединением к K первообразного корня степени n из 1, F_1 – группа Галуа расширения K_1/k. Как раньше, обозначим через G_1 произведение с объединенной факторгруппой $G \times_F F_1$ и через $\varphi_1 : G_1 \to F_1 = \mathrm{Gal}(K_1/k)$ канонический эпиморфизм. Через ψ будем обозначать канонический эпиморфизм $G \times_F F_1 \to F$.

Нам надо показать, что если разрешимы все задачи погружения с циклическими ядрами, сопутствующие исходной задаче $(K/k, \varphi)$, то разрешимы все брауэровские задачи погружения, сопутствующие задаче $(K_1/k, \varphi_1)$. Мы докажем более сильное утверждение: разрешима любая задача погружения $(K_1/k_1', \varphi_1')$ с циклическим ядром, сопутствующая задаче $(K_1/k, \varphi_1)$.

По определению сопутствующей задачи, существуют такие подгруппа $G_1' \supseteq A$ группы G_1 и нормальная подгруппа $B \subseteq A$ группы G_1', что $k_1' = K_1^{\varphi_1(G_1')}$, а $\varphi_1' : G_1'/B \to \mathrm{Gal}(K_1/k_1')$ – эпиморфизм индуцированный эпиморфизмом φ_1. Пусть $G_1'' = \psi^{-1}(\psi(G_1'))$, $G' = \varphi^{-1}(\psi(G_1'))$; ясно что B – нормальная подгруппа группы G_1'' и G'. Пусть

$$k' = K_1^{\varphi_1(G_1'')} = K^{\varphi(G')} = K \cap k_1',$$

и пусть

$$\varphi_1'' : G_1''/B \to \mathrm{Gal}(K_1/k'), \qquad \varphi' : G'/B \to \mathrm{Gal}(K/k')$$

– эпиморфизмы, индуцированные соответственно φ_1 и φ. По нашему предположению задача $(K/k', G'/B, \varphi')$ с циклическим ядром имеет решение $L \supset K$; тогда $L_1 = L \otimes_K K_1$ – решение задачи $(K_1/k', G_1''/B, \varphi_1'')$, а также и задачи $(K_1/k_1', G_1'/B, \varphi_1')$, сопутствующей ей. Этим завершается доказательство леммы.

Если для задачи погружения $(K/k, \varphi)$ выполнено условие согласности, то оно выполняется для всех сопутствующих задач, и по теореме 1 в случае, когда K – поле алгебраических чисел, в котором 2 полностью раскладывается, все сопутствующие задачи с циклическими ядрами разрешимы. Таким образом, в этом случае разрешимость сопутствующих задач с циклическими ядрами необходима для согласности. Вместе с леммой 3 это доказывает следующий результат.

Теорема 2. *Пусть k – поле алгебраических чисел, K/k – такое расширение Галуа, что 2 полностью раскладывается в K, и пусть $\varphi : G \to \mathrm{Gal}(K/k)$ – эпиморфизм групп с абелевым ядром. Для того чтобы для задачи погружения $(K/k, \varphi)$ выполнялось условие согласности, необходимо и достаточно, чтобы все сопутствующие ей задачи с циклическими ядрами были разрешимы.*

Теорема 2 содержит чуть более слабую формулировку условия согласности для рассматриваемого случая. Иногда она может быть удобнее, потому что она требует, чтобы были разрешимы только те задачи с циклическими ядрами, которые сопутствуют исходной задаче погружения, а не задаче, возникающей после присоединения корней из 1.

Литература

1. Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеев, *Исследования по геометрии теории Галуа.* — Мат.сб. **15(57)** (1944), No. 2, 243–284.
2. H. Hasse, *Existenz und Mannigfaltigkeit abelscher Algebren mit vorgegebener Galoisgruppe über einem Teilkörper des Grundkörpers.* — Math. Nachr. **1** (1948), No. 1, 40–61, No. 4, 213–217.
3. Д. К. Фаддеев, *Об одной гипотезе Хассе.* — ДАН СССР **94** (1954), 1013–1016.
4. А. В. Яковлев, *Задача погружения полей.* — ДАН СССР **150** (1963), No. 5, 1009–1011.
5. А. В. Яковлев, *Задача погружения полей.* — Изв. АН СССР. Сер. мат. **28** (1964), No. 3, 645–660.
6. А. В. Яковлев, *Задача погружения для числовых полей.* — Изв. АН СССР. Сер. мат. **31** (1967), No. 2.
7. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, Д. К. Фаддеев, *Задача погружения в теории Галуа.* М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. 269 с.
8. А. В. Яковлев, *О задаче погружения числовых полей в случае элементарного абелева ядра.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **375** (2010), 203–208.

Yakovlev A. V. On embedding problem with cyclic kernel for number fields.

It is proved that for number fields an embedding problem with cyclic kernel has a solution if 2 completely decomposes in the embeddable field and the consistency condition holds.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: yakovlev.anatoly@gmail.com

Поступило 28 февраля 2012 г.