Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 400, 2012 г.

С. Евдокимов

КРАТНОМАСШТАБНЫЙ АНАЛИЗ И БАЗИСЫ ХААРА НА КОЛЬЦЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ АДЕЛЕЙ

§1. Введение

Хорошо известно (см., например, [1]), что для каждого простого числа p система функций

$$\left\{p^{n/2}\psi^{(i)}(p^n x-b),\ x\in\mathbb{R}\,:\,n,b\in\mathbb{Z},\,i=1,\dots,p-1\right\}$$

образует ортонормированный базис гильбертова пространства $L^2(\mathbb{R})$. Здесь $\psi^{(i)}=\psi^{(i)}_{\infty,p}$ – i-ая вещественная всплеск-функция Хаара:

$$\psi^{(i)}_{\infty,p}(x)=\begin{cases}\zeta^{ij}, & \text{если}\ \ \frac{j}{p}\le x<\frac{j+1}{p},\ \ j=0,\dots,p-1,\\ 0, & \text{в противном случае,}\end{cases} \tag{1}$$

где $\zeta=\exp(2\pi\sqrt{-1}/p)$ – примитивный корень p-ой степени из единицы.

Аналогично в p-адическом случае [4] система функций

$$\left\{p^{n/2}\psi^{(i)}(p^{-n}x-b),\ x\in\mathbb{Q}_p\,:\,n\in\mathbb{Z},\,b\in I_p,\,i=1,\dots,p-1\right\}$$

образует ортонормиальный базис гильбертова пространства $L^2(\mathbb{Q}_p)$. Здесь $\psi^{(i)}=\psi^{(i)}_{\mathrm{fin},p}$ – i-ая p-адическая всплеск-функция Хаара:

$$\psi^{(i)}_{\mathrm{fin},p}(x)=\begin{cases}\zeta^{ij}, & \text{если}\ \ x\in j+p\mathbb{Z}_p,\ \ j=0,\dots,p-1,\\ 0, & \text{в противном случае,}\end{cases} \tag{2}$$

и I_p – множество, состоящее из дробных частей всех p-адических чисел.

Следует отметить, что как в вещественном [2,3], так и в p-адическом [5,6] случаях базис Хаара может быть построен в рамках теории *кратномасштабного анализа*: масштабирующие функции равны характеристическим функциям правого полуинтервала $[0,1)$ и кольца $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел. Заметим, что эти функции φ_∞ и φ_p могут

Ключевые слова: кольцо аделей, кратномасштабный анализ, базис Хаара, всплеск-функция.

быть получены при $i = 0$ с помощью формул (1) и (2) соответственно. Положим

$$\varphi = \bigotimes_{v \in \mathbb{P} \cup \{\infty\}} \varphi_v \tag{3}$$

где $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел. Тогда $\varphi \in L^2(\mathbb{A})$, где $\mathbb{A}$ – кольцо аделей над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, т.е. локально-компактное кольцо, равное ограниченному прямому произведению поля $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$ и всех p-адических полей $\mathbb{Q}_p$ относительно их подколец $\mathbb{Z}_p$ (по поводу теории аделей см., например, [7]).

В следующем параграфе мы построим семейство кратномасштабных анализов в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{A})$ с масштабирующей функцией φ. Любой такой анализ задаётся некоторой *стратегией*, т.е. последовательностью обратимых аделей с определёнными свойствами. В качестве дискретной группы сдвигов берутся аддитивные сдвиги на элементы поля $\mathbb{Q}$, вложенного диагонально в $\mathbb{A}$. Как следствие, мы получаем семейство ортонормированных базисов всплесков в $L^2(\mathbb{A})$. [1]

Необходимо отметить, что в отличие от вещественного случая, где сдвиги образуют группу, изоморфную аддитивной группе кольца $\mathbb{Z}$, соответствующее p-адическое множество сдвигов группой не является. Таким образом, переход к аделям устраняет этот недостаток. Заметим также, что для каждого построенного кратномасштабного анализа как число порождающих всплеск-функций, так и число элементарных растяжений бесконечно. Грубо говоря, первые отвечают функциям (1) или (2) для некоторой последовательности простых чисел p, а вторые при тех же p по существу сводятся либо к умножению на p в поле $\mathbb{Q}_\infty$, либо к делению на p в поле $\mathbb{Q}_p$.

Скажем в заключение, что настоящую работу следует рассматривать как анонс. Доказательства содержащихся в ней утверждений лишь намечены.

---

[1] Системы всплеск-функций, построенные в разделе 6 статьи Косяка, Хренникова и Шелковича "Базисы всплесков на кольцах аделей" (ДАН, 2012, Том 442, 4, с. 446-450), вопреки утверждению авторов ортогональными базисами не являются. Они не являются ни базисами Рисса, ни даже фреймами. Более того, используемый при этом кратномасштабный анализ определен некорректно.

Обозначения. Как обычно, $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_p$ обозначают соответственно множество всех простых чисел, поля рациональных, вещественных и p-адических чисел и ко́льца целых и целых p-адических чисел.

Через $\mathbb{A} = \mathbb{A}_\mathbb{Q}$ обозначается кольцо аделей над полем $\mathbb{Q}$ и через $\mathbb{A}^\times$ его мультипликативная группа. Каждый адель имеет вид

$$x = (x_\infty, x_{\text{fin}}) = (x_\infty, \dots, x_p, \dots),$$

где $x_\infty \in \mathbb{R}$, а $x_p \in \mathbb{Q}_p$, причём $x_p \in \mathbb{Z}_p$ при почти всех $p \in \mathbb{P}$.

Для аделя x через $\{x_{\text{fin}}\}$ обозначается дробная часть его компоненты x_{fin}, т.е. единственное рациональное число $r \in \mathbb{Q}_{[0,1)}$ такое, что $x_p - r \in \mathbb{Z}_p$ при всех $p \in \mathbb{P}$.

Для $x \in \mathbb{A}^\times$ определим обратимый адель и положительное число, полагая

$$\|x\| = (|x_\infty|_\infty, \dots, |x_p|_p, \dots) \quad \text{и} \quad \|x\|_\mathbb{A} = |x_\infty|_\infty \prod_{p \in \mathbb{P}} |x_p|_p\,,$$

где $|\cdot|_\infty$ и $|\cdot|_p$ обозначают соответственно абсолютное значение на $\mathbb{R}$ и p-адическую норму на $\mathbb{Q}_p$, нормализованную условием $|p|_p = p^{-1}$.

Через $L^2(\mathbb{A})$ обозначается гильбертово пространство комплекснозначных функций на $\mathbb{A}$, суммируемых с квадратом относительно меры Хаара $\mu_\mathbb{A}$, нормализованной условием $\mu_A(F) = 1$, где

$$F = [0,1) \times \prod_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}_p.$$

Для биекции D кольца $\mathbb{A}$, аделя b и функции f на $\mathbb{A}$ мы полагаем

$$f^{D,b}(x) = f(D(x) - b), \quad x \in \mathbb{A},$$

и опускаем D (соотв. b), если $D = \mathrm{id}_\mathbb{A}$ (соотв. $b = 0$).

§2. Результаты

Хорошо известно, что поле $\mathbb{Q}$, вложенное диагонально в $\mathbb{A}$, дискретно, фактор $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ компактен и F – фундаментальная область аддитивной группы поля. Последнее означает, что множества семейства

$$\mathcal{P} = \{F + b : b \in \mathbb{Q}\}$$

образуют разбиение кольца $\mathbb{A}$. (Будем говорить, в таких случаях, что само $\mathcal{P}$ является разбиением.)

Для каждого $r \in \mathbb{A}^\times$ положим
$$\mathcal{P}_0(r) = \{r^{-1}T^{-1}(M) : M \in \mathcal{P}\},$$
где T – преобразование кольца $\mathbb{A}$, определяемое следующим образом:
$$T(x) = (x_\infty + \{x_{\mathrm{fin}}\}, x_{\mathrm{fin}}), \quad x = (x_\infty, x_{\mathrm{fin}}).$$
Тогда $\mathcal{P}_0(r)$ совпадает с разбиением кольца $\mathbb{A}$ на множества
$$M = M_\infty \times \prod_{p \in \mathbb{P}} M_p, \quad M_p = \mathbb{Z}_p \ \text{ при почти всех } \ p,$$
где $M_\infty \subset \mathbb{R}$ – правый при $r_\infty > 0$ и левый при $r_\infty < 0$ полуинтервал длины $|r_\infty|_\infty^{-1}$ с концами в множестве $r_\infty^{-1}\mathbb{Z}$, а $M_p \subset \mathbb{Q}_p$ – класс смежности по группе $r_p^{-1}\mathbb{Z}_p$.

Легко видеть, что с точностью до множеств меры 0 разбиение $\mathcal{P}_0(s)$ является измельчением разбиения $\mathcal{P}_0(r)$ тогда и только тогда, когда адель $\|r\|$ делит адель $\|s\|$. (Для $x, y \in \mathbb{A}^\times$ мы говорим, что x делит y, если $(y/x)_\infty \in \mathbb{Z}$ и $(y/x)_p \in \mathbb{Z}_p$ при всех $p \in \mathbb{P}$.)

Далее определим разбиение $\mathcal{P}(r)$ кольца $\mathbb{A}$, полагая
$$\mathcal{P}(r) = \{T(M) : M \in \mathcal{P}_0(r)\}. \tag{4}$$
Поскольку, очевидно, T сохраняет меру, то для любого $M \in \mathcal{P}(r)$ имеет место равенство $\mu_{\mathbb{A}}(M) = \|r\|_{\mathbb{A}}^{-1}$. Как и выше, с точностью до множеств нулевой меры $\mathcal{P}(s)$ является измельчением $\mathcal{P}(r)$ тогда и только тогда, когда $\|r\|$ делит $\|s\|$. Более того, пересечение и объединение разбиений $\mathcal{P}(r)$ по всем $r \in \mathbb{A}^\times$ равны соответственно разбиению кольца $\mathbb{A}$ на точки и разбиению с единственным элементом $\mathbb{A}$.

Из определений следует, что
$$\mathcal{P}(r) = \{D_r^{-1}(M) : M \in \mathcal{P}\}$$
при всех $r \in \mathbb{A}^\times$, где
$$D_r = T^{-1}H_rT, \tag{5}$$
причём H_r – гомотетия кольца $\mathbb{A}$, индуцированная умножением на r.

Отметим, что преобразование D_r умножает меру любого измеримого множества кольца $\mathbb{A}$ на $\|r\|_{\mathbb{A}}$. Заметим также, что $D_r(x)_{\mathrm{fin}} = r_{\mathrm{fin}}x_{\mathrm{fin}}$ при всех $x \in \mathbb{A}$ и, если $r_{\mathrm{fin}} = 1$, то D_r сводится к гомотетии поля $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$ с коэффициентом r_∞ относительно точки $\{x_{\mathrm{fin}}\}$. Очевидно,
$$D_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{A}}, \quad D_r^{-1} = D_{r^{-1}}, \quad D_rD_s = D_{rs}$$
при всех $r, s \in \mathbb{A}^\times$.

Для каждого $r \in \mathbb{A}^\times$ определим замкнутое подпространство пространства $L^2(\mathbb{A})$, полагая

$$V(r) = \operatorname{span}\{\chi_M : M \in \mathcal{P}(r)\}, \tag{6}$$

где χ_M – характеристическая функция множества M. Следующая лемма вытекает непосредственно из сказанного выше.

Лемма 2.1. *Имеют место следующие утверждения:*

(1) $V(r) \subset V(s)$ *тогда и только тогда, когда* $\|r\|$ *делит* $\|s\|$,

(2) $\overline{\bigcup_{r\in\mathbb{A}^\times} V(r)} = L^2(\mathbb{A})$, $\quad \bigcap_{r\in\mathbb{A}^\times} V(r) = \{0\}$,

(3) $V(rs) = \{f^{D_s} : f \in V(r)\}$ *при всех* $r, s \in \mathbb{A}^\times$,

(4) *система функций* $\{\varphi^{D_{r_n}, b} : b \in \mathbb{Q}\}$ *является ортогональным базисом пространства* $V(r)$ *при всех* $r \in \mathbb{A}^\times$.

Для $t \in \{\infty, \mathrm{fin}\}$ и $p \in \mathbb{P}$ определим адель $r(t,p)$, полагая

$$r(t,p)_v = \begin{cases} p^{\varepsilon(t)}, & \text{если } \ v = v(t,p), \\ 1, & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{7}$$

где $\varepsilon(t) = 1$, если $t = \infty$ и $\varepsilon(t) = -1$, если $t = \mathrm{fin}$, в то время как $v(t,p) = \infty$, если $t = \infty$ и $v(t,p) = p$, если $t = \mathrm{fin}$. Тогда, очевидно,

$$\|r(t,p)\|_{\mathbb{A}} = p.$$

Положим

$$D_{t,p} = D_{r(t,p)},$$

где правая часть равенства определена формулой (5).

Растяжения $D_{t,p}$ по всем t и p будут рассматриваться как *элементарные адельные растяжения.* Отметим, что если $t = \infty$, то $D_{t,p}$ сводится к гомотетии поля $\mathbb{Q}_\infty$ с коэффициентом p относительно точки $\{x_{\mathrm{fin}}\}$, в то время как, если $t = \mathrm{fin}$, оно сводится к делению на p в поле $\mathbb{Q}_p$ и сдвигу на $\{(p^{-1}x)_{\mathrm{fin}}\} - \{x_{\mathrm{fin}}\}$ в $\mathbb{Q}_\infty$ (перенос начала координат).

Следующее определение является ключевым для данной работы.

Определение 2.2. *Мы говорим, что последовательность* $\mathfrak{r} = \{r_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *обратимых аделей является стратегией, если для каждого целого* n *существуют* $t_n \in \{\infty, \mathrm{fin}\}$ *и* $p_n \in \mathbb{P}$ *такие,что*

(1) $r_{n+1}/r_n = r(t_n, p_n)$ *при всех* n,

(2) *множества* $\{n \in \mathbb{Z}_{>0} : t_n = \infty\}$ *и* $\{n \in \mathbb{Z}_{<0} : t_n = \infty\}$ *бесконечны,*

(3) *при любом простом* p *множества* $\{n \in \mathbb{Z}_{>0} : t_n = \mathrm{fin}, p_n = p\}$ *и* $\{n \in \mathbb{Z}_{<0} : t_n = \mathrm{fin}, p_n = p\}$ *бесконечны.*

Очевидно, последовательности $\{t_n\}$ и $\{p_n\}$ определяются однозначно по $\mathfrak{r}$. Обратно, стратегия $\mathfrak{r}$ однозначно определяется этими последовательностями и аделем r_0, который можно взять произвольным. Легко видеть, что стратегии существуют.

Для выбранной стратегии положим

$$V_n = V(r_n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда V_n – замкнутое подпространство пространства $L^2(\mathbb{A})$.

Определение стратегии влечет, что адель $\|r_n\|$ делит адель $\|r_{n+1}\|$ при всех n. Более того, для каждого $r \in \mathbb{A}^\times$ существуют целые числа n_1 и n_2 такие, что $\|r\|$ делится на $\|r_{n_1}\|$ и делит $\|r_{n_2}\|$. Таким образом, лемма 2.1 приводит к следующему утверждению, показывающему, что при $r_0 = 1$ последовательность $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ может рассматриваться как *кратномасштабный анализ* в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{A})$ относительно последовательности растяжений $\{D_{t_n,p_n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ с масштабирующей функцией $\varphi = \chi_F$. Аддитивные сдвиги индуцированы элементами поля $\mathbb{Q}$, вложенного диагонально в $\mathbb{A}$.

Теорема 2.3. *Для любой стратегии* $\mathfrak{r}$ *имеем*

(1) $V_n \subset V_{n+1}$ *при всех* n,

(2) $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} V_n} = L^2(\mathbb{A})$, $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} V_n = \{0\}$,

(3) $V_{n+1} = \{f^{D_{t_n,p_n}} : f \in V_n\}$ *при всех* n,

(4) *система функций* $\{\varphi^{D_{r_0},b} : b \in \mathbb{Q}\}$ *является ортогональным базисом пространства* V_0.

Из определения стратегии и утверждения (3) теоремы 2.3 следует, что утверждение (4) этой теоремы справедливо не только при $n = 0$, но также и при всех $n \in \mathbb{Z}$.

Пусть $t \in \{\infty, \mathrm{fin}\}$ и $p \in \mathbb{P}$. Тогда легко видеть, что

$$\psi_{t,p}^{(i)} \in L^2(\mathbb{Q}_v), \quad i = 0, \dots, p-1,$$

где $\psi_{t,p}^{(i)}$ – функция (1) или (2) и $v = v(t,p)$ – элемент множества $\mathbb{P} \cup \{\infty\}$, определенный выше (см. (7)). Положим

$$\Psi_{t,p} = \{\psi_{t,p}^{(i)} \otimes \varphi_{v'} : i = 1, \dots, p-1\},$$

где, как обычно, $\varphi_{v'}$ обозначает тензорное произведение функций φ_w по всем $w \in \mathbb{P} \cup \{\infty\}$, отличным от v.

Элементы множеств $\Psi_{t,p}$ по всем t и p будут рассматриваться как *порождающие адельные всплеск-функции Хаара.* Заметим, что носитель любой функции из $\Psi_{t,p}$ совпадает с множеством F и что мощность множества $\Psi_{t,p}$ равна $p-1$. Основную теорему работы можно теперь сформулировать следующим образом.

Теорема 2.4. *Для любой стратегии* $\mathfrak{r} = \{r_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *система функций*

$$\Psi(\mathfrak{r}) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{\|r_n\|_{\mathbb{A}}^{1/2} \psi^{D_{r_n}, b} : \psi \in \Psi_{t_n, p_n},\, b \in \mathbb{Q}\}$$

образует ортонормальный базис гильбертова пространства $L^2(\mathbb{A})$.

Набросок доказательства. По утверждениям (1) и (2) теоремы 2.3 достаточно проверить, что при любом $n \in \mathbb{Z}$ система функций

$$\Psi_n(\mathfrak{r}) = \{\|r_n\|_{\mathbb{A}}^{1/2} \psi^{D_{r_n}, b} : \psi \in \Psi_{t_n, p_n},\, b \in \mathbb{Q}\}$$

образует ортонормированный базис пространства $V_{n+1} \ominus V_n$. Поскольку отображение $\psi \mapsto \psi^{D_r}$, где $\psi \in L^2(\mathbb{A})$, сохраняет ортогональность функций и умножает их $L^2(\mathbb{A})$-норму на $\|r\|_{\mathbb{A}}^{-1/2}$ для всех $r \in \mathbb{A}^\times$, то в силу утверждений (3) и (4) теоремы 2.3 достаточно показать, что при $(t,p) = (t_n, p_n)$ система функций

$$\{\psi^b : \psi \in \Psi_{t,p} \cup \{\varphi\},\, b \in \mathbb{Q}\}$$

является ортонормированным базисом пространства $V(t,p)$, определённого формулой (6) при $r = r(t,p)$, или, эквивалентно, что множество $\Psi_{t,p} \cup \{\varphi\}$ – ортонормированный базис пространства $V(t,p)$, ограниченного на функции с носителем F. Это, в свою очередь, сводится к доказательству того, что множество $\{\psi_{t,p}^{(i)} : i = 0, \dots p-1\}$ – ортонормированный базис пространства $\operatorname{span}\{\chi_{M_j} : j = 0, \dots p-1\}$, где $M_j = [j/p, (j+1)/p)$, если $t = \infty$, и $M_j = j + p\mathbb{Z}_p$, если $t = \mathrm{fin}$. Последнее очевидно. $\square$

Заметим, что при $r_0 = 1$ функции из множества $\Psi(\mathfrak{r})$ могут рассматриваться как адельные всплеск-функции Хаара. Действительно, по определению каждая такая функция с точностью до мультипликативной константы имеет вид

$$\psi(D_{r_n}(x) - b), \quad x \in \mathbb{A},$$

где ψ – одна из порождающих всплеск-функций Хаара, n – целое число и $b \in \mathbb{Q}$. Однако, если $r_0 = 1$, то из определения стратегии следует, что при $n > 0$ преобразование D_{r_n} равно композиции элементарных растяжений D_{t_i,p_i}, где $0 \le i \le n-1$, а при $n < 0$ – композиции элементарных сжатий $D^{-1}_{t_i,p_i}$, где $n \le i \le -1$.

Литература

1. И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков.* Физматлит, М., 2005.
2. S. Mallat, *Multiresolution representation and wavelets.* Ph.D. Thesis, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA, 1988.
3. Y. Meyer, *Ondelettes and fonctions splines.* — Seminaire EDP, Paris, 1986.
4. С. В. Козырев, *Теория всплесков как p-адический спектральный анализ.* — Изв. РАН. Сер. матем. **66** (2002), No. 2, 149–158.
5. V. Shelkovich, M. Skopina, *p-Adic Haar multiresolution analysis and pseudo-differential operators.* — J. Fourier Anal. Appl. **15** (2009), No. 3, 366–393.
6. A. Albeverio, S. Evdokimov, M. Skopina, *p-Adic multiresolution analysis and wavelet frames.* — J. Fourier Anal. Appl., **16** (2010), No. 3, 693–714.
7. S. Lang, *Algebraic Number Theory.* Graduate Texts in Mathematics **110** (2nd ed.), Springer-Verlag, New York, 1994.

Evdokimov S. Haar multiresolution analysis and Haar bases on the ring of rational adeles.

We construct a family of Haar multiresolution analyses in the Hilbert space $L^2(\mathbb{A})$ where $\mathbb{A}$ is the ring of adeles over the field $\mathbb{Q}$ of rationals. The corresponding discrete group of translations and scaling function are respectively the group of additive translations by elements of $\mathbb{Q}$ embedded diagonally in $\mathbb{A}$ and the characteristic function of the standard fundamental domain of this group. As a consequence we come to a family of orthonormal wavelet bases in $L^2(\mathbb{A})$. We observe that both the number of generating wavelet functions and the number of elementary dilations are infinite.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, Санкт-Петербург 191023, Россия
E-mail: evdokim@pdmi.ras.ru

Поступило 26 марта 2012 г.