Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 400, 2012 г.

М. В. Игнатьев

ПОРЯДОК БРЮА–ШЕВАЛЛЕ НА ИНВОЛЮЦИЯХ В ГИПЕРОКТАЭДРАЛЬНОЙ ГРУППЕ И КОМБИНАТОРИКА ЗАМЫКАНИЙ B-ОРБИТ

§1. Введение и основной результат

1.1. Пусть G – комплексная редуктивная алгебраическая группа, B – борелевская подгруппа в G, Φ – система корней G, $W = W(\Phi)$ – группа Вейля системы корней Φ. Как известно, порядок Брюа–Шевалле на W описывает клеточную структуру многообразия флагов G/B (см., например, [3]). Обозначим через $\mathcal{I}(W)$ множество инволюций (то есть, элементов второго порядка) в W. В [15] Р. Ричардсон и Т. Спрингер показали, что ограничение порядка Брюа–Шевалле на $\mathcal{I}(A_{2n})$ описывает примыкания замкнутых B-орбит на симметрическом пространстве $\mathrm{SL}_{2n+1}(\mathbb{C})/\mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbb{C})$. В работе [2] Е. Багно и Й. Чернавски была предложена другая геометрическая интерпретация частично упорядоченного множества $\mathcal{I}(A_n)$, связанная с действием борелевской подгруппы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ на симметрических матрицах. Ф. Инчитти изучал $\mathcal{I}(\Phi)$ с чисто комбинаторной точки зрения в случае, когда Φ – классическая система корней (см. [10, 11]). В частности, он доказал, что это множество градуировано, вычислил функцию ранга и описал минимальные вырождения.

В [8] мы предложили ещё одну геометрическую интерпретацию $\mathcal{I}(A_n)$ в терминах *коприсоединённых* B-орбит. А именно, пусть $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ – полная линейная группа, тогда $\Phi = A_{n-1}$ и $W = S_n$ – симметрическая группа на n символах. Обозначим через $B = B_n$ группу обратимых верхнетреугольных матриц. Пусть $U = U_n$ – унитреугольная группа (группа верхнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали; она является унипотентным радикалом B). Далее,

---

Ключевые слова: порядок Брюа–Шевалле, коприсоединённые орбиты, инволюции в группе Вейля.

Работа была выполнена мной в рамках стажировки в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова (программа РФФИ “Мобильность молодых учёных”, грант 11-01-90703-моб_ст). Я благодарю Эрнеста Борисовича Винберга за согласие быть руководителем стажировки и РФФИ за финансовую поддержку.

пусть $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_n$ – пространство верхнетреугольных матриц с нулями на главной диагонали, а $\mathfrak{n}^*$ – сопряжённое к нему пространство. Группа B действует на $\mathfrak{n}$ сопряжениями, поэтому можно рассмотреть двойственное действие B на $\mathfrak{n}^*$. По каждой инволюции $\sigma \in \mathcal{I}(A_{n-1})$ можно построить некоторую B-орбиту $\Omega_\sigma \subseteq \mathfrak{n}^*$ (точные определения см. в пункте 1.2 или в [8, Subsection 1.2]). Согласно [8, теорема 1.1] (см. также теорему 1.3), орбита Ω_σ содержится в замыкании орбиты Ω_τ в топологии Зариского тогда и только тогда, когда инволюция σ меньше или равна инволюции τ в смысле порядка Брюа–Шевалле. В некотором смысле эти результаты "двойственны" результатам А. Мельниковой [12, 13, 14].

Здесь мы переносим эти результаты на случай системы корней $\Phi = C_n$. Более точно, пусть $G = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ – симплектическая группа, тогда $\Phi = C_n$ и W – гипероктаэдральная группа. Обозначим через U унипотентный радикал B, через $\mathfrak{n}$ – его алгебру Ли, а через $\mathfrak{n}^*$ – сопряжённое к ней пространство. Поскольку $\mathfrak{n}$ инвариантно относительно присоединённого действия борелевской подгруппы на своей алгебре Ли, можно рассмотреть двойственное действие B на $\mathfrak{n}^*$. С каждой инволюцией $\sigma \in \mathcal{I}(C_n)$ можно связать B-орбиту $\Omega_\sigma \subseteq \mathfrak{n}^*$ (см. определение 1.6). Основной результат работы заключается в следующем.

Теорема 1.1. *Пусть σ, τ – инволюции в группе Вейля системы корней C_n. Орбита Ω_σ содержится в замыкании орбиты Ω_τ в топологии Зариского тогда и только тогда, когда σ меньше или равна τ в смысле порядка Брюа–Шевалле.*

Опишем структуру работы. Остаток этого параграфа посвящён краткому описанию наших результатов об $\mathcal{I}(A_{n-1})$ (см. пункт 1.2); мы также даём точные определения для случая C_n (см. пункт 1.3). Параграф 2 содержит доказательство теоремы 1.1. Точнее, в пункте 2.1 мы, используя результаты Инчитти, показываем, что если $\sigma, \tau \in \mathcal{I}(C_n)$ и $\sigma \leqslant_B \tau$, то $\Omega_\sigma \subseteq \overline{\Omega}_\tau$, см. предложение 2.1. (Здесь $\leqslant_B$ обозначает порядок Брюа–Шевалле, а $\overline{Z}$ – замыкание множества $Z \subseteq \mathfrak{n}^*$ в топологии Зариского.) Затем, в пункте 2.2 мы определяем в комбинаторных терминах некоторый частичный порядок $\leqslant^*$ на $\mathcal{I}(C_n)$ и, применяя [8, теорема 1.10], доказываем предложение 2.3, утверждающее, что $\sigma \leqslant^* \tau$ эквивалентно $\sigma \leqslant_B \tau$. Наконец, в пункте 2.3 мы показываем, что если $\Omega_\sigma \subseteq \overline{\Omega}_\tau$, то $\sigma \leqslant^* \tau$, см. предложение 2.5. Таким образом, условия

$\sigma \leqslant_B \tau$, $\Omega_\sigma \subseteq \overline{\Omega}_\tau$ и $\sigma \leqslant^* \tau$ эквивалентны, что и завершает доказательство основного результата. Параграф 3 содержит обсуждения ряда связанных с основной теоремой результатов и гипотез. В пункте 3.1 мы доказываем формулу для размерности орбиты Ω (см. теорему 3.1), а в пункте 3.2 предлагаем гипотезу, связывающую орбиты, ассоциированные с инволюциями, с геометрией касательных конусов к многообразиям Шуберта.

1.2. Пусть $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ – полная линейная группа, $B = B_n$ – подгруппа обратимых верхнетреугольных матриц, $U = U_n$ – унитреугольная группа, то есть унипотентный радикал B, $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_n$ – пространство строго верхнетреугольных матриц, а $\mathfrak{n}^*$ – сопряжённое к нему пространство. Обозначим через Φ^+ соответствующее множество положительных корней и отождествим его с множеством $\{\epsilon_i - \epsilon_j, 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$, где $\{\epsilon_i\}_{i=1}^n$ – стандартный базис $\mathbb{R}^n$ (см., к примеру, [4]). Обозначим через $e_{i,j}$ стандартную (i,j)-ю матричную единицу, тогда $\{e_\alpha, \alpha \in \Phi^+\}$ – базис $\mathfrak{n}^+$, где $e_{\epsilon_i - \epsilon_j} = e_{i,j}$; пусть $\{e_\alpha^*, \alpha \in \Phi^+\}$ – двойственный базис пространства $\mathfrak{n}^*$.

Группа B действует на $\mathfrak{n}$ сопряжениями, поэтому возникает двойственное действие B на $\mathfrak{n}^*$: по определению,

$$\langle g.\lambda, x\rangle = \langle \lambda, g^{-1}xg\rangle,\ g \in B,\ x \in \mathfrak{n},\ \lambda \in \mathfrak{n}^*.$$

Обозначим через Ω_λ орбиту $\lambda \in \mathfrak{n}^*$ относительно этого действия. Подмножество $D \subset \Phi^+$ будем называть *ортогональным*, если оно состоит из попарно ортогональных корней. С каждым ортогональным подмножеством D можно связать элемент

$$f_D = \sum_{\alpha \in D} e_\alpha^* \in \mathfrak{n}^*.$$

Пусть $W = W(A_{n-1}) \cong S_n$ – группа Вейля G. Инволюция $\sigma \in \mathcal{I}(A_{n-1})$ может быть единственным образом представлена в виде произведения независимых 2-циклов: $\sigma = (i_1, j_1) \ldots (i_t, j_t)$, где $i_l < j_l$ и $i_1 < \ldots < i_t$. Если отождествить транспозицию $(i,j) \in S_n$ с отражением $r_{\epsilon_i - \epsilon_j}$ относительно гиперплоскости, ортогональной корню $\epsilon_i - \epsilon_j$, то

$$\sigma = \prod_{\alpha \in D} r_\alpha.$$

Ортогональное подмножество $D = \{\epsilon_{i_1} - \epsilon_{j_1}, \ldots, \epsilon_{i_t} - \epsilon_{j_t}\}$ назовём *носителем* σ и обозначим $\mathrm{Supp}(\sigma)$. Мы будем говорить, что B-орбита $\Omega_\sigma = \Omega_{f_D}$ *ассоциирована* с инволюцией σ.

Очень удобно отождествить $\mathfrak{n}^*$ с пространством $\mathfrak{n}^t$ строго нижнетреугольных матриц, полагая $e_\alpha^* = e_\alpha^t$. При таком отождествлении

$$\langle \lambda, x\rangle = \operatorname{tr} \lambda x,\ \ \lambda \in \mathfrak{n}^t,\ \ x \in \mathfrak{n}.$$

Имея это в виду, мы дальше будем обозначать $\mathfrak{n}^t$ через $\mathfrak{n}^*$ и рассматривать его как сопряжённое к $\mathfrak{n}$ пространство. Отметим, что рассматриваемое нами действие принимает вид

$$g.\lambda = (g\lambda g^{-1})_{\mathrm{low}},$$

$g \in B$, $\lambda \in \mathfrak{n}^*$, где A_{low} обозначает строго нижнетреугольную часть матрицы A. Далее, инволюции $\sigma \in \mathcal{I}(A_{n-1})$ соответствует её перестановочная 0–1 матрица X_σ: $(X_\sigma)_{i,j} = 1$ тогда и только тогда, когда $\sigma(i) = j$.

Пример 1.2. Удобно произвольную 0–1 матрицу A изображать в виде *расстановки ладей* на доске $n \times n$: по определению, в (i,j)-й клетке стоит ладья в том и только том случае, когда $A_{i,j} = 1$. Например, пусть $n = 6$, $\mathrm{Supp}(\sigma) = \{\epsilon_1 - \epsilon_4, \epsilon_3 - \epsilon_5\}$. На рисунке ниже мы изобразили матрицу X_σ (ладьи обозначены знаком $\otimes$).

$$X_\sigma = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline
1 & & & & \otimes & & \\ \hline
2 & & \otimes & & & & \\ \hline
3 & & & & & \otimes & \\ \hline
4 & \otimes & & & & & \\ \hline
5 & & & \otimes & & & \\ \hline
6 & & & & & & \otimes \\ \hline
\end{array}$$

По каждой 0–1 матрице A можно построить матрицу $R(A)$ по правилу

$$R(A)_{i,j} = \operatorname{rk} \pi_{i,j}(A),$$

где $\pi_{i,j}(A)$ – левая нижняя $(n-i+1)\times j$ подматрица матрицы A. Иными словами, $R(A)_{i,j}$ – это просто количество ладей, расположенных нестрого ниже и левее (i,j)-й клетки. В частности, положим $R_\sigma = R(X_\sigma)$ и $R_\sigma^* = (R_\sigma)_{\mathrm{low}}$. Будем для произвольных целочисленных матриц A and B писать $A \leqslant B$, если $A_{i,j} \leqslant B_{i,j}$ для всех i, j. Через $\leqslant_B$ обозначим стандартный порядок Брюа–Шевалле на S_n, а через $\overline{Z}$ – замыкание множества $Z \subseteq \mathfrak{n}^*$ в топологии Зариского. Примыкания B-орбит, ассоциированных с инволюциями, описываются следующим образом.

Теорема 1.3. *Пусть $\sigma, \tau \in \mathcal{I}(A_{n-1})$. Следующие условия эквивалентны:*

i) $\sigma \leqslant_B \tau$;
ii) $R_\sigma \leqslant R_\tau$;
iii) $R^*_\sigma \leqslant R^*_\tau$;
iv) $\Omega_\sigma \subseteq \overline{\Omega}_\tau$.

Доказательство. i) $\Leftrightarrow$ ii). См., например, [10, теорема 1.6.4].

ii) $\Rightarrow$ iii) очевидно. Обратная импликация вытекает из [8, теорема 1.10].

iii) $\Leftrightarrow$ iv). См. [8, теорема 1.7]. □

1.3. С этого момента $G = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ обозначает *симплектическую* группу, то есть

$$G = \{X \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C}) \mid X^t J X = J\}, \quad \text{где} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & s \\ -s & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь s – $n \times n$ матрица с единицами на побочной диагонали и нулями в остальных местах. Пусть $B = B_n \cap G$ – борелевская подгруппа G, состоящая из всех верхнетреугольных матриц из G. Унипотентный радикал группы B совпадает с группой $U = U_n \cap G$, состоящей из всех верхнетреугольных матриц из G с единицами на главной диагонали.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G имеет вид

$$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C}) = \{X \in \mathrm{Mat}_{2n}(\mathbb{C}) \mid X^t J + JX = 0\}.$$

Алгебра Ли группы B совпадает с пространством $\mathfrak{b}$ верхнетреугольных матриц из $\mathfrak{g}$, а алгебра Ли U – с пространством $\mathfrak{n}$ матриц из $\mathfrak{b}$ с нулями на главной диагонали. Обозначим через Φ^+ соответствующее множество положительных корней и отождествим его с множеством

$$\{\epsilon_i \pm \epsilon_j, 1 \leqslant i < j \leqslant n\} \cup \{2\epsilon_i, 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

где $\{\epsilon_i\}_{i=1}^n$ – стандартный базис $\mathbb{R}^n$ (см., например, [4]).

Пусть $\alpha \in \Phi^+$, положим тогда

$$e_\alpha = \begin{cases} e_{i,j} - e_{-j,-i}, & \text{если } \alpha = \epsilon_i - \epsilon_j, \\ e_{i,-j} + e_{j,-i}, & \text{если } \alpha = \epsilon_i + \epsilon_j, \\ e_{i,-i}, & \text{если } \alpha = 2\epsilon_i. \end{cases}$$

Здесь мы нумеруем строки и столбцы произвольной $2n \times 2n$ матрицы числами $1, 2, \ldots, n, -n, -n+1, \ldots, -1$ и через $e_{i,j}$ обозначаем стандартную (i,j)-ю матричную единицу. Множество $\{e_\alpha, \alpha \in \Phi^+\}$ является базисом $\mathfrak{n}$; пусть $\{e_\alpha^*, \alpha \in \Phi^+\}$ – двойственный базис пространства $\mathfrak{n}^*$.

Пространство $\mathfrak{n}$ инвариантно относительно присоединённого действия B на $\mathfrak{b}$, поэтому возникает двойственное действие B на $\mathfrak{n}^*$. По определению, если $g \in B$, $\lambda \in \mathfrak{n}^*$ и $x \in \mathfrak{n}$, то

$$\langle g.\lambda, x\rangle = \langle \lambda, \mathrm{Ad}_g^{-1}(x)\rangle,$$

где Ad обозначает присоединённое действие (на самом деле, $\mathrm{Ad}_g(x) = gxg^{-1}$). Через Ω_λ (соотв., через Θ_λ) обозначим B-орбиту (соотв., U-орбиту) матрицы $\lambda \in \mathfrak{n}^*$.

Как и выше, подмножество $D \subset \Phi^+$ назовём *ортогональным*, если оно состоит из попарно ортогональных корней. Пусть $D \subset \Phi$ – ортогональное подмножество и $\xi\colon D \to \mathbb{C}^\times$ – произвольное отображение; рассмотрим элементы $\mathfrak{n}^*$ вида

$$f_D = \sum_{\alpha \in D} e_\alpha^*, \quad f_{D,\xi} = \sum_{\alpha \in D} \xi(\alpha) e_\alpha^*.$$

(Если $D = \varnothing$, то положим $f_{D,\xi} = 0$.) Очевидно, $f_D = f_{D,\xi_0}$, где ξ_0 переводит все корни из D в 1. Обозначим $\Omega_D = \Omega_{f_D}$, $\Theta_D = \Theta_{f_D}$ и $\Theta_{D,\xi} = \Theta_{f_{D,\xi}}$. Ясно, что $\Theta_D \subseteq \Omega_D$; лемма 1.8 показывает, что в действительности $\Omega_D = \bigcup \Theta_{D,\xi}$, где объединение берётся по всем отображениям $\xi\colon D \to \mathbb{C}^\times$.

Замечание 1.4. Орбиты, ассоциированные с ортогональными подмножествами, играют важную роль в теории представлений группы U. Они были изучены автором в [6]. (Другие примеры и обобщения на другие унипотентные алгебраические группы см. в [7].)

Пусть $\sigma \in \mathcal{I}(\Phi)$ – инволюция в группе Вейля W системы корней Φ. Ортогональное подмножество $D \subset \Phi^+$ назовём *носителем* инволюции σ, если $\sigma = \prod_{\alpha \in D} r_\alpha$ и не существует таких $\alpha, \beta \in D$, что $\alpha - \beta \in \Phi^+$. Здесь $r_\alpha \in W$ обозначает отражение относительно гиперплоскости, ортогональной корню α, а произведение берётся в любом фиксированном порядке. Легко видеть, что у инволюции есть ровно один носитель, который мы обозначаем $\mathrm{Supp}(\sigma)$. Мы будем писать $\Omega_\sigma = \Omega_{\mathrm{Supp}(\sigma)}$ и $f_\sigma = f_{\mathrm{Supp}(\sigma)}$.

Пример 1.5. Пусть $D = \{\epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_1 + \epsilon_2\}$, $D' = \{2\epsilon_1, 2\epsilon_2\}$. Тогда $\sigma = \prod_{\alpha\in D} r_\alpha = \prod_{\alpha\in D'} r_\alpha$, но $(\epsilon_1+\epsilon_2)-(\epsilon_1-\epsilon_2) = 2\epsilon_2 \in \Phi^+$, поэтому носителем σ является подмножество D', а не D.

Определение 1.6. Будем говорить, что B-орбита Ω_σ *ассоциирована* с инволюцией σ.

Замечание 1.7. i) Если D – ортогональное подмножество C_n^+ и $\alpha - \beta \in \Phi^+$ для каких-то $\alpha, \beta \in D$, то, по [6, предложение 2.1], $\Theta_{D,\xi} = \Theta_{D_1,\xi_1}$ для любого отображения $\xi\colon D \to \mathbb{C}^\times$, где $D_1 = D \setminus \{\beta\}$ и $\xi_1 = \xi|_{D_1}$. Применяя лемму 1.8, мы заключаем, что $\Omega_D = \Omega_{D_1}$, в то время как $\sigma \neq \sigma_1$, где $\sigma = \prod_{\alpha\in D} r_\alpha$, $\sigma_1 = \prod_{\alpha\in D_1} r_\alpha$. Заметим, однако, что если $\alpha - \beta \in \Phi^+$, то обязательно $\alpha = \epsilon_i + \epsilon_j$, $\beta = \epsilon_i - \epsilon_j$ для каких-то i, j. Таким образом, $\mathrm{Supp}(\sigma) = D'$, где D' получается из D заменой каждой пары корней $\{\epsilon_i - \epsilon_j, \epsilon_i + \epsilon_j\}$ на пару $\{2\epsilon_i, 2\epsilon_j\}$.

ii) К сожалению, мы пока *не* знаем, как определить носитель инволюции для остальных систем корней. Например, если $\Phi = D_n$, $n \geqslant 4$, то Φ^+ может быть отождествлено с $\{\epsilon_i \pm \epsilon_j, 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$. Если

$$D = \{\epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_1 + \epsilon_2, \epsilon_3 - \epsilon_4, \epsilon_3 + \epsilon_4\},$$
$$D' = \{\epsilon_1 - \epsilon_3, \epsilon_1 + \epsilon_3, \epsilon_2 - \epsilon_4, \epsilon_2 + \epsilon_4\},$$

то $\sigma = \prod_{\alpha\in D} r_\alpha = \prod_{\alpha\in D'} r_\alpha \in \mathcal{I}(D_n)$, то есть у нас есть два кандидата на роль $\mathrm{Supp}(\sigma)$ – и нам неизвестен способ выбрать одного из них.

Удобно отождествить $\mathfrak{n}^*$ с пространством $\mathfrak{n}^t$ строго нижнетреугольных матриц из $\mathfrak{g}$, полагая $e_\alpha^* = e_\alpha^t$. С учётом такого отождествления,

$$\langle\lambda, x\rangle = \mathrm{tr}\,\lambda' x, \quad \lambda \in \mathfrak{n}^t,\ x \in \mathfrak{n},$$

где матрица λ' определяется следующим образом. Положим $\Phi_0^+ = \{\epsilon_i \pm \epsilon_j, 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$, $\Phi_1^+ = \{2\epsilon_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$; очевидно, $\Phi^+ = \Phi_0^+ \cup \Phi_1^+$, так что $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_0 \oplus \mathfrak{n}_1$ как векторные пространства, где $\mathfrak{n}_0$ (соотв., $\mathfrak{n}_1$) натянуто на e_α, $\alpha \in \Phi_0^+$ (соотв., $\alpha \in \Phi_1^+$); если теперь $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1$, $\lambda_0 \in \mathfrak{n}_0$, $\lambda_1 \in \mathfrak{n}_1$, то, по определению, $\lambda' = 1/2\lambda_0 + \lambda_1$. Имея это в виду, мы в дальнейшем будем обозначать $\mathfrak{n}^t$ через $\mathfrak{n}^*$ и трактовать его как сопряжённое к $\mathfrak{n}$ пространство. Отметим, что если $g \in B$, $\lambda \in \mathfrak{n}^*$, то рассматриваемое нами действие имеет вид

$$g.\lambda = (g\lambda g^{-1})_{\mathrm{low}},$$

где A_{low}, как и раньше, обозначает строго нижнетреугольную часть матрицы A (см., к примеру, [1, p. 410]).

Лемма 1.8. *Пусть D – ортогональное подмножество C_n^+. Тогда*[1] $\Omega_D = \bigcup \Theta_{D,\xi}$, *где объединение берётся по всем отображениям* $\xi \colon D \to \mathbb{C}^\times$.

Доказательство. Хорошо известно (см., например, [5, 15.1]), что *экспоненциальное* отображение

$$\exp \colon \mathfrak{n} \to U \colon x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

корректно определено и является на самом деле изоморфизмом аффинных многообразий. Для любых $\alpha \in \Phi^+$, $s \in \mathbb{C}^\times$ положим

$$x_\alpha(s) = \exp(se_\alpha) = 1 + se_\alpha, \quad x_{-\alpha}(s) = x_\alpha(s)^t,$$
$$w_\alpha(s) = x_\alpha(s)x_{-\alpha}(-s^{-1})x_\alpha(s), \quad h_\alpha(s) = w_\alpha(s)w_\alpha(1)^{-1}.$$

Тогда $h_\alpha(s)$ – диагональная матрица из B.

Пусть $\xi \colon D \to \mathbb{C}^\times$ – произвольное отображение и $\alpha \in D$. Выберем любое число $s \in \mathbb{C}^\times$. Обозначим

$$s' = \begin{cases} s^{-1}, & \text{если} \quad \alpha = \epsilon_i + \epsilon_j, \\ s, & \text{если} \quad \alpha = \epsilon_i - \epsilon_j, \\ \sqrt{s^{-1}}, & \text{если} \quad \alpha = 2\epsilon_i, \end{cases}$$

и $\alpha' = 2\epsilon_i$ во всех этих случаях. (Здесь $\sqrt{s^{-1}}$ – любое из двух чисел, для которых $(\sqrt{s^{-1}})^2 = s^{-1}$.) Тривиально проверяется прямыми матричными вычислениями, что

$$h_{\alpha'}(s').f_{D,\xi} = \sum_{\beta \in D, \beta \neq \alpha} \xi(\beta)e_\beta^* + s\xi(\alpha)e_\alpha^*.$$

Значит,

$$\left(\prod_{\alpha \in D} h_{\alpha'}(\xi(\alpha)')\right).f_D = f_{D,\xi},$$

[1] Ср. [8, лемма 2.1].

поэтому $\Theta_{D,\xi} \subseteq \Omega_D$.

С другой стороны, пусть $h \in H$, где H – подгруппа диагональных матриц из G. Мы утверждаем, что $h.f_{D,\xi} = f_{D,\xi'}$ для некоторого отображения ξ'. Действительно, поскольку H порождается как группа элементами $h_\alpha(s)$, $\alpha \in \Phi^+$, $s \in \mathbb{C}^\times$, достаточно рассмотреть случай, когда $h = h_\alpha(s)$ для каких-то α и s. Но в этом случае всё очевидно следует из рассуждений выше.

Группа B изоморфна как алгебраическая группа полупрямому произведению $U \rtimes H$ [5, 19.1]. В частности, любой $g \in B$ однозначно представляется в виде произведения $g = uh$, $u \in U$, $h \in H$. Если теперь $\xi\colon D \to \mathbb{C}^\times$ – такое отображение, что $h.f_D = f_{D,\xi}$, то $g.f_D = u.f_{D,\xi} \in \Theta_{D,\xi}$. Это завершает доказательство. $\square$

§2. Доказательство основной теоремы

2.1. В этом пункте мы докажем, что если $\sigma, \tau \in \mathcal{I}(C_n)$ и σ меньше или равна τ в смысле порядка Брюа–Шевалле, то Ω_σ содержится в $\overline{\Omega}_\tau$ – замыкании Ω_τ в топологии Зариского. Обозначим множество *фундаментальных* корней $\{\epsilon_1 - \epsilon_2, \ldots, \epsilon_{n-1} - \epsilon_n, 2\epsilon_n\}$ через Π. Отражение r_α называется *фундаментальным*, если $\alpha \in \Pi$. Любое разложение элемента $w \in W$ в произведение фундаментальных отражений, имеющее минимальную длину, называется *приведённым*. Длина $l(w)$ любого приведённого разложения называется *длиной* элемента w. Пусть $w = r_{\alpha_1} \ldots r_{\alpha_l}$ – какое-то приведённое разложение. По определению *порядка Брюа–Шевалле* $\leqslant_B$ на W,

$$\{w' \in W \mid w' \leqslant_B w\} = \{r_{\alpha_{i_1}} \ldots r_{\alpha_{i_t}},\ t \leqslant l,\ i_1 < \ldots < i_t\}.$$

Пусть $\sigma, \tau \in \mathcal{I}(\Phi)$. Мы будем говорить, что инволюция τ *накрывает* инволюцию σ, и писать $\sigma \lessdot \tau$, если $\sigma <_B \tau$ и не существует такого $w \in \mathcal{I}(\Phi)$, что $\sigma <_B w <_B \tau$. В статье [10] Ф. Инчитти рассмотрел ограничение $\leqslant_B$ на множество $\mathcal{I}(\Phi)$ с комбинаторной точки зрения. В частности, для данной инволюции τ он описал множество $L(\tau) = \{\sigma \in \mathcal{I}(\Phi) \mid \sigma \lessdot \tau\}$ (см. [10, с. 75–81]). Мы приводим переформулировку его результатов в наших терминах в Приложении.

Предложение 2.1. *Пусть σ, τ – инволюции в $W(C_n)$. Если $\sigma \leqslant_B \tau$, то $\Omega_\sigma \subseteq \overline{\Omega}_\tau$.*

Доказательство. Ясно, что найдутся такие $\tau_1, \ldots, \tau_r \in \mathcal{I}(\Phi)$, что $\tau_1 = \sigma$, $\tau_r = \tau$ и $\tau_i \lessdot \tau_{i+1}$ для любого $1 \leqslant i < r$, поэтому без ограничения общности можно считать, что $\sigma \lessdot \tau$. Хорошо известно, что

$\overline{\Omega}_\tau$ совпадает с $\overline{\Omega}_\tau^{\mathbb{C}}$ – замыканием Ω_τ в комплексной топологии, поэтому достаточно построить такие матрицы $g(s) \in B$, $s \in \mathbb{C}^\times$, что $g(s).f_\sigma \to f_\tau$ при $s \to 0$.

Доказательство состоит в разборе случаев. Например, пусть

$$\operatorname{Supp}(\sigma) \setminus \operatorname{Supp}(\tau) = \{\epsilon_i + \epsilon_j, 2\epsilon_k\},$$
$$\operatorname{Supp}(\tau) \setminus \operatorname{Supp}(\sigma) = \{2\epsilon_i, \epsilon_k + \epsilon_j\}$$

для каких-то $1 \leqslant i < k < j \leqslant n$ (см. случай 5 в Приложении). Положим

$$g(s) = h_{\epsilon_i - \epsilon_k}(s^{-1}) \cdot x_{\epsilon_i - \epsilon_k}(s) \cdot x_{\epsilon_k - \epsilon_j}((2s^2)^{-1}) \cdot x_{\epsilon_i - \epsilon_j}(-s^{-1})$$

и $f = g(s).f_\tau$. Непосредственными матричными вычислениями проверяется, что

$$f(e_\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если либо } \alpha = \epsilon_i + \epsilon_j, \text{ либо } \alpha = 2\epsilon_k, \\ 0, & \text{если } \alpha = \epsilon_k + \epsilon_j, \\ -s, & \text{если } \alpha = \epsilon_i + \epsilon_k, \\ s^2, & \text{если } \alpha = 2\epsilon_i, \\ f_\tau(e_\alpha) & \text{иначе.} \end{cases}$$

Это означает, что $f \to f_\sigma$ при $s \to 0$.

Остальные случаи разбираются аналогично, см. Приложение. $\square$

2.2. Обозначим через $S_{\pm n}$ симметрическую группу на $2n$ символах $\{1, 2, \ldots, n, -n, -n+1, \ldots, -1\}$ и положим

$$W' = \{w \in S_{\pm n} \mid w(-i) = -w(i) \text{ для всех } 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Известно, что отображение $W \to W' \colon w \mapsto w'$, заданное правилом

$$r'_{\epsilon_i - \epsilon_j} = (i, j)(-i, -j),$$
$$r'_{\epsilon_i + \epsilon_j} = (i, -j)(-i, j),$$
$$r'_{2\epsilon_i} = (i, -i),$$

является изоморфизмом групп. Отметим, что если $\sigma \in \mathcal{I}(C_n)$, то σ' будет инволюцией в $S_{\pm n}$.

С каждой инволюцией $\sigma \in \mathcal{I}(C_n)$ мы свяжем 0–1 матрицу X_σ, для которой $(X_\sigma)_{i,j} = 1$ тогда и только тогда, когда $\sigma'(i) = j$ (напомним, что мы нумеруем строки и столбцы $2n \times 2n$ матриц индексами $1, \ldots, n, -n, \ldots, -1$).

Пример 2.2. Весьма удобно изображать 0–1 матрицу A как расстановку ладей на доске размера $2n \times 2n$: по определению, в (i,j)-й клетке стоит ладья в том и только том случае, когда $A_{i,j} = 1$. К примеру, путь $n = 4$, $\mathrm{Supp}(\sigma) = \{\epsilon_1 - \epsilon_4, 2\epsilon_2\}$. На рисунке ниже мы изобразили матрицу X_σ (ладьи обозначены символом $\otimes$).

$$X_\sigma = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & -4 & -3 & -2 & -1 \\ \hline
1 & & & & \otimes & & & & \\ \hline
2 & & & & & & & \otimes & \\ \hline
3 & & & \otimes & & & & & \\ \hline
4 & \otimes & & & & & & & \\ \hline
-4 & & & & & & & & \otimes \\ \hline
-3 & & & & & & \otimes & & \\ \hline
-2 & & \otimes & & & & & & \\ \hline
-1 & & & & & \otimes & & & \\ \hline
\end{array}$$

Как и выше, по любой 0–1 матрице A мы построим матрицу $R(A)$ по правилу

$$R(A)_{i,j} = \mathrm{rk}\,\pi_{i,j}(A),$$

где $\pi_{i,j}$ переводит A в её подматрицу со строками $i, \ldots, -1$ и столбцами $1, \ldots, j$. (Другими словами, $R(A)_{i,j}$ – это просто количество ладей, расположенных нестрого ниже и левее (i,j)-й клетки.) В частности, положим $R_\sigma = R(X_\sigma)$ и $R^*_\sigma = (R_\sigma)_{\mathrm{low}}$.

Для любых целочисленных матриц A и B по-прежнему будем писать $A \leqslant B$, если $A_{i,j} \leqslant B_{i,j}$ для всех i, j. Пусть $\sigma, \tau \in \mathcal{I}(C_n)$. Согласно [10, теорема 1.6.7],

$$\sigma \leqslant_B \tau \text{ тогда и только тогда, когда } R_\sigma \leqslant R_\tau.$$

(Обратим внимание, что Инчитти использует другой порядок фундаментальных корней.) Определим ещё один частичный порядок на $\mathcal{I}(C_n)$. А именно, положим

$$\sigma \leqslant^* \tau, \text{ если } R^*_\sigma \leqslant R^*_\tau.$$

Понятно, что из $\sigma \leqslant_B \tau$ следует $\sigma \leqslant^* \tau$. Но обратная импликация сразу вытекает из теоремы 1.3, ибо σ' и τ' являются инволюциями в $S_{\pm n}$. Это доказывает

Предложение 2.3. *Пусть σ, τ – инволюции в $W(C_n)$. Тогда $\sigma \leqslant_B \tau$ равносильно $\sigma \leqslant^* \tau$.*

2.3. Пусть $\sigma, \tau \in \mathcal{I}(C_n)$. Чтобы завершить доказательство теоремы 1.1, нам осталось проверить, что если $\Omega_\sigma \subseteq \overline{\Omega}_\tau$, то $\sigma \leqslant^* \tau$. Для этого нам потребуется следующая

Лемма 2.4. *Пусть $\sigma \in \mathcal{I}(C_n)$. Тогда*[2] $\operatorname{rk} \pi_{i,j}(\lambda) = (R^*_\sigma)_{i,j}$ *для любых $\lambda \in \Omega_\sigma$.*

Доказательство. Заметим для начала, что $(R^*_\sigma)_{i,j} = \operatorname{rk} \pi_{i,j}(f_\sigma)$. По лемме 1.8, $\Omega_\sigma = \bigcup_{\xi\colon D \to \mathbb{C}^\times} \Omega_{D,\xi}$, где $D = \operatorname{Supp}(\sigma)$. Пусть $\xi\colon D \to \mathbb{C}^\times$ – любое отображение. Поскольку $\operatorname{rk} \pi_{i,j}(f_{D,\xi}) = \operatorname{rk} \pi_{i,j}(f_\sigma) = (R^*_\sigma)_{i,j}$ для всех i, j, достаточно проверить, что $\operatorname{rk} \pi_{i,j}(\lambda) = \operatorname{rk} \pi_{i,j}(u.\lambda)$ для любых $u \in U$, $\lambda \in \mathfrak{n}^*$. Но это сразу вытекает из доказательства [8, Lemma 2.2], поскольку u является верхнетреугольной матрицей с единицами на главной диагонали, λ – строго нижнетреугольной матрицей и $u.\lambda = (u\lambda u^{-1})_{\text{low}}$. □

Теперь всё готово, чтобы доказать следующий результат.

Предложение 2.5. *Пусть σ, τ – инволюции в $W(C_n)$. Если $\Omega_\sigma \subseteq \overline{\Omega}_\tau$, то*[3] *имеем $\sigma \leqslant^* \tau$.*

Доказательство. Пусть $\sigma \nleqslant^* \tau$. Это означает, что найдутся i, j, для которых $(R^*_\sigma)_{i,j} > (R^*_\tau)_{i,j}$. Положим

$$Z = \{f \in \mathfrak{n}^* \mid \operatorname{rk} \pi_{r,s}(f) \leqslant (R^*_\tau)_{r,s} \text{ для всех } r, s\}.$$

Ясно, что Z замкнуто в топологии Зариского. Лемма 2.4 показывает, что $\Omega_\tau \subseteq Z$, поэтому и $\overline{\Omega}_\tau \subseteq Z$. Но $f_\sigma \notin Z$, то есть $\Omega_\sigma \nsubseteq Z$ – противоречие. □

Доказательство теоремы 1.1 завершено.

§3. Заключительные замечания

3.1. Пусть $\sigma \in \mathcal{I}(C_n)$. Будучи орбитой связной унипотентной группы на аффинном многообразии $\mathfrak{n}^*$, Ω_σ является замкнутым подмногообразием $\mathfrak{n}^*$. В этом пункте мы вычисляем размерность Ω_σ. Напомним, что через $l(w)$ мы обозначаем длину элемента $w \in W$.

[2] Ср. [8, лемма 2.2].

[3] Ср. [8, предложение 2.3].

Теорема 3.1. *Пусть* $\sigma \in W(C_n)$ *– инволюция. Тогда*[4] $\dim \Omega_\sigma = l(\sigma)$.

Доказательство. Положим $D = \mathrm{Supp}(\sigma)$. Мы утверждаем, что если ξ_1, ξ_2 – два разных отображения из D в $\mathbb{C}^\times$, то $\Theta_{D,\xi_1} \neq \Theta_{D,\xi_2}$. В самом деле, пусть $\widetilde{U} = U_n$ – унитреугольная группа. Поскольку σ' – инволюция в $S_{\pm n}$, из [9, теорема 1.4] следует, что $\widetilde{\Theta}_{D,\xi_1} \neq \widetilde{\Theta}_{D,\xi_2}$, где $\widetilde{\Theta}_{D,\xi_1}$ (соотв., $\widetilde{\Theta}_{D,\xi_2}$) обозначает $\widetilde{U}$-орбиту элемента f_{D,ξ_1} (соотв., элемента f_{D,ξ_2}) относительно действия группы $\widetilde{U}$ на пространстве всех строго нижнетреугольных матриц, определённого правилом

$$u.\lambda = (u\lambda u^{-1})_{\mathrm{low}},\ u \in \widetilde{U},\ \lambda \in \widetilde{\mathfrak{n}}^*.$$

Поскольку $U \subseteq \widetilde{U}$, мы заключаем, что $\Theta_{D,\xi_1} \subseteq \widetilde{\Theta}_{D,\xi_1}$ и $\Theta_{D,\xi_2} \subseteq \widetilde{\Theta}_{D,\xi_2}$, а потому $\Theta_{D,\xi_1} \neq \Theta_{D,\xi_2}$, как и должно быть.

Обозначим через $Z_B = \mathrm{Stab}_B f_\sigma$ стабилизатор f_σ в B. Тогда

$$\dim \Omega_\sigma = \dim B - \dim Z_B.$$

Напомним, что $B \cong U \rtimes H$ как алгебраические группы. В процессе доказательства леммы 1.8 мы установили, что если $h \in H$, то существует такое отображение $\xi \colon D \to \mathbb{C}^\times$, что $h.f_\sigma = f_{D,\xi}$. Значит, если $g = uh \in Z_B$, то

$$f_\sigma = (uh).f_\sigma = u.f_{D,\xi},$$

то есть $f_\sigma \in \Theta_{D,\xi}$. Из первого абзаца доказательства теперь вытекает, что $f_\sigma = f_{D,\xi}$. Это означает, что отображение

$$Z_U \times Z_H \to Z_B \colon (u, h) \mapsto uh,$$

где $Z_U = \mathrm{Stab}_U f_\sigma$ (соотв., $Z_H = \mathrm{Stab}_H f_\sigma$) – это стабилизатор f_σ в U (соотв., в H) является изоморфизмом алгебраических многообразий. Тем самым,

$$\dim Z_B = \dim Z_U + \dim Z_H.$$

Согласно [6, теорема 1.2], $\dim \Theta_D = l(\sigma) - |D|$, поэтому

$$\dim Z_U = \dim U - \dim \Theta_D = \dim U - l(\sigma) + |D|.$$

С другой стороны, положим $X = \bigcup_{\xi\colon D \to \mathbb{C}^\times} \{f_{D,\xi}\}$. Из леммы 1.8 и первого абзаца доказательства следует, что $X = \{h.f_\sigma, h \in H\}$ – это в точности H-орбита элемента f_σ. Получается, что

$$\dim Z_H = \dim H - \dim X = \dim H - |D|,$$

[4]Ср. [8, предложение 4.1].

ибо X изоморфно как аффинное многообразие произведению $|D|$ копий $\mathbb{C}^{\times}$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\dim \Omega_\sigma &= \dim B - \dim Z_B = (\dim U + \dim H) - (\dim Z_U + \dim Z_H)\\ &= \dim U + \dim H - (\dim U - l(\sigma) - |D|) - (\dim H - |D|) = l(\sigma).\end{aligned}$$

Теорема доказана. □

3.2. Остаток работы посвящён изложению (гипотетического) геометрического подхода к орбитам, ассоциированным с инволюциями, в терминах касательных конусов к многообразиям Шуберта. Группа W изоморфна $N_G(H)/H$, где $N_G(H)$ – нормализатор H в G. *Многообразие флагов* $\mathcal{F} = G/B$ распадается в объединение $\mathcal{F} = \bigcup_{w\in W} X_w^\circ$, где $X_w^\circ = B\dot{w}B/B$ – *клетка Шуберта*. (Здесь $\dot{w}$ обозначает любого представителя w в $N_G(H)$.) По определению, *многообразие Шуберта* X_w – это замыкание X_w° в $\mathcal{F}$ в топологии Зариского. Заметим, что $p = X_{\mathrm{id}} = B/B$ содержится во всех X_w, $w \in W$. Кроме того, $X_w \subseteq X_{w'}$ тогда и только тогда, когда $w \leqslant_B w'$. Пусть T_w – касательное пространство, а C_w – касательный конус к X_w в точке p (подробное описание см. в [3]); тогда $C_w \subseteq T_w$, причём если p – регулярная точка X_w, то $C_w = T_w$. Разумеется, если $w \leqslant_B w'$, то $C_w \subseteq C_{w'}$.

Обозначим через $T = T_p\mathcal{F}$ касательное пространство к $\mathcal{F}$ в точке p. Оно может быть отождествлено с $\mathfrak{n}^*$: раз $\mathcal{F} = G/B$, то T изоморфно факторпространству $\mathfrak{g}/\mathfrak{b} \cong \mathfrak{n}^*$. Далее, B действует на $\mathcal{F}$ левыми умножениями. Поскольку p инвариантна относительно этого действия, возникает действие на касательном пространстве $T = \mathfrak{n}^*$. Легко проверить, что это в точности рассматриваемое нами действие B на $\mathfrak{n}^*$. Касательный конус $C_w \subseteq T_w \subseteq T = \mathfrak{n}^*$ всегда B-инвариантен, поэтому распадается на B-орбиты. Более того, $\overline{\Omega}_\sigma \subseteq C_\sigma$ для всех $\sigma \in \mathcal{I}(C_n)$.

Хорошо известно, что C_w – подмногообразие T_w размерности $\dim C_w = l(w)$ [3, Chapter 2, Section 2.6]. Пусть $\sigma \in \mathcal{I}(C_n)$. Раз Ω_σ неприводима, то и $\overline{\Omega}_\sigma$ тоже. Теорема 3.1 гласит, что $\dim \overline{\Omega}_\sigma = \dim \Omega_\sigma = l(\sigma)$, то есть $\overline{\Omega}_\sigma$ – неприводимая компонента C_σ максимальной размерности.

Гипотеза 3.2. *Пусть $\sigma \in W(C_n)$ – инволюция. Тогда*[5] *замыкание B-орбиты Ω_σ совпадает с касательным конусом C_w к многообразию Шуберта X_w в точке $p = B/B$.*

---

[5] Ср. [8, 1.11].

Из этой гипотезы следует, среди прочего, что если $\sigma \leqslant_B \tau$, то $\Omega_\sigma \subseteq \overline{\Omega}_\tau$.

Приложение

Пусть $\tau \in \mathcal{I}(C_n)$, $L(\tau) = \{\sigma \in \mathcal{I}(C_n) \mid \sigma \triangleleft \tau\}$. Здесь мы в наших терминах воспроизводим описание Инчитти множества $L(\tau)$, которым мы пользовались при доказательстве предложения 2.1. Более точно, для каждой пары (σ, τ), $\sigma \in L(\tau)$, мы предъявляем матрицу $g(s) \in B$, $s \in \mathbb{C}^\times$, такую, что $f = g(s).f_\tau \to f_\sigma$ при $s \to 0$. Ввиду [10, p. 96], $\sigma \in L(\tau)$ в том и только том случае, когда (σ, τ) – одна из указанных ниже пар. Это завершает доказательство предложения 2.1. Во втором столбце таблицы мы приводим номер случая из работы [10]. (Подчеркнём, что Инчитти использует там другой порядок фундаментальных корней.) Отметим также, что пары (σ, τ), $\sigma \in L(\tau)$, должны удовлетворять некоторым дополнительным условиям (см. [10, с. 76–81]), от которых, впрочем, матрица $g(s)$ не зависит. (В частности, все ϵ_i, присутствующие в третьем и четвёртом столбцах таблицы, удовлетворяют условию $(\beta, \epsilon_i) = 0$ для всех $\beta \in D_\sigma \cap D_\tau$.) Мы пишем $D_\sigma = \mathrm{Supp}(\sigma)$ и $D_\tau = \mathrm{Supp}(\tau)$. Через I мы обозначаем мнимую единицу: $I^2 = -1$. Для простоты, мы опускаем корень α в последнем столбце таблицы, если $f(e_\alpha) = f_\tau(e_\alpha)$.

		$D_\sigma \setminus D_\tau$	$D_\tau \setminus D_\sigma$	$g(s)$	$f(e_\alpha)$, $\alpha \in \Phi^+$
1	$(A1, M1)$	$\varnothing$	$2\epsilon_i$	$h_{2\epsilon_i}(s^{-1})$	s^2, $\alpha = 2\epsilon_i$.
2	$(A1, M5)$	$\epsilon_i + \epsilon_j$, $i < j$	$2\epsilon_i$, $2\epsilon_j$	$h_{2\epsilon_i}(s^{-1})\times$ $h_{2\epsilon_j}(-Is)\times$ $x_{\epsilon_i-\epsilon_j}(I)$	s^2, $\alpha = 2\epsilon_i$, 0, $\alpha = 2\epsilon_j$, 1, $\alpha = \epsilon_i + \epsilon_j$.
3	$(A1, M6)$	$\epsilon_i - \epsilon_j$, $i < j$	$2\epsilon_i$	$h_{2\epsilon_i}(s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_i+\epsilon_j}(s^{-1})$	s^2, $\alpha = 2\epsilon_i$, 1, $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j$.
4	$(A2, M2)$	$2\epsilon_j$	$2\epsilon_i$, $i < j$	$h_{2\epsilon_i}(s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_i-\epsilon_j}(1)$	s^2, $\alpha = 2\epsilon_i$, $-s$, $\alpha = \epsilon_i + \epsilon_j$, 1, $\alpha = 2\epsilon_j$.
5	$(A2, M5)a$	$\epsilon_i + \epsilon_j$, $2\epsilon_k$, $i < k < j$	$2\epsilon_i$, $\epsilon_k + \epsilon_j$	$h_{\epsilon_i-\epsilon_k}(s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_i-\epsilon_k}(s)\times$ $x_{\epsilon_k-\epsilon_j}((2s^2)^{-1})\times$ $x_{\epsilon_i-\epsilon_j}(-s^{-1})$	s^2, $\alpha = 2\epsilon_i$, $-s$, $\alpha = \epsilon_i + \epsilon_k$, 1, $\alpha = \epsilon_i + \epsilon_j$, 1, $\alpha = 2\epsilon_k$, 0, $\alpha = \epsilon_k + \epsilon_j$.
6	$(A2, M5)b$	$\epsilon_i - \epsilon_j$, $2\epsilon_k$, $i < k < j$	$2\epsilon_i$, $\epsilon_k - \epsilon_j$	$h_{\epsilon_i+\epsilon_k}(s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_i-\epsilon_k}(s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_i+\epsilon_j}(s^{-1})\times$ $h_{\epsilon_k-\epsilon_j}(s)$	s^2, $\alpha = 2\epsilon_i$, $-s$, $\alpha = \epsilon_i + \epsilon_k$, 1, $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j$, 1, $\alpha = 2\epsilon_k$, 0, $\alpha = \epsilon_k - \epsilon_j$.
7	$(A2, M6)$	$\epsilon_i - \epsilon_k$, $2\epsilon_j$, $i < k < j$	$2\epsilon_i$	$h_{\epsilon_i-\epsilon_k}(s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_i+\epsilon_k}(s^{-2})\times$ $x_{\epsilon_i-\epsilon_j}(1)$	s^2, $\alpha = 2\epsilon_i$, $-s$, $\alpha = \epsilon_i + \epsilon_j$, 1, $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_k$, 1, $\alpha = 2\epsilon_j$.

8	$(A3, M4)$	$\epsilon_i - \epsilon_k,\, 2\epsilon_j,$ $i < k < j$	$\epsilon_i - \epsilon_j,\, 2\epsilon_k$	$h_{2\epsilon_k}(s^{-2})\times$ $h_{\epsilon_i-\epsilon_j}(s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_k-\epsilon_j}(s)$	$s^4, \quad \alpha = 2\epsilon_k,$ $s^2, \quad \alpha = \epsilon_i - \epsilon_j,$ $-s^2, \quad \alpha = \epsilon_k + \epsilon_j,$ $1, \quad \alpha = \epsilon_i - \epsilon_k,$ $1, \quad \alpha = 2\epsilon_j.$
9	$(A3, M5)$	$\epsilon_i + \epsilon_j,\, 2\epsilon_k,$ $i < k < j$	$\epsilon_i + \epsilon_k,\, 2\epsilon_j$	$h_{2\epsilon_k}(s^{-1})\times$ $h_{2\epsilon_j}(-s)\times$ $x_{\epsilon_i-\epsilon_k}(-(2s^2)^{-1})\times$ $x_{\epsilon_i-\epsilon_j}(-(2s)^{-1})\times$ $x_{\epsilon_k-\epsilon_j}(s)$	$s, \quad \alpha = \epsilon_i + \epsilon_k,$ $1, \quad \alpha = \epsilon_i + \epsilon_j,$ $1, \quad \alpha = 2\epsilon_k,$ $0, \quad \alpha = 2\epsilon_j.$
10	$(A3, M6)$	$\epsilon_i - \epsilon_j,\, 2\epsilon_k,$ $i < k < j$	$\epsilon_i + \epsilon_k$	$x_{\epsilon_i-\epsilon_k}(-(2s)^{-1})\times$ $x_{\epsilon_k+\epsilon_j}(s^{-1})\times$ $h_{\epsilon_i+\epsilon_j}(s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_i+\epsilon_j}(-1/2)$	$s, \quad \alpha = \epsilon_i + \epsilon_k,$ $1, \quad \alpha = \epsilon_i - \epsilon_j,$ $1, \quad \alpha = 2\epsilon_k.$
11	$(A4, M3)$	$\epsilon_i + \epsilon_j$	$\epsilon_i + \epsilon_k,$ $i < k < j$	$h_{\epsilon_i-\epsilon_j}(s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_k-\epsilon_j}(-1)$	$s, \quad \alpha = \epsilon_i + \epsilon_k,$ $1, \quad \alpha = \epsilon_i + \epsilon_j.$
12	$(A4, M4)a$	$\epsilon_k - \epsilon_j,$ $\epsilon_i + \epsilon_l,$ $i < k < j < l$	$\epsilon_i + \epsilon_j,$ $\epsilon_k - \epsilon_l$	$x_{\epsilon_j-\epsilon_l}(s^{-1})\times$ $h_{\epsilon_j-\epsilon_l}(s^{-1})\times$ $h_{2\epsilon_i}(-1)$	$s, \quad \alpha = \epsilon_k - \epsilon_l,$ $-s, \quad \alpha = \epsilon_i + \epsilon_l,$ $1, \quad \alpha = \epsilon_k - \epsilon_j,$ $1, \quad \alpha = \epsilon_i + \epsilon_l.$
13	$(A4, M4)b$	$\epsilon_i - \epsilon_j,$ $\epsilon_k + \epsilon_l,$ $i < k < j < l$	$\epsilon_i - \epsilon_l,$ $\epsilon_k + \epsilon_j$	$x_{\epsilon_j-\epsilon_l}(-s^{-1})\times$ $h_{\epsilon_j-\epsilon_l}(s^{-1})\times$ $h_{2\epsilon_i}(-1)$	$s, \quad \alpha = \epsilon_k + \epsilon_l,$ $-s, \quad \alpha = \epsilon_i - \epsilon_l,$ $1, \quad \alpha = \epsilon_i - \epsilon_j,$ $1, \quad \alpha = \epsilon_k + \epsilon_l.$

14	$(A4, M4)c$	$\epsilon_i + \epsilon_j$, $i < j$	$\epsilon_i + \epsilon_j$	$h_{2\epsilon_j}(-s^{-1})\times$ $x_{2\epsilon_j}(-s)$	s, $\alpha = \epsilon_i + \epsilon_j$, 1, $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j$.
15	$(A4, M5)a$	$\epsilon_i + \epsilon_j$, $\epsilon_k + \epsilon_l$, $i < k < j < l$	$\epsilon_i + \epsilon_k$, $\epsilon_j + \epsilon_l$	$h_{2\epsilon_i}(-1)\times$ $h_{\epsilon_i-\epsilon_l}(s^{-1})\times$ $h_{\epsilon_k-\epsilon_j}(-s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_k-\epsilon_j}(-1)\times$ $h_{\epsilon_i-\epsilon_l}(1)$	s^2, $\alpha = \epsilon_i + \epsilon_k$, 1, $\alpha = \epsilon_i + \epsilon_j$, 1, $\alpha = \epsilon_k + \epsilon_l$, 0, $\alpha = \epsilon_j + \epsilon_l$.
16	$(A4, M5)b$	$\epsilon_i + \epsilon_j$, $\epsilon_k - \epsilon_l$, $i < k < j < l$	$\epsilon_i + \epsilon_k$, $\epsilon_j - \epsilon_l$	$h_{2\epsilon_i}(-1)\times$ $h_{\epsilon_k-\epsilon_j}(s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_i+\epsilon_l}(s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_k-\epsilon_j}(s)$	$-s$, $\alpha = \epsilon_i + \epsilon_k$, 1, $\alpha = \epsilon_i + \epsilon_j$, 1, $\alpha = \epsilon_k - \epsilon_l$, 0, $\alpha = \epsilon_j - \epsilon_l$.
17	$(A4, M6)$	$\epsilon_i + \epsilon_l$, $\epsilon_k - \epsilon_j$, $i < k < j < l$	$\epsilon_i + \epsilon_k$	$h_{\epsilon_k+\epsilon_l}(s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_k-\epsilon_l}(-s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_i+\epsilon_j}(s^{-1})$	s, $\alpha = \epsilon_i + \epsilon_k$, 1, $\alpha = \epsilon_i + \epsilon_l$, 1, $\alpha = \epsilon_k - \epsilon_j$.
18	$(A5, M1)$	$\varnothing$	$\epsilon_i - \epsilon_j$, $i < j$	$h_{\epsilon_i-\epsilon_j}(s^{-1})$	s, $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j$.
19	$(A5, M2)$	$\epsilon_k - \epsilon_j$	$\epsilon_i - \epsilon_j$, $i < k < j$	$h_{2\epsilon_i}(s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_i-\epsilon_k}(-1)$	s, $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j$, 1, $\alpha = \epsilon_k - \epsilon_j$.
20	$(A5, M3)$	$\epsilon_i - \epsilon_k$	$\epsilon_i - \epsilon_j$, $i < k < j$	$h_{2\epsilon_i}(s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_k-\epsilon_j}(s^{-1})$	s, $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j$, 1, $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_k$.
21	$(A5, M4)a$	$\epsilon_i - \epsilon_k$, $\epsilon_j - \epsilon_l$, $i < k < j < l$	$\epsilon_i - \epsilon_j$, $\epsilon_k - \epsilon_l$	$h_{2\epsilon_k}(-s^{-1})\times$ $h_{2\epsilon_i}(s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_k-\epsilon_j}(-1)$	s, $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j$, $-s$, $\alpha = \epsilon_k - \epsilon_l$, 1, $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_k$, 1, $\alpha = \epsilon_j - \epsilon_l$.

22	$(A5, M4)b$	$\epsilon_i - \epsilon_k$, $\epsilon_j + \epsilon_l$, $i < k < j < l$	$\epsilon_i - \epsilon_j$, $\epsilon_k + \epsilon_l$	$h_{2\epsilon_k}(-s^{-1})\times$ $h_{2\epsilon_i}(s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_k-\epsilon_j}(-1)$	s, $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j$, $-s$, $\alpha = \epsilon_k + \epsilon_l$, 1, $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_k$, 1, $\alpha = \epsilon_j + \epsilon_l$.
23	$(A5, M5)a$	$\epsilon_i + \epsilon_l$, $\epsilon_k + \epsilon_j$, $i < k < j < l$	$\epsilon_i + \epsilon_j$, $\epsilon_k + \epsilon_l$	$h_{2\epsilon_k}(-s)\times$ $h_{2\epsilon_i}(s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_j-\epsilon_l}(-s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_i-\epsilon_k}(s)$	s, $\alpha = \epsilon_i + \epsilon_j$, 0, $\alpha = \epsilon_k + \epsilon_l$, 1, $\alpha = \epsilon_i + \epsilon_l$, 1, $\alpha = \epsilon_k + \epsilon_j$.
24	$(A5, M5)b$	$\epsilon_i - \epsilon_j$, $\epsilon_k - \epsilon_l$, $i < k < j < l$	$\epsilon_i - \epsilon_l$, $\epsilon_k - \epsilon_j$	$h_{2\epsilon_k}(-s)\times$ $h_{2\epsilon_i}(s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_j-\epsilon_l}(s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_i-\epsilon_k}(s)$	s, $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_l$, 0, $\alpha = \epsilon_k - \epsilon_j$, 1, $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j$, 1, $\alpha = \epsilon_k - \epsilon_l$.
25	$(A5, M5)c$	$\epsilon_i - \epsilon_l$, $\epsilon_k + \epsilon_j$, $i < k < j < l$	$\epsilon_i + \epsilon_j$, $\epsilon_k - \epsilon_l$	$h_{2\epsilon_k}(-s)\times$ $h_{2\epsilon_i}(s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_j+\epsilon_l}(s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_i-\epsilon_k}(s)$	s, $\alpha = \epsilon_i + \epsilon_j$, 0, $\alpha = \epsilon_k - \epsilon_l$, 1, $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_l$, 1, $\alpha = \epsilon_k + \epsilon_j$.
26	$(A5, M5)d$	$\epsilon_i - \epsilon_j$, $\epsilon_k + \epsilon_l$, $i < k < j < l$	$\epsilon_i - \epsilon_j$, $\epsilon_k + \epsilon_l$	$h_{2\epsilon_k}(-s)\times$ $h_{2\epsilon_i}(s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_j+\epsilon_l}(s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_i-\epsilon_k}(s)$	s, $\alpha = \epsilon_i + \epsilon_l$, 0, $\alpha = \epsilon_k - \epsilon_j$, 1, $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j$, 1, $\alpha = \epsilon_k + \epsilon_l$.
27	$(A5, M6)a$	$\epsilon_i - \epsilon_k$, $\epsilon_j - \epsilon_l$, $i < k < j < l$	$\epsilon_i - \epsilon_l$	$h_{2\epsilon_i}(s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_k-\epsilon_l}(s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_i-\epsilon_j}(-1)$	s, $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_l$, 1, $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_k$, 1, $\alpha = \epsilon_j - \epsilon_l$.
28	$(A5, M6)b$	$\epsilon_i - \epsilon_k$, $\epsilon_j + \epsilon_l$, $i < k < j < l$	$\epsilon_i + \epsilon_l$	$h_{2\epsilon_i}(s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_k+\epsilon_l}(s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_i-\epsilon_j}(-1)$	s, $\alpha = \epsilon_i + \epsilon_l$, 1, $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_k$, 1, $\alpha = \epsilon_j + \epsilon_l$.

29	$(A6, M1)$	$2\epsilon_j$	$\epsilon_i + \epsilon_j$, $i < j$	$h_{2\epsilon_i}(s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_i-\epsilon_j}(-1/2)$	s, $\alpha = \epsilon_i + \epsilon_j$, 1, $\alpha = 2\epsilon_j$.
30	$(A6, M2)$	$2\epsilon_k, 2\epsilon_j$	$\epsilon_i + \epsilon_k$, $i < k < j$	$h_{2\epsilon_i}(s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_i-\epsilon_k}(-1/2)\times$ $x_{\epsilon_i-\epsilon_j}(-I/2)\times$ $x_{\epsilon_k-\epsilon_j}(I)$	s, $\alpha = \epsilon_i + \epsilon_k$, $-Is$, $\alpha = \epsilon_i + \epsilon_j$, 1, $\alpha = 2\epsilon_k$, 1, $\alpha = 2\epsilon_j$.
31	$(A6, M3)$	$\epsilon_i - \epsilon_k, 2\epsilon_j$, $i < k < j$	$\epsilon_i + \epsilon_j$	$h_{2\epsilon_i}(s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_k+\epsilon_j}(s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_i-\epsilon_j}(-1/2)$	s, $\alpha = \epsilon_i + \epsilon_j$, 1, $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_k$, 1, $\alpha = 2\epsilon_j$.
32	$(A6, M4)$	$\epsilon_i - \epsilon_k$, $2\epsilon_j, 2\epsilon_l$, $i < k < j < l$	$\epsilon_i - \epsilon_l$, $\epsilon_k + \epsilon_j$	$h_{2\epsilon_i}(s^{-1})\times$ $h_{2\epsilon_k}(Is^{-1})\times$ $x_{\epsilon_k-\epsilon_j}(-1/2)\times$ $x_{\epsilon_k-\epsilon_l}(-I/2)\times$ $x_{\epsilon_j-\epsilon_l}(I)$	s, $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_l$, $-s$, $\alpha = \epsilon_k + \epsilon_l$, Is, $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j$, $-Is$, $\alpha = \epsilon_k + \epsilon_j$, 1, $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_k$, 1, $\alpha = 2\epsilon_j$, 1, $\alpha = 2\epsilon_l$.
33	$(A6, M5)a$	$\epsilon_i + \epsilon_l$, $2\epsilon_k, 2\epsilon_j$, $i < k < j < l$	$\epsilon_i + \epsilon_k$, $\epsilon_j + \epsilon_l$	$h_{2\epsilon_i}(s^{-1})\times$ $h_{2\epsilon_l}(Is)\times$ $x_{\epsilon_i-\epsilon_k}(-1/2)\times$ $x_{\epsilon_k-\epsilon_j}(I)\times$ $x_{\epsilon_j-\epsilon_l}(1)\times$ $x_{\epsilon_i-\epsilon_j}(-I/2)\times$ $x_{\epsilon_k-\epsilon_l}(-I)\times$ $x_{\epsilon_j-\epsilon_l}(1/2)$	s, $\alpha = \epsilon_i + \epsilon_k$, 0, $\alpha = \epsilon_j + \epsilon_l$, Is, $\alpha = \epsilon_i + \epsilon_j$, 1, $\alpha = \epsilon_i + \epsilon_l$, 1, $\alpha = 2\epsilon_k$, 1, $\alpha = 2\epsilon_j$.

34	$(A6, M5)b$	$\epsilon_i-\epsilon_l$, $2\epsilon_k, 2\epsilon_j$, $i<k<j<l$	$\epsilon_i+\epsilon_k$, $\epsilon_j-\epsilon_l$	$h_{2\epsilon_i}(s^{-1})\times$ $h_{2\epsilon_l}(-Is^{-1})\times$ $x_{\epsilon_i-\epsilon_k}(-1/2)\times$ $x_{\epsilon_k-\epsilon_j}(I)\times$ $x_{\epsilon_j+\epsilon_l}(-1)\times$ $x_{\epsilon_i-\epsilon_j}(-I/2)\times$ $x_{\epsilon_k+\epsilon_l}(I)$	s, $\alpha=\epsilon_i+\epsilon_k$, 0, $\alpha=\epsilon_j-\epsilon_l$, $-Is$, $\alpha=\epsilon_i+\epsilon_j$, 1, $\alpha=\epsilon_i-\epsilon_l$, 1, $\alpha=2\epsilon_k$, 1, $\alpha=2\epsilon_j$.
35	$(A6, M6)a$	$\epsilon_i-\epsilon_j$, $2\epsilon_k, 2\epsilon_l$, $i<k<j<l$	$\epsilon_i+\epsilon_k$	$h_{2\epsilon_i}(s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_i-\epsilon_k}(-1/2)\times$ $x_{\epsilon_k-\epsilon_l}(I)\times$ $x_{\epsilon_i-\epsilon_l}(-I/2)\times$ $x_{\epsilon_k+\epsilon_j}\left(\frac{1-2s}{2s^2}\right)\times$ $x_{\epsilon_i-\epsilon_k}(s)\times$ $x_{\epsilon_k+\epsilon_j}\left(\frac{4s-1}{2s^2}\right)$	s, $\alpha=\epsilon_i+\epsilon_k$, $2Is$, $\alpha=\epsilon_k+\epsilon_l$, $-Is$, $\alpha=\epsilon_i+\epsilon_l$, 1, $\alpha=\epsilon_i-\epsilon_k$, $1-2s$, $\alpha=2\epsilon_j$, $1+2s$, $\alpha=2\epsilon_l$.
36	$(A6, M6)b$	$\epsilon_i-\epsilon_k$, $2\epsilon_j, 2\epsilon_l$, $i<k<j<l$	$\epsilon_i+\epsilon_j$	$h_{2\epsilon_i}(s^{-1})\times$ $x_{\epsilon_i-\epsilon_j}(-1/2)\times$ $x_{\epsilon_j-\epsilon_l}(I)\times$ $x_{\epsilon_i-\epsilon_l}(-I/2)\times$ $x_{\epsilon_k+\epsilon_j}\left(\frac{1-2s}{2s^2}\right)\times$ $x_{\epsilon_i-\epsilon_j}(s)\times$ $x_{\epsilon_k+\epsilon_j}\left(\frac{4s-1}{2s^2}\right)$	s, $\alpha=\epsilon_i+\epsilon_j$, $2Is$, $\alpha=\epsilon_j+\epsilon_l$, $-Is$, $\alpha=\epsilon_i+\epsilon_l$, 1, $\alpha=\epsilon_i-\epsilon_j$, $1-2s$, $\alpha=2\epsilon_k$, $1+2s$, $\alpha=2\epsilon_l$.

Литература

1. C. A. Andrè, A. M. Neto, *Super-characters of finite unipotent groups of types B_n, C_n and D_n.* — J. Algebra **305** (2006), 394–429.
2. E. Bagno, Y. Cherniavsky, *Congruence B-orbits and the Bruhat poset of involutions of the symmetric group*, see arXiv: `math.CO/0912.1819` (2009).
3. S. Billey, V. Lakshmibai, *Singular loci of Schubert varieties.* — Progr. Math. **182**, Birkhäuser, 2000.
4. Н. Бурбаки, *Группы Ли и алгебры Ли.* Главы 4–6. М., Мир, 1972.
5. Дж. Хамфри, *Линейные алгебраические группы.* М., Наука, 1980.
6. М. В. Игнатьев, *Ортогональные подмножества классических систем корней и коприсоединённые орбиты унипотентных групп.* — Мат. заметки **86** (2009), вып. 1, 65–80, см. также arXiv: `math.RT/0904.2841`.
7. М. В. Игнатьев, *Ортогональные подмножества систем корней и метод орбит.* — Алгебра и анализ **22** (2010), вып. 5, 104–130, см. также arXiv: `math.RT/1007.5220`.
8. M. V. Ignatyev, *Combinatorics of B-orbits and the Bruhat–Chevalley order on involutions.* — Transformation Groups, to appear, see also arXiv: `math.RT/1101.2189` (2011).
9. А. Н. Панов, *Инволюции в S_n и ассоциированные коприсоединённые орбиты.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **349** (2007), 150–173, см. также arXiv: `math.RT/0801.3022`.
10. F. Incitti, *Bruhat order on the involutions of classical Weyl groups.* — Ph.D. Thesis. Dipartimento di Matematica “Guido Castelnuovo”, Università di Roma “La Sapienza”, 2003.
11. F. Incitti, *The Bruhat order on the involutions of the symmetric groups.* — J. Alg. Combin. **20** (2004), no. 3, 243–261.
12. A. Melnikov, *B-orbit in solution to the equation $X^2 = 0$ in triangular matrices.* — J. Algebra **223** (2000), 101–108.
13. A. Melnikov, *Description of B-orbit closures of order 2 in upper-triangular matrices.* — Transformation Groups **11** (2006), no. 2, 217–247.
14. A. Melnikov, *B-orbits of nilpotent order 2 and link patterns*, see arXiv: `math.RT/0703371` (2007).
15. R. W. Richardson, T. A. Springer, *The Bruhat order on symmetric varieties.* — Geom. Dedicata **35** (1990), no. 1–3, 389–436.

Ignat’ev M. V. The Bruhat–Chevalley order on involutions of the hyperoctahedral group and combinatorics of B-orbit closures.

Let $G = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ be the symplectic group, B its Borel subgroup and $\Phi = C_n$ the root system of G. To each involution σ in the Weyl group W of Φ one can assign the orbit Ω_σ of the coadjoint action of B on the dual space of the Lie algebra of the unipotent radical of B.

Let σ, τ be involutions in W. We prove that Ω_σ is contained in the closure of Ω_τ if and only if σ is less or equal than τ with respect to the Bruhat–Chevalley order on W.

Самарский государственный университет
Кафедра алгебры и геометрии
E-mail: mihail.ignatev@gmail.com

Поступило 25 декабря 2011 г.