Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 400, 2012 г.

А. И. Генералов

КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА АЛГЕБР ПОЛУДИЭДРАЛЬНОГО ТИПА. III. СЕРИЯ $SD(2\mathcal{B})_2$ В ХАРАКТЕРИСТИКЕ 2

Введение

Работа посвящена вычислению групп когомологий Хохшильда для алгебр полудиэдрального типа из серии $SD(2\mathcal{B})_2$, представленной в известной классификации К.Эрдман [1]. Напомним, что алгебры диэдрального, полудиэдрального и кватернионного типов возникли в работах К. Эрдман при классификации групповых блоков, имеющих ручной тип представления. В этом вычислении мы используем подход работы [2], в которой была описана алгебра когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$ для алгебр диэдрального типа из серии $D(3\mathcal{K})$ над алгебраически замкнутым полем характеристики 2 (мы вновь используем обозначения из [1]). Указанный подход состоит в том, что сначала на основе некоторых эмпирических вычислений строится минимальная проективная бимодульная резольвента для рассматриваемых алгебр, а затем с использованием этой резольвенты вычисляются группы когомологий Хохшильда, а также умножения в алгебре когомологий.

Ранее этот подход был применен к некоторым другим сериям алгебр кватернионного, диэдрального и полудиэдрального типов. В [3] алгебра когомологий Хохшильда была вычислена для одной из серий локальных алгебр кватернионного типа, а в [4–6] алгебра $\mathrm{HH}^*(R)$ описана для серии $Q(2\mathcal{B})_1$ над основным полем характеристики 2 и 3. В [7, 8] алгебра $\mathrm{HH}^*(R)$ описана для локальных алгебр диэдрального типа, а в [9, 10] алгебра $\mathrm{HH}^*(R)$ описана для локальных алгебр полудиэдрального типа. Кроме того, подход из [2] был использован для вычисления алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$ для алгебр Лю–Шульца (см. [11]).

Ключевые слова: группы когомологий Хохшильда, алгебры полудиэдрального типа, бимодульная резольвента.

Работа поддержана грантом РФФИ 10-01-00635. Кроме того, работа поддержана НИР 6.38.74.2011 Санкт-Петербургского государственного университета, “Структурная теория и геометрия алгебраических групп и их приложения в теории представлений и алгебраической K-теории”.

Имеются также результаты, относящиеся к описанию алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$, полученные для так называемой алгебры Мёбиуса (см. [12–15]) и для самоинъективных алгебр конечного типа представления, имеющих древесный тип D_n (см. [16–22]). Кроме того, подход из [2] был использован в [23, 24] при вычислении когомологий Хохшильда для целочисленных групповых колец диэдральных и полудиэдральных групп; см. также [25, 26], где алгебра $\mathrm{HH}^*(R)$ описана для указанных целочисленных групповых колец с использованием подхода из [27].

Кратко опишем структуру работы. В разделе 1 приводится формулировка основного результата работы – теоремы 1.1, в которой для рассматриваемой серии алгебр полудиэдрального типа над основным алгебраически замкнутым полем характеристики два описываются группы когомологий Хохшильда. В разделе 2 строится минимальная проективная резольвента алгебры R, рассматриваемой как модуль над своей обёртывающей алгеброй $\Lambda = R^{\mathrm{e}} = R \otimes_K R^{\mathrm{op}}$. Наконец, используя эту резольвенту, в разделе 3 мы вычисляем группы $\mathrm{HH}^n(R)$.

Стоит отметить, что упомянутая выше бимодульная резольвента построена для рассматриваемых алгебр над основным полем произвольной характеристики.

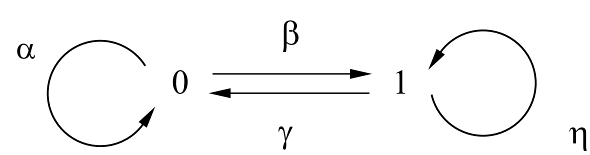
§1. Формулировка основного результата

Пусть K – алгебраически замкнутое поле произвольной характеристики, R – конечномерная K-алгебра, $\Lambda = R^{\mathrm{e}} = R \otimes_K R^{\mathrm{op}}$ – её обёртывающая алгебра, $\mathrm{HH}^n(R) = \mathrm{Ext}^n_\Lambda(R, R)$ – n-ая группа когомологий Хохшильда алгебры R (с коэффициентами в R-бимодуле R).

Таким образом, если $P_\bullet \to R$ – Λ-проективная резольвента алгебры R, то $\mathrm{HH}^n(R) = \mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_\Lambda(P_\bullet, R))$.

Алгебры $R_{k,t,c}$ серии $SD(2\mathcal{B})_2$ (над алгебраически замкнутым полем K произвольной характеристики) описываются с помощью следующего колчана с соотношениями:

$Q^{(\mathcal{B})}$:



$$\left.\begin{aligned} \eta\beta = \beta\alpha(\gamma\beta\alpha)^{k-1},\ \gamma\eta = \alpha\gamma(\beta\alpha\gamma)^{k-1},\ \beta\gamma = \eta^{t-1},\\ \alpha^2 = c(\alpha\gamma\beta)^k,\ \eta^2\beta = 0,\ \gamma\eta^2 = 0,\end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

где $k, t \in \mathbb{N}$, $t \geqslant 3$, $c \in K$ (композицию путей мы записываем справа налево).

В настоящей работе мы исследуем такие алгебры только для $k \geqslant 2$. Отметим, что если $\operatorname{char} K \neq 2$, то можно считать, что $c = 0$ (достаточно заменить α на $\alpha - \frac{1}{2}c\gamma\beta(\gamma\beta\alpha)^{k-1}$).

Основной результат работы – это следующее описание групп когомологий Хохшильда для рассматриваемой серии алгебр в случае, когда основное поле K имеет характеристику два.

Теорема 1.1. *Пусть* $\operatorname{char} K = 2$, *и пусть* $R = R_{k,t,c}$, *где* $k, t \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, $t \geqslant 3$, $c \in K$.

(а) *Тогда* $\dim_K \mathrm{HH}^0(R) = k + t + 2$.

(б) *Предположим дополнительно, что* $c = 0$. *Тогда*

$$\dim_K \mathrm{HH}^1(R) = \begin{cases} k+t+2, & \text{если } k \text{ или } t \text{ нечётно},\\ k+t+3, & \text{если } k \text{ и } t \text{ чётны};\end{cases}$$

$$\dim_K \mathrm{HH}^2(R) = \begin{cases} k+t+3, & \text{если } k \text{ или } t \text{ нечётно},\\ k+t+4, & \text{если } k \text{ и } t \text{ чётны};\end{cases}$$

$$\dim_K \mathrm{HH}^3(R) = \begin{cases} k+t+6, & \text{если } k \text{ или } t \text{ нечётно},\\ k+t+7, & \text{если } k \text{ и } t \text{ чётны};\end{cases}$$

$$\dim_K \mathrm{HH}^4(R) = \begin{cases} k+t+9, & \text{если } k \text{ или } t \text{ нечётно},\\ k+t+10, & \text{если } k \text{ и } t \text{ чётны};\end{cases}$$

кроме того, если $n = 4m + r$, *где* $m, r \in \mathbb{N}$ *и* $1 \leqslant r \leqslant 4$, *то*

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^r(R) = 8m.$$

(в) *Пусть* $c \neq 0$. *Тогда*

$$\begin{aligned} \dim_K \mathrm{HH}^1(R) &= \dim_K \mathrm{HH}^2(R)\\ &= \begin{cases} k+t, & \text{если } k \text{ и } t \text{ нечётны},\\ k+t+1, & \text{если } k \text{ и } t \text{ имеют различную чётность},\\ k+t+2, & \text{если } k \text{ и } t \text{ чётны};\end{cases}\end{aligned}$$

$$\dim_K \mathrm{HH}^3(R) = \begin{cases} k+t+2, & \textit{если } k \textit{ или } t \textit{ нечётно},\\ k+t+3, & \textit{если } k \textit{ и } t \textit{ чётны}; \end{cases}$$

$$\dim_K \mathrm{HH}^4(R) = \begin{cases} k+t+3, & \textit{если } k \textit{ или } t \textit{ нечётно},\\ k+t+4, & \textit{если } k \textit{ и } t \textit{ чётны}; \end{cases}$$

кроме того, если $n = 4m + r$, *где* $m, r \in \mathbb{N}$ *и* $1 \leqslant r \leqslant 4$, *то*

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^r(R) = 2m.$$

Из теоремы 1.1 немедленно вытекает следующее утверждение, дополняющее классификацию К. Эрдман, представленную в книге [1].

Следствие 1.2. *В условиях теоремы* 1.1 *алгебра* $R_{k,t,c}$, *где* $c \neq 0$, *не является производно эквивалентной* (*и, в частности, не Морита-эквивалентна*) *алгебре* $R_{k,t,0}$.

Замечание 1.3. Отметим, что мы не рассматриваем алгебры $R_{k,t,c}$ при $k = 1$. Это связано с тем, что для доказательства теоремы 1.1 мы используем бимодульную резольвенту (см. §2), описание которой не распространяется на случай $k = 1$. Для алгебр $R_{k,t,c}$ при $k = 1$ нами также построена бимодульная резольвента, и соответствующие результаты будут опубликованы позднее.

§2. Резольвента

Пусть $R = R_{k,t,c}$ – алгебра, определённая в §1. Через e_i, $i = 0, 1$, обозначим идемпотенты алгебры R, соответствующие вершинам колчана $Q^{(\mathcal{B})}$. Тогда

$$P_{ij} = \Lambda(e_i \otimes e_j), \quad i, j \in \{0, 1\},$$

составляют полное множество представителей главных неразложимых левых Λ-модулей, где $\Lambda = R^e$.

Умножение справа на элемент $w \in \Lambda$ индуцирует эндоморфизм w^* левого Λ-модуля Λ, кроме того, если $w \in (e_i \otimes e_j)\Lambda(e_k \otimes e_l)$, то w^* индуцирует гомоморфизм $w^*\colon P_{ij} \to P_{kl}$; в дальнейшем ради простоты мы будем часто гомоморфизм умножения (справа) на $w \in \Lambda$ также обозначать через w.

Введём краткие обозначения для некоторых элементов алгебры R:

$$a := \alpha\gamma\beta, \quad b := \beta\alpha\gamma, \quad g := \gamma\beta\alpha, \quad \widetilde{\alpha} := \alpha - c \cdot \gamma\beta g^{k-1}.$$

Стандартным базисом алгебры R будем называть множество

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{00} \cup \mathcal{B}_{10} \cup \mathcal{B}_{01} \cup \mathcal{B}_{11}, \tag{2.1}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{00} &= \{a^{i+1},\ g^i,\ \gamma\beta a^i,\ \alpha g^i \mid 0 \leqslant i \leqslant k-1\},\\
\mathcal{B}_{01} &= \{\gamma b^i,\ \alpha\gamma b^i \mid 0 \leqslant i \leqslant k-1\},\\
\mathcal{B}_{10} &= \{\beta a^i,\ \beta\alpha g^i \mid 0 \leqslant i \leqslant k-1\},\\
\mathcal{B}_{11} &= \{\eta^i \mid 0 \leqslant i \leqslant t\} \cup \{b^i \mid 1 \leqslant i \leqslant k-1\}.
\end{aligned}$$

В категории (левых) Λ-модулей построим комплекс $Q_\bullet$. Положим

$$\begin{aligned}
&Q_0 := P_{00} \oplus P_{11},\\
&Q_1 := Q_2 := \Lambda = P_{00} \oplus P_{10} \oplus P_{01} \oplus P_{11},\\
&Q_3 := P_{00}^2 \oplus P_{11}
\end{aligned}$$

и далее для $n \geqslant 4$ рекурсивно определяем

$$Q_n := P_{00}^2 \oplus Q_{n-4}. \tag{2.2}$$

Рассмотрим гомоморфизмы $d_i \in \mathrm{Hom}(Q_{i+1}, Q_i)$, $0 \leqslant i \leqslant 4$, определяемые матрицами:

$$d_0 = \begin{pmatrix} \alpha\otimes e_0 - e_0\otimes\alpha & \beta\otimes e_0 & -e_0\otimes\gamma & 0 \\ 0 & -e_1\otimes\beta & \gamma\otimes e_1 & \eta\otimes e_1 - e_1\otimes\eta \end{pmatrix};$$

$$d_1 = \begin{pmatrix}
\star & \sum\limits_{i=0}^{k-1} \beta a^{k-1-i}\otimes g^i & -\sum\limits_{i=0}^{k-1} a^{k-1-i}\otimes\gamma b^i & 0 \\
\star & \sum\limits_{i=0}^{k-1} b^{k-1-i}\otimes\alpha g^i - \eta\otimes e_0 & -\sum\limits_{i=0}^{k-2} \alpha\gamma b^{k-2-i}\otimes\alpha\gamma b^i & e_1\otimes\gamma \\
\star & \sum\limits_{i=0}^{k-2} \beta\alpha g^{k-2-i}\otimes\beta\alpha g^i & e_0\otimes\eta - \sum\limits_{i=0}^{k-1} \alpha g^{k-1-i}\otimes b^i & \beta\otimes e_1 \\
0 & -e_1\otimes\beta & \gamma\otimes e_1 & -\sum\limits_{i=0}^{t-2} \eta^i\otimes\eta^{t-2-i}
\end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
(d_1)_{11} =&\alpha \otimes e_0 + e_0 \otimes \alpha - c\sum_{i=0}^{k-1} \gamma\beta a^{k-1-i} \otimes g^i,\\
(d_1)_{21} =&-c\sum_{i=0}^{k-1} \gamma b^{k-1-i} \otimes \alpha g^i,\\
(d_1)_{31} =&-c\sum_{i=0}^{k-1} g^{k-1-i} \otimes \beta\alpha g^i;
\end{aligned}$$

$$d_2 = \begin{pmatrix} \alpha \otimes e_0 - e_0 \otimes \alpha & \gamma\beta a^{k-1} \otimes e_0 - e_0 \otimes \gamma\beta a^{k-1} & 0 \\ -c\gamma \otimes \alpha & \star & e_1 \otimes \gamma \\ -ce_0 \otimes \beta\alpha & -e_0 \otimes \beta\alpha - \alpha \otimes \beta & \beta \otimes e_1 \\ 0 & c\gamma b^{k-1} \otimes \beta\alpha g^{k-1} & \eta \otimes e_1 - e_1 \otimes \eta \end{pmatrix},$$

где

$$(d_2)_{22} = -\alpha\gamma \otimes e_0 - \gamma \otimes \alpha - c\gamma b^{k-1} \otimes \gamma\beta;$$

$$d_3 = \begin{pmatrix} \widetilde{\alpha} \otimes e_0 + e_0 \otimes \alpha & \gamma\beta a^{k-1} \otimes e_0 - e_0 \otimes \gamma\beta a^{k-1} & 0 & 0 \\ -ce_0 \otimes \alpha & -\alpha \otimes e_0 + e_0 \otimes \alpha & \star & \star \\ -c^2\gamma b^{k-1} \otimes \beta\alpha & c(\gamma b^{k-1} \otimes \beta\alpha - \gamma\eta \otimes \beta) & \star & \star \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

где

$$(d_3)_{23} = \sum_{i=0}^{k-1} \gamma\beta a^i \otimes g^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-1} a^i \otimes \gamma\beta a^{k-1-i},$$

$$(d_3)_{24} = \sum_{i=0}^{k-1} \beta a^i \otimes \gamma b^{k-1-i},$$

$$(d_3)_{33} = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha\gamma b^i \otimes \beta a^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-1} \gamma b^i \otimes \beta\alpha g^{k-1-i},$$

$$(d_3)_{34} = \sum_{i=1}^{t} \eta^i \otimes \eta^{t-i} + \sum_{i=1}^{k-1} b^i \otimes b^{k-i};$$

$$d_4 = \begin{pmatrix} \alpha\otimes e_0 - e_0\otimes\alpha & \gamma\beta a^{k-1}\otimes e_0 - e_0\otimes\gamma\beta a^{k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -ce_0\otimes\alpha & -\widetilde{\alpha}\otimes e_0 - e_0\otimes\alpha & \star & 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & \star & \beta\otimes e_0 & -e_0\otimes\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e_1\otimes\beta & \gamma\otimes e_1 & \star \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

где

$$(d_4)_{23} = \gamma\beta a^{k-1} \otimes e_0 + e_0 \otimes \gamma\beta a^{k-1},$$

$$(d_4)_{26} = \beta a^{k-1} \otimes \gamma b^{k-1},$$

$$(d_4)_{33} = \alpha \otimes e_0 - e_0 \otimes \alpha,$$

$$(d_4)_{46} = \eta \otimes e_1 - e_1 \otimes \eta;$$

наконец, для $n \geqslant 5$ определим дифференциалы d_n рекурсивно с помощью следующих блочных матриц (соответствующих прямым разложениям $Q_i = P_{00}^2 \oplus Q_{i-4}$): для нечётных $n = 2m+1$ ($m \geqslant 2$) положим

$$d_{2m+1} = \left(\begin{array}{cc|c} \substack{\widetilde{\alpha}\otimes e_0 + e_0\otimes\alpha \\ -ce_0\otimes\alpha} & \substack{\gamma\beta a^{k-1}\otimes e_0 - e_0\otimes\gamma\beta a^{k-1} \\ -\alpha\otimes e_0 + e_0\otimes\alpha} & \mathrm{A}^{(2m+1)} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\mathrm{O}} & d_{2m-3} \end{array}\right), \tag{2.5}$$

а для чётных $n = 2m$ ($m \geqslant 3$) положим

$$d_{2m} = \left(\begin{array}{cc|c} \substack{\alpha\otimes e_0 - e_0\otimes\alpha \\ -ce_0\otimes\alpha} & \substack{\gamma\beta a^{k-1}\otimes e_0 - e_0\otimes\gamma\beta a^{k-1} \\ -\widetilde{\alpha}\otimes e_0 - e_0\otimes\alpha} & \mathrm{A}^{(2m)} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\mathrm{O}} & d_{2m-4} \end{array}\right); \tag{2.6}$$

при этом в матрицах (2.5) и (2.6) блоки $\mathrm{A}^{(2m+1)}$ и $\mathrm{A}^{(2m)}$ соответственно содержат единственный ненулевой элемент, а именно,

$$(d_{2m+1})_{23} = (d_{2m})_{23} = \gamma\beta a^{k-1} \otimes e_0 + e_0 \otimes \gamma\beta a^{k-1}.$$

Наконец, в качестве пополняющего отображения $\mu\colon Q_0 \to R$, мы берем каноническое отображение, индуцированное умножением в R: $\mu(r \otimes s) = rs$.

Теорема 2.1. *Пусть $R = R_{k,t,c}$, где $k, t \in \mathbb{N}, k \geqslant 2, t \geqslant 3, c \in K$. Тогда построенный выше комплекс $Q_\bullet$ вместе с пополняющим отображением $\mu\colon Q_0 \to R$ является минимальной Λ-проективной резольвентой алгебры R.*

Доказательство. То, что $Q_\bullet$ – комплекс и $\mu \cdot d_0 = 0$, проверяется прямыми вычислениями. Для доказательства ацикличности получающегося комплекса мы используем теорему 1 из [28]. А именно, нам достаточно доказать, что после тензорного умножения комплекса $\mu\colon Q_\bullet \to R$ на простой R-модуль S_i мы получаем минимальную проективную резольвенту модуля S_i (такие резольвенты модулей S_i, $i = 0, 1$, описаны в [29]). Но это также проверяется прямыми вычислениями. Мы предоставляем читателю провести все необходимые проверки. $\square$

Рассмотрим подкомплекс $X_\bullet$ комплекса $Q_\bullet$, такой, что при $n \geqslant 4$ $X_n = P_{00}^2$ – это первые два прямых слагаемых в разложении Q_n из (2.2), а для $0 \leqslant n \leqslant 3$ $X_n = Q_n$.

Предложение 2.2. *Имеет место короткая точная последовательность комплексов*

$$0 \to X_\bullet \xrightarrow{i} Q_\bullet \xrightarrow{\pi} Q_\bullet[-4] \to 0, \tag{2.7}$$

расщепляющаяся в каждой степени.

Доказательство. Утверждение вытекает непосредственно из строения комплекса $Q_\bullet$. $\square$

§3. Группы когомологий

Пусть по-прежнему $R = R_{k,t,c}$ – K-алгебра, определённая в §1, при этом мы до конца раздела предполагаем, что $\operatorname{char} K = 2$. Кроме того, при вычислении групп когомологий $\mathrm{HH}^n(R)$ мы приводим подробные вычисления лишь для $c \neq 0$, – эти случаи несколько более сложны в техническом отношении; – а для $c = 0$ мы ограничиваемся формулировками соответствующих результатов, оставляя их проверку читателю.

Для вычисления когомологий $\mathrm{HH}^n(R)$ алгебры R мы используем комплекс

$$\big(\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_n, R),\ \ \delta^n = \operatorname{Hom}_\Lambda(d_n^Q, R)\big)_{n\geqslant 0}, \tag{3.1}$$

где $\mu\colon Q_\bullet \to R$ – бимодульная резольвента алгебры R, построенная в разделе 2.

Поскольку $P_{ij} = \Lambda \cdot (e_i \otimes e_j)$, то всякий Λ-гомоморфизм $f\colon Q_n \to R$ определяется набором своих значений на соответствующих образующих $e_i \otimes e_j$ тех P_{ij}, которые входят в разложение модуля Q_n; при этом $f(e_i \otimes e_j) \in e_i R e_j$. В дальнейшем мы отождествляем f с этим набором значений.

Отметим, что если $f = w^*\colon \Lambda \to \Lambda$ – гомоморфизм умножения справа на $w \in \Lambda$, то в соответствии с указанным выше отождествлением индуцированный гомоморфизм абелевых групп

$$\widetilde{w}\colon \operatorname{Hom}_\Lambda(f, R)\colon \operatorname{Hom}_\Lambda(\Lambda, R) \simeq R \to \operatorname{Hom}_\Lambda(\Lambda, R) \simeq R$$

действует следующим образом: $r \in R$ отображается в $w * r$ (где $*$ соответствует Λ-модульной структуре на R).

После такого отождествления дифференциал $\delta^0\colon \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_0, R) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_1, R)$ описывается так: для $r_i \in e_i R e_i$ $(i = 0, 1)$

$$\delta^0(r_0, r_1) = (\alpha r_0 - r_0\alpha,\ \beta r_0 - r_1\beta,\ r_0\gamma - \gamma r_1,\ \eta r_1 - r_1\eta). \tag{3.2}$$

Предложение 3.1. $\dim_K \mathrm{HH}^0(R) = k + t + 2$, $\dim_K \operatorname{Im} \delta^0 = 4k - 2$.

Доказательство. Ввиду [1, лемма IX.1.2] центр $Z(R) = \operatorname{Ker}\delta^0$ алгебры R допускает в качестве базиса следующее множество

$$\begin{aligned}\{a^i + g^i + b^i \mid 1 \leqslant i \leqslant k-1\} \cup \{\eta^i \mid 2 \leqslant i \leqslant t\}\\ \cup \{1,\ \alpha g^{k-1} + \eta,\ \gamma\beta a^{k-1},\ a^k\}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Таким образом, $\dim_K \mathrm{HH}^0(R) = k + t + 2$ и $\dim_K \operatorname{Im}\delta^0 = \dim_K R - \dim_K \operatorname{Ker}\delta^0 = 4k - 2$. □

Замечание 3.2. Пространство $\operatorname{Im}\delta^0$ допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов:

$$\big(a^i + g^i, \mathrm{O}_3\big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.4}$$

$$\big(\alpha g^i, \beta a^i, \mathrm{O}_2\big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.5}$$

$$\big(\alpha g^i, 0, \gamma b^i, 0\big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.6}$$

$$\big(0, \beta\alpha g^i, \alpha\gamma b^i, 0\big) \ \text{ для } \ 0 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.7}$$

$$(0, \beta, \gamma, 0). \tag{3.8}$$

Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть значения δ^0 на элементах вида $(r_0, 0)$ (соответственно вида $(0, r_1)$), где r_0 пробегает множество $\mathcal{B}_{00}$ (соответственно r_1 пробегает множество $\mathcal{B}_{11}$) и убедиться, что множество элементов из (3.4)–(3.8) порождает $\operatorname{Im}\delta^0$. Остаётся заметить, что мощность этого множества совпадает с $\dim \operatorname{Im}\delta^0$.

После указанных выше отождествлений дифференциал

$$\delta^1\colon\ \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_1, R) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_2, R)$$

может быть описан следующим образом: для $r_{ij} \in e_i R e_j$, $i, j \in \{0, 1\}$, имеем

$$\delta^1(r_{00}, r_{10}, r_{01}, r_{11}) = (t_{00}, t_{10}, t_{01}, t_{11}),$$

где

$$\begin{aligned}t_{00} = \alpha \cdot r_{00} + r_{00} \cdot \alpha + c\sum_{i=0}^{k-1} \gamma\beta a^{k-1-i} \cdot r_{00} \cdot g^i\\ + c\sum_{i=0}^{k-1} \gamma b^{k-1-i} \cdot r_{10} \cdot \alpha g^i + c\sum_{i=0}^{k-1} g^{k-1-i} \cdot r_{01} \cdot \beta\alpha g^i,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{10} &= \sum_{i=0}^{k-1} \beta a^{k-1-i}\cdot r_{00}\cdot g^i + \sum_{i=0}^{k-1} b^{k-1-i}\cdot r_{10}\cdot \alpha g^i\\
&\quad + \eta\cdot r_{10} + \sum_{i=0}^{k-2} \beta\alpha g^{k-2-i}\cdot r_{01}\cdot \beta\alpha g^i + r_{11}\cdot\beta,\\
t_{01} &= \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-1-i}\cdot r_{00}\cdot \gamma b^i + \sum_{i=0}^{k-2} \alpha\gamma b^{k-2-i}\cdot r_{10}\cdot \alpha\gamma b^i\\
&\quad + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha g^{k-1-i}\cdot r_{01}\cdot b^i + r_{01}\cdot\eta + \gamma\cdot r_{11},\\
t_{11} &= r_{10}\cdot\gamma + \beta\cdot r_{01} + \sum_{i=0}^{t-2} \eta^i\cdot r_{11}\cdot \eta^{t-2-i}.
\end{aligned}$$

Предположим, что $q = (r_{00}, r_{10}, r_{01}, r_{11}) \in \operatorname{Ker}\delta^1$. Представим компоненты этого 1-коцикла в виде

$$r_{00} = \sum_{w\in\mathcal{B}_{00}} \lambda_w w,\ r_{10} = \sum_{w\in\mathcal{B}_{10}} \mu_w w,\ r_{01} = \sum_{w\in\mathcal{B}_{01}} \nu_w w,\ r_{11} = \sum_{w\in\mathcal{B}_{11}} \sigma_w w, \tag{3.9}$$

где $\lambda_w, \mu_w, \nu_w, \sigma_w \in K$. Тогда условие $t_{00} = 0$ равносильно системе следующих уравнений для координат разложений из (3.9):

$$\lambda_{\gamma\beta a^i} = 0 \quad \text{для } 0 \leqslant i \leqslant k-2; \tag{3.10}$$

$$\lambda_{g^i} + \lambda_{a^i} = 0 \quad \text{для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.11}$$

$$ck(\lambda_\alpha + \mu_\beta + \nu_\gamma) = 0,\ c\lambda_{e_0} = 0. \tag{3.12}$$

Условие $t_{10} = 0$ (а также условие $t_{01} = 0$) равносильно системе следующих уравнений:

$$\sigma_{b^i} = 0 \quad \text{для } 0 \leqslant i \leqslant k-2; \tag{3.13}$$

$$\lambda_{e_0} + \sigma_{b^{k-1}} = 0,\ \sigma_{e_1} = 0; \tag{3.14}$$

$$k\lambda_\alpha + (k-1)\mu_\beta + (k-1)\nu_\gamma + \sigma_\eta = 0. \tag{3.15}$$

Наконец, условие $t_{11} = 0$ равносильно следующим соотношениям:

$$\mu_{\beta\alpha g^i} + \nu_{\alpha\gamma b^i} = 0 \quad \text{для } 0 \leqslant i \leqslant k-2; \tag{3.16}$$

$$\mu_{\beta\alpha g^{k-1}} + \nu_{\alpha\gamma b^{k-1}} + (t-1)\sigma_{\eta^2} = 0; \tag{3.17}$$

$$\mu_\beta + \nu_\gamma + (t-1)\sigma_\eta = 0,\ (t-1)\sigma_{e_1} = 0. \tag{3.18}$$

Теперь с использованием соотношений (3.10)–(3.18) легко приходим к следующему описанию базиса $\operatorname{Ker}\delta^1$.

Предложение 3.3. (1) *Пусть* $c\neq 0$.

(1а) *Предположим дополнительно, что* k *и* t *нечётны. Тогда пространство* $\operatorname{Ker}\delta^1$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\big(\alpha g^i, \mathrm{O}_3\big) \ \text{для} \ 1\leqslant i\leqslant k-1; \tag{3.19}$$

$$\big(a^i+g^i, \mathrm{O}_3\big) \ \text{для} \ 1\leqslant i\leqslant k-1; \tag{3.20}$$

$$\big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\big),\ \big(a^k, \mathrm{O}_3\big),\ (0,\beta,\gamma,0); \tag{3.21}$$

$$\big(0,\beta a^i, \mathrm{O}_2\big) \ \text{для} \ 1\leqslant i\leqslant k-1; \tag{3.22}$$

$$\big(\mathrm{O}_2,\gamma b^i, 0\big) \ \text{для} \ 1\leqslant i\leqslant k-1; \tag{3.23}$$

$$\big(0,\beta\alpha g^i, \alpha\gamma b^i, 0\big) \ \text{для} \ 0\leqslant i\leqslant k-1; \tag{3.24}$$

$$\big(\mathrm{O}_3,\eta^i\big) \ \text{для} \ 2\leqslant i\leqslant t. \tag{3.25}$$

(1б) *Пусть теперь* k *нечётно, а* t *чётно. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker}\delta^1$ *надо в множестве, указанном в части* (1а), *элемент* $\big(\mathrm{O}_3,\eta^2\big)$ *из* (3.25) *заменить на элемент* $\big(\mathrm{O}_2,\gamma\eta,\eta^2\big)$, *а также добавить к этому множеству элемент* $\big(\alpha,\beta,0,\eta\big)$.

(1в) *Пусть* k *чётно, а* t *нечётно. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker}\delta^1$ *надо к множеству, указанном в части* (1а), *добавить элемент* $\big(\alpha,\mathrm{O}_3\big)$.

(1г) *Пусть, наконец,* k *и* t *чётны. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker}\delta^1$ *надо к множеству, указанному в части* (1в), *добавить элемент* $\big(\mathrm{O}_2,\gamma,\eta\big)$.

(2) *Пусть* $c=0$.

(2а) *Предположим дополнительно, что* k *и* t *нечётны. Тогда пространство* $\operatorname{Ker}\delta^1$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из элементов, указанных в* (3.19)–(3.25), *а также из элементов*

$$\big(e_0,\mathrm{O}_2,b^{k-1}\big),\ \big(\alpha,\mathrm{O}_2,\eta\big). \tag{3.26}$$

(2б) *Пусть теперь* k *нечётно, а* t *чётно. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker}\delta^1$ *надо в множестве, указанном в части* (2а), *элемент* $\big(\mathrm{O}_3,\eta^2\big)$ *из* (3.25) *заменить на элемент* $\big(\mathrm{O}_2,\gamma\eta,\eta^2\big)$, *а элемент* $\big(\alpha,\mathrm{O}_2,\eta\big)$ *заменить на элемент* $\big(\alpha,0,\gamma,\eta\big)$.

(2в) *Пусть k чётно, а t нечётно. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker}\delta^1$ *надо в множестве, указанном в части* (2а), *элемент* $\big(\alpha, \mathrm{O}_2, \eta\big)$ *заменить на элемент* $\big(\alpha, \mathrm{O}_3\,\big)$.

(2г) *Пусть, наконец, k и t чётны. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker}\delta^1$ *надо к множеству, указанному в части* (2б), *добавить элемент* $(\alpha, 0, \gamma, \eta)$, *а элемент* $\big(\alpha, \mathrm{O}_2, \eta\big)$ *заменить на элемент* $\big(\alpha, \mathrm{O}_3\,\big)$.

Предложение 3.4. (1) *Пусть* $c \neq 0$.

(1а) *Предположим дополнительно, что k и t нечётны. Тогда пространство* $\operatorname{Im}\delta^1$ *допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\,\big),\ \big(a^k, \mathrm{O}_3\,\big),\ \big(0, \eta\beta, \gamma\eta, 0\big),\ \big(\,\mathrm{O}_3, \eta^{t-1}\big); \tag{3.27}$$

$$\big(\alpha g^i, \mathrm{O}_3\,\big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.28}$$

$$\big(a^i + g^i, \mathrm{O}_3\,\big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.29}$$

$$\big(0, \beta a^i, \gamma b^i, 0\big) \ \text{ для } \ 0 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.30}$$

$$\big(\,\mathrm{O}_3, b^i\big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k. \tag{3.31}$$

(1б) *Пусть теперь k нечётно, а t чётно. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Im}\delta^1$ *надо в множестве, указанном в части* (1а), *элемент* $\big(0, \beta, \gamma, 0\big)$ *из* (3.30) *заменить на элемент* $\big(0, \beta, \gamma, \eta^{t-2}\big)$, *а также вместо пары элементов* $\big(\,\mathrm{O}_3, \eta^{t-1}\big)$ *и* $\big(0, \eta\beta, \gamma\eta, 0\big)$ *включить элемент* $\big(0, \eta\beta, \gamma\eta, \eta^{t-1}\big)$.

(1в) *Пусть k чётно, а t нечётно. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Im}\delta^1$ *надо из множества, указанного в части* (1а), *исключить элемент* $\big(\alpha^k, \mathrm{O}_3\,\big)$.

(1г) *Пусть, наконец, k и t чётны. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Im}\delta^1$ *надо из множества, указанного в части* (1б), *исключить элемент* $\big(\alpha^k, \mathrm{O}_3\,\big)$.

(2) *Пусть* $c = 0$.

(2а) *Предположим дополнительно, что t нечётно* (*а k любое*). *Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Im}\delta^1$ *надо из множества, указанного в части* (1а) *см.* (3.27)–(3.31), *исключить элементы*

$$\big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\,\big),\ \big(g^k, \mathrm{O}_3\,\big).$$

(2б) *Пусть теперь* k *нечётно, а* t *чётно. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Im}\delta^1$ *надо в множестве, указанном в части* (2а), *элемент* $\left(0,\beta,\gamma,0\right)$ *из* (3.30) *заменить на элемент* $\left(0,\beta,\gamma,\eta^{t-2}\right)$.

(2в) *Пусть, наконец,* k *и* t *чётны. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Im}\delta^1$ *надо в множестве, указанном в части* (2б), *пару элементов* $\left(\mathrm{O}_3,\eta^{t-1}\right)$ *и* $\left(0,\eta\beta,\gamma\eta,0\right)$ *заменить на один элемент* $\left(0,\eta\beta,\gamma\eta,\eta^{t-1}\right)$.

Доказательство. Для доказательства утверждения достаточно рассмотреть значения δ^1 на наборах вида (r_{00},O_3) (соответственно вида $(0,r_{10},\mathrm{O}_2)$, $(\mathrm{O}_2,r_{01},0)$ или (O_3,r_{11})), где r_{ij} пробегает подмножество $\mathcal{B}_{ij}$, $i,j\in\{0,1\}$ стандартного базиса алгебры R (см. (2.1)), а затем с помощью полученного множества значений выделить для каждого из рассматриваемых выше случаев базис пространства $\operatorname{Im}\delta^1$. $\square$

Следствие 3.5. (1) *Пусть* $c\neq 0$. *Тогда*:

$$\dim_K \operatorname{Ker}\delta^1 = \begin{cases} 5k+t-2, & \text{если } k \text{ и } t \text{ нечётны},\\ 5k+t-1, & \text{если } k \text{ и } t \text{ различной чётности},\\ 5k+t, & \text{если } k \text{ и } t \text{ чётны}; \end{cases}$$

$$\dim_K \operatorname{Im}\delta^1 = \begin{cases} 4k+2, & \text{если } k \text{ и } t \text{ нечётны},\\ 4k+1, & \text{если } k \text{ и } t \text{ различной чётности},\\ 4k, & \text{если } k \text{ и } t \text{ чётны}; \end{cases}$$

$$\dim_K \mathrm{HH}^1(R) = \begin{cases} k+t, & \text{если } k \text{ и } t \text{ нечётны},\\ k+t+1, & \text{если } k \text{ и } t \text{ различной чётности},\\ k+t+2, & \text{если } k \text{ и } t \text{ чётны}. \end{cases}$$

(2) *Пусть* $c=0$. *Тогда*:

$$\dim_K \operatorname{Ker}\delta^1 = \begin{cases} 5k+t, & \text{если } k \text{ или } t \text{ нечётно},\\ 5k+t+1, & \text{если } k \text{ и } t \text{ чётны}; \end{cases}$$

$$\dim_K \operatorname{Im}\delta^1 = \begin{cases} 4k, & \text{если } k \text{ или } t \text{ нечётно},\\ 4k-1, & \text{если } k \text{ и } t \text{ чётны}; \end{cases}$$

$$\dim_K \mathrm{HH}^1(R) = \begin{cases} k+t+2, & \text{если } k \text{ или } t \text{ нечётно},\\ k+t+3, & \text{если } k \text{ и } t \text{ чётны}. \end{cases}$$

Теперь мы исследуем второй дифференциал

$$\delta^2\colon \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_2, R) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_3, R).$$

Ввиду сделанных выше соглашений он описывается формулой: для $r_{ij} \in e_i R e_j$, $i, j \in \{0, 1\}$,

$$\delta^2(r_{00}, r_{10}, r_{01}, r_{11}) = (t_{00}, t'_{00}, t_{11}),$$

где

$$\begin{aligned} t_{00} =& \alpha r_{00} + r_{00}\alpha + c\gamma r_{10}\alpha + c r_{01}\beta\alpha,\\ t'_{00} =& \gamma\beta a^{k-1} r_{00} + r_{00}\gamma\beta a^{k-1} + \alpha\gamma r_{10} + \gamma r_{10}\alpha\\ &+ c\gamma b^{k-1} r_{10}\gamma\beta + r_{01}\beta\alpha + \alpha r_{01}\beta + c\gamma b^{k-1} r_{11}\beta\alpha g^{k-1},\\ t_{11} =& r_{10}\gamma + \beta r_{01} + \eta r_{11} + r_{11}\eta. \end{aligned}$$

Предложение 3.6. (1) *Пусть $c \neq 0$. Тогда пространство* $\operatorname{Ker}\delta^2$ *допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\big(\alpha g^i, \mathrm{O}_3\big) \ \text{для } 0 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.32}$$
$$\big(a^i + g^i, \mathrm{O}_3\big) \ \text{для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.33}$$
$$\big(c g^{i+1}, \beta\alpha g^i, \alpha\gamma b^i, 0\big) \ \text{для } 0 \leqslant i \leqslant k-2; \tag{3.34}$$
$$\big(e_0, \mathrm{O}_3\big),\ \big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\big),\ \big(a^k, \mathrm{O}_3\big),\ \big(0, \eta\beta, \gamma\eta, 0\big); \tag{3.35}$$
$$\big(0, \beta a^i, \gamma b^i, 0\big) \ \text{для } 0 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.36}$$
$$\big(\mathrm{O}_3, \eta^i\big) \ \text{для } 0 \leqslant i \leqslant t; \tag{3.37}$$
$$\big(\mathrm{O}_3, b^i\big) \ \text{для } 1 \leqslant i \leqslant k-1. \tag{3.38}$$

(2) *Пусть $c = 0$. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker}\delta^2$ *надо в множестве, указанном в части* (1), *элемент* $\big(0, \beta a^{k-1}, \gamma b^{k-1}, 0\big)$ *из* (3.36) *заменить на два следующих элемента*

$$\big(0, \beta a^{k-1}, \mathrm{O}_2\big), \quad \big(\mathrm{O}_2, \gamma b^{k-1}, 0\big).$$

Доказательство. Пусть $q = (r_{00}, r_{10}, r_{01}, r_{11}) \in \operatorname{Ker}\delta^2$. Представим компоненты этого 2-коцикла в виде (3.9). Тогда условие $t_{00} = 0$ равносильно системе следующих уравнений для координат соответствующих разложений:

$$\lambda_{\gamma\beta a^i} = 0 \quad \text{для } 0 \leqslant i \leqslant k-2; \tag{3.39}$$

$$\lambda_{g^i} + \lambda_{a^i} + c\nu_{\alpha\gamma b^{i-1}} = 0 \quad \text{для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.40}$$

$$c(\mu_{\beta a^i} + \nu_{\gamma b^i}) = 0 \quad \text{для } 1 \leqslant i \leqslant k-1. \tag{3.41}$$

Условие $t'_{00} = 0$ равносильно системе следующих уравнений:

$$\mu_{\beta a^i} + \nu_{\gamma b^i} = 0 \quad \text{для } 0 \leqslant i \leqslant k-2; \tag{3.42}$$

$$\mu_{\beta\alpha g^i} + \nu_{\alpha\gamma b^i} = 0 \quad \text{для } 0 \leqslant i \leqslant k-2. \tag{3.43}$$

Наконец, условие $t_{11} = 0$ равносильно соотношениям (3.43) вместе с соотношениями

$$\mu_{\beta\alpha g^{k-1}} + \nu_{\alpha\gamma b^{k-1}} = 0, \ \mu_\beta + \nu_\gamma = 0. \tag{3.44}$$

Простой анализ соотношений (3.39)–(3.44) приводит к обоим утверждениям доказываемого предложения. □

Предложение 3.7. (1) *Пусть $c \neq 0$. Тогда пространство $\operatorname{Im}\delta^2$ допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\big(\alpha g^i, \mathrm{O}_2\big) \ \textit{для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.45}$$

$$\big(a^i + g^i, \mathrm{O}_2\big) \ \textit{для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.46}$$

$$\big(cg^i, a^i + g^i, 0\big) \ \textit{для } 2 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.47}$$

$$\big(cg, a+g, \eta^{t-1}\big), \ \big(g^k, \mathrm{O}_2\big), \ \big(\mathrm{O}_2, b^k\big); \tag{3.48}$$

$$\big(0, \alpha g^i, b^i\big) \ \textit{для } 1 \leqslant i \leqslant k-1. \tag{3.49}$$

(2) *Пусть $c = 0$. Тогда для получения базиса пространства $\operatorname{Im}\delta^2$ надо из множества, указанного в части* (1), *удалить элемент* (g^k, O_2).

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству предложения 3.4. □

Следствие 3.8. (1)

$$\dim_K \operatorname{Ker}\delta^2 = \begin{cases} 5k+t+2, & \textit{если } c \neq 0, \\ 5k+t+3, & \textit{если } c = 0. \end{cases}$$

(2)

$$\dim_K \operatorname{Im} \delta^2 = \begin{cases} 4k-2, & \text{\textit{если} } c \neq 0, \\ 4k-3, & \text{\textit{если} } c = 0. \end{cases}$$

Следствие 3.9. (1) *Пусть $c \neq 0$. Тогда*

$$\dim_K \mathrm{HH}^2(R) = \begin{cases} k+t, & \text{\textit{если} } k \text{ \textit{и} } t \text{ \textit{нечётны},} \\ k+t+1, & \text{\textit{если} } k \text{ \textit{и} } t \text{ \textit{имеют различную чётность},} \\ k+t+2, & \text{\textit{если} } k \text{ \textit{и} } t \text{ \textit{чётны}.} \end{cases}$$

(2) *Пусть $c = 0$. Тогда*

$$\dim_K \mathrm{HH}^2(R) = \begin{cases} k+t+3, & \text{\textit{если} } k \text{ \textit{или} } t \text{ \textit{нечётно},} \\ k+t+4, & \text{\textit{если} } k \text{ \textit{и} } t \text{ \textit{чётны}.} \end{cases}$$

Дифференциал

$$\delta^3\colon \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_3, R) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_4, R)$$

описывается следующим образом: для $r_{00}, r'_{00} \in e_0Re_0$, $r_{11} \in e_1Re_1$

$$\delta^2(r_{00}, r'_{00}, r_{11}) = (t_{00}, t'_{00}, t''_{00}, t_{11}),$$

где

$$\begin{aligned} t_{00} =& \widetilde{\alpha} r_{00} + r_{00}\alpha + cr'_{00}\alpha + c^2\gamma b^{k-1} r_{11}\beta\alpha, \\ t'_{00} =& \gamma\beta a^{k-1} r_{00} + r_{00}\gamma\beta a^{k-1} + \alpha r'_{00} + r'_{00}\alpha \\ &+ c\bigl(\gamma b^{k-1} r_{11}\beta\alpha + \gamma\eta r_{11}\beta\bigr), \\ t''_{00} =& \sum_{i=0}^{k-1} \gamma\beta a^i r'_{00} g^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-1} a^i r'_{00}\gamma\beta a^{k-1-i} \\ &+ \sum_{i=0}^{k-1} \alpha\gamma b^i r_{11}\beta a^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-1} \gamma b^i r_{11}\beta\alpha g^{k-1-i}, \\ t_{11} =& \sum_{i=0}^{k-1} \beta a^i r'_{00}\gamma b^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{t} \eta^i r_{11}\eta^{t-i} + \sum_{i=1}^{k-1} b^i r_{11} b^{k-i}. \end{aligned}$$

Теперь аналогично предыдущему описываются базисы пространств $\operatorname{Ker}\delta^3$ и $\operatorname{Im}\delta^3$, а именно, справедливы следующие два утверждения.

Предложение 3.10. (1) *Пусть* $c \neq 0$.

(1а) *Предположим дополнительно, что* k *и* t *нечётны. Тогда пространство* $\operatorname{Ker}\delta^3$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\big(\alpha g^i, \mathrm{O}_2\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.50}$$

$$\big(a^i + g^i, \mathrm{O}_2\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.51}$$

$$\big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_2\big),\ \big(a^k, \mathrm{O}_2\big),\ (\alpha, \gamma\beta a^{k-1}, 0); \tag{3.52}$$

$$\big(cg^i, a^i + g^i, 0\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.53}$$

$$\big(0, \alpha g^i, 0\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.54}$$

$$\big(c\alpha, 0, e_1\big),\ \big(0, a^k, 0\big); \tag{3.55}$$

$$\big(\mathrm{O}_2, \eta^i\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant t; \tag{3.56}$$

$$\big(\mathrm{O}_2, b^i\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1. \tag{3.57}$$

(1б) *Пусть теперь* k *нечётно, а* t *чётно. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker}\delta^3$ *надо в множестве, указанном в части* (1а), *элемент* $\big(c\alpha, 0, e_1\big)$ *из* (3.55) *заменить на элемент* $\big(0, \alpha, e_1\big)$.

(1в) *Пусть* k *чётно, а* t *нечётно. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker}\delta^1$ *надо в множестве, указанном в части* (1а), *элемент* $\big(c\alpha, 0, e_1\big)$ *заменить на элемент* $\big(0, \widetilde{\alpha}, 0\big)$.

(1г) *Пусть, наконец,* k *и* t *чётны. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker}\delta^1$ *надо в множестве, указанном в части* (1а), *элемент* $\big(c\alpha, 0, e_1\big)$ *заменить на пару элементов* $\big(0, \widetilde{\alpha}, 0\big)$ *и* $\big(0, \alpha, e_1\big)$.

(2) *Пусть* $c = 0$.

(2а) *Предположим дополнительно, что* k *и* t *нечётны. Тогда пространство* $\operatorname{Ker}\delta^3$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из элементов, указанных в* (3.51), (3.53), (3.54), (3.56), (3.57), *а также из элементов*

$$\big(e_0, \mathrm{O}_2\big),\ \big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_2\big),\ \big(a^k, \mathrm{O}_2\big); \tag{3.58}$$

$$\big(\alpha g^i, \mathrm{O}_2\big) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.59}$$

$$\big(0, e_0, 0\big),\ \big(0, \gamma\beta a^{k-1}, 0\big),\ \big(0, a^k, 0\big),\ \big(\mathrm{O}_2, e_1\big). \tag{3.60}$$

(2б) *Пусть теперь* k *нечётно, а* t *чётно. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker}\delta^3$ *надо в множестве, указанном в части* (2а), *элемент* $\big(\mathrm{O}_2, e_1\big)$ *из* (3.60) *заменить на элемент* $\big(0, \alpha, e_1\big)$.

(2в) *Пусть k чётно, а t нечётно. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker}\delta^3$ *надо в множестве, указанном в части* (2а), *элемент* $\bigl(\mathrm{O}_2, e_1\bigr)$ *из* (3.60) *заменить на элемент* $\bigl(0,\alpha,0\bigr)$.

(2г) *Пусть, наконец, k и t чётны. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker}\delta^3$ *надо к множеству, указанному в части* (2а), *добавить элемент* $\bigl(0,\alpha,0\bigr)$.

Предложение 3.11. (1) *Пусть* $c \neq 0$.

(1а) *Предположим дополнительно, что хотя бы одно из чисел k и t нечётно. Тогда пространство* $\operatorname{Im}\delta^3$ *допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\bigl(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\bigr),\ \bigl(a^k, \mathrm{O}_3\bigr),\ \bigl(\mathrm{O}_3, \eta^t\bigr); \tag{3.61}$$

$$\bigl(\alpha g^i, \mathrm{O}_3\bigr) \ \text{для}\ 0 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.62}$$

$$\bigl(a^i + g^i, \mathrm{O}_3\bigr) \ \text{для}\ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.63}$$

$$\bigl(0, \alpha g^i, \mathrm{O}_2\bigr) \ \text{для}\ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.64}$$

$$\bigl(c g^i, a^i + g^i, \mathrm{O}_2\bigr) \ \text{для}\ 1 \leqslant i \leqslant k-1. \tag{3.65}$$

(1б) *Пусть теперь k и t чётны. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Im}\delta^3$ *надо из множества, указанного в части* (1а), *исключить элемент* $\bigl(\mathrm{O}_3, \eta^t\bigr)$.

(2) *Пусть* $c = 0$.

(2а) *Предположим, что хотя бы одно из чисел k и t нечётно. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Im}\delta^3$ *надо из множества, указанного в части* (1а), *исключить элементы* $\bigl(\alpha, \mathrm{O}_3\bigr)$, $\bigl(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\bigr)$, $\bigl(a^k, \mathrm{O}_3\bigr)$.

(2б) *Пусть, наконец, k и t чётны. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Im}\delta^3$ *надо из множества, указанного в части* (2а), *исключить элемент* $\bigl(\mathrm{O}_3, \eta^t\bigr)$.

Следствие 3.12. (1) *Пусть* $c \neq 0$. *Тогда*:

$$\dim_K \operatorname{Ker}\delta^3 = \begin{cases} 5k+t+1, & \text{если } k \text{ и } t \text{ чётны},\\ 5k+t & \text{в остальных случаях;}\end{cases}$$

$$\dim_K \operatorname{Im}\delta^3 = \begin{cases} 4k-1, & \text{если } k \text{ и } t \text{ чётны},\\ 4k, & \text{в остальных случаях;}\end{cases}$$

$$\dim_K \mathrm{HH}^3(R) = \begin{cases} k+t+3, & \textit{если } k \textit{ и } t \textit{ чётны},\\ k+t+2, & \textit{в остальных случаях}. \end{cases}$$

(2) *Пусть* $c = 0$. *Тогда*:

$$\dim_K \operatorname{Ker} \delta^3 = \begin{cases} 5k+t+4, & \textit{если } k \textit{ и } t \textit{ чётны},\\ 5k+t+3, & \textit{в остальных случаях}; \end{cases}$$

$$\dim_K \operatorname{Im} \delta^3 = \begin{cases} 4k-4, & \textit{если } k \textit{ и } t \textit{ чётны},\\ 4k-3, & \textit{в остальных случаях}; \end{cases}$$

$$\dim_K \mathrm{HH}^3(R) = \begin{cases} k+t+7, & \textit{если } k \textit{ и } t \textit{ чётны},\\ k+t+6, & \textit{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Доказательство. Утверждения о размерности группы $\mathrm{HH}^3(R)$ вытекают из соответствующих описаний размерности $\operatorname{Ker}\delta^3$, а также из следствия 3.8. □

Аналогично предыдущему осуществляется описание ядра дифференциала

$$\delta^4\colon\ \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_4, R) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_5, R).$$

Используя вид дифференциала d_4 из бимодульной резольвенты, построенной в разделе 2 (см. (2.4)), приходим к системе из шести уравнений над R. С использованием разложений по стандартному базису алгебры R анализ этой системы приводит к следующему утверждению. Детали соответствующих вычислений мы предоставляем провести читателю.

Предложение 3.13. (1) *Пусть* $c \neq 0$. *Тогда пространство* $\operatorname{Ker}\delta^4$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из следующих* *элементов*:

$$\left(\alpha g^i, \mathrm{O}_3\right) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.66}$$

$$\left(a^i + g^i, \mathrm{O}_3\right) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.67}$$

$$(e_0, \mathrm{O}_3),\ \left(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\right),\ \left(a^k, \mathrm{O}_3\right),\ \left(0, a^k, \mathrm{O}_2\right); \tag{3.68}$$

$$\left(0, \alpha g^i, \mathrm{O}_2\right) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.69}$$

$$\left(c g^i, a^i + g^i, \mathrm{O}_2\right) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.70}$$

$$\left(\mathrm{O}_2, e_0, e_1\right),\ \left(\mathrm{O}_2, \gamma\beta a^{k-1}, 0\right),\ \left(\mathrm{O}_2, a^k, 0\right),\ \left(\mathrm{O}_2, \alpha g^{k-1}, \eta\right); \tag{3.71}$$

$$\left(\mathrm{O}_2, a^i + g^i, b^i\right) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.72}$$

$$\left(\mathrm{O}_3, \eta^i\right) \text{ для } 2 \leqslant i \leqslant t. \tag{3.73}$$

(2) *Пусть $c = 0$. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker}\delta^4$ *надо к множеству, указанному в части* (1), *присоединить следующие элементы*

$$\left(0, e_0, \mathrm{O}_2\right),\ \left(0, \alpha, \mathrm{O}_2\right),\ \left(0, \gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_2\right). \tag{3.74}$$

Следствие 3.14.

$$\dim_K \operatorname{Ker}\delta^4 = \begin{cases} 5k + t + 3, & \text{если } c \neq 0, \\ 5k + t + 6, & \text{если } c = 0. \end{cases}$$

Следствие 3.15. (1) *Пусть $c \neq 0$. Тогда*

$$\dim_K \mathrm{HH}^4(R) = \begin{cases} k + t + 4, & \text{если } k \text{ и } t \text{ чётны}, \\ k + t + 3 & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

(2) *Пусть $c = 0$. Тогда*

$$\dim_K \mathrm{HH}^4(R) = \begin{cases} k + t + 10, & \text{если } k \text{ и } t \text{ чётны}, \\ k + t + 9 & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Пусть $\mathcal{X}^\bullet := \operatorname{Hom}_\Lambda(X_\bullet, R)$, где $X_\bullet$ – комплекс из предложения 2.2. Из описания бимодульной резольвенты алгебры R, построенной в §2, вытекает, что дифференциалы комплекса $X_\bullet$ описываются так: при $m \geqslant 2$

$$d_{2m}^{X_\bullet} = \begin{pmatrix} \alpha \otimes e_0 + e_0 \otimes \alpha & \gamma\beta a^{k-1} \otimes e_0 + e_0 \otimes \gamma\beta a^{k-1} \\ c \cdot e_0 \otimes \alpha & \widetilde{\alpha} \otimes e_0 + e_0 \otimes \alpha \end{pmatrix},$$

$$d^{X_\bullet}_{2m+1} = \begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}\otimes e_0 + e_0\otimes\alpha & \gamma\beta a^{k-1}\otimes e_0 + e_0\otimes\gamma\beta a^{k-1} \\ c\cdot e_0\otimes\alpha & \alpha\otimes e_0 + e_0\otimes\alpha \end{pmatrix}.$$

Предложение 3.16. (1) *Пусть $c \neq 0$. Тогда при $n \geqslant 4$ $\dim_K \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) = 2$; при этом в качестве K-базиса пространства $\mathrm{H}^{2m}(\mathcal{X}^\bullet)$ $(m \geqslant 2)$ можно взять когомологические классы коциклов*

$$\big(e_0, 0\big),\ \big(a^k, 0\big),$$

а в качестве K-базиса пространства $\mathrm{H}^{2m+1}(\mathcal{X}^\bullet)$ $(m \geqslant 2)$ можно взять когомологические классы коциклов

$$\big(0, \widetilde{\alpha}\big),\ \big(0, \gamma\beta a^{k-1}\big).$$

(2) *Пусть $c = 0$. Тогда при $n \geqslant 4$ $\dim_K \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) = 8$; при этом в качестве K-базиса пространства $\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet)$ $(n \geqslant 4)$ можно взять когомологические классы коциклов*

$$\begin{gathered}\big(e_0, 0\big),\ \big(\alpha, 0\big),\ \big(\gamma\beta a^{k-1}, 0\big),\ \big(a^k, 0\big),\\ \big(0, e_0\big),\ \big(0, \alpha\big),\ \big(0, \gamma\beta a^{k-1}\big),\ \big(0, a^k\big).\end{gathered}$$

Доказательство. Мы рассмотрим только случай $c \neq 0$; случай $c = 0$ рассматривается таким же образом. Аналогично доказательству предложений 3.3 и 3.4 устанавливаем, что при $m \geqslant 2$ в качестве базиса пространства $\operatorname{Ker}\delta^{2m}_{\mathcal{X}^\bullet}$ можно взять множество, состоящее из элементов

$$\begin{aligned} &\big(\alpha g^i, 0\big) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\ &\big(a^i + g^i, 0\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\ &(e_0, 0),\ \big(\gamma\beta a^{k-1}, 0\big),\ \big(a^k, 0\big),\ \big(0, a^k\big);\\ &\big(0, \alpha g^i\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\ &\big(cg^i, a^i + g^i\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \end{aligned}$$

а для пространства $\operatorname{Ker}\delta_{\mathcal{X}^\bullet}^{2m+1}$ в качестве базиса можно взять множество, состоящее из элементов

$$\begin{aligned}
&\big(\alpha g^i,0\big) \ \text{для}\ 1\leqslant i\leqslant k-1;\\
&\big(a^i+g^i,0\big) \ \text{для}\ 1\leqslant i\leqslant k-1;\\
&(\alpha,\gamma\beta a^{k-1}),\ \big(\gamma\beta a^{k-1},0\big),\ \big(a^k,0\big),\ \big(0,\widetilde{\alpha}\big),\ \big(0,a^k\big);\\
&\big(0,\alpha g^i\big) \ \text{для}\ 1\leqslant i\leqslant k-1;\\
&\big(cg^i,a^i+g^i\big) \ \text{для}\ 1\leqslant i\leqslant k-1.
\end{aligned}$$

Также при $m\geqslant 2$ в качестве базиса пространства $\operatorname{Im}\delta_{\mathcal{X}^\bullet}^{2m}$ можно взять множество, состоящее из элементов

$$\begin{aligned}
&\big(\alpha g^i,0\big) \ \text{для}\ 1\leqslant i\leqslant k-1;\\
&\big(a^i+g^i,0\big) \ \text{для}\ 1\leqslant i\leqslant k-1;\\
&(\alpha,\gamma\beta a^{k-1}),\ \big(a^k,0\big),\ \big(0,a^k\big);\\
&\big(0,\alpha g^i\big) \ \text{для}\ 1\leqslant i\leqslant k-1;\\
&\big(cg^i,a^i+g^i\big) \ \text{для}\ 1\leqslant i\leqslant k-1,
\end{aligned}$$

а для пространства $\operatorname{Im}\delta_{\mathcal{X}^\bullet}^{2m+1}$ в качестве базиса можно взять множество, состоящее из элементов

$$\big(\alpha g^i,0\big) \ \text{для}\ 1\leqslant i\leqslant k-1; \tag{3.75}$$

$$\big(a^i+g^i,0\big) \ \text{для}\ 1\leqslant i\leqslant k-1; \tag{3.76}$$

$$(\alpha,0),\ \big(\gamma\beta a^{k-1},0\big),\ \big(a^k,0\big); \tag{3.77}$$

$$\big(0,\alpha g^i\big) \ \text{для}\ 1\leqslant i\leqslant k-1; \tag{3.78}$$

$$\big(cg^i,a^i+g^i\big) \ \text{для}\ 1\leqslant i\leqslant k-1; \tag{3.79}$$

кроме того, $\operatorname{Im}\delta_{\mathcal{X}^\bullet}^{3}$ также порождается элементами, указанными в (3.75)–(3.79) (надо заметить, что матрица для $d_3^{X_\bullet}$ состоит из первых двух столбцов матрицы $d_3^{Q_\bullet}$; – см. (2.3)). Из этого описания коциклов и кограниц комплекса $\mathcal{X}^\bullet$ следует приведённое выше описание его когомологий. $\square$

Предложение 3.17. *Для* $n\geqslant 5$

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R)=\begin{cases}\dim_K \mathrm{HH}^n(R)+2, & \text{если } c\neq 0,\\ \dim_K \mathrm{HH}^{n-4}(R)+8, & \text{если } c=0.\end{cases}$$

Доказательство. Короткая точная последовательность (2.7) после применения функтора $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,R)$ даёт короткую точную последовательность комплексов

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet[-4], R) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R) \xrightarrow{i^*} \mathcal{X}^\bullet \to 0,$$

которая, в свою очередь, приводит к длинной точной когомологической последовательности

$$\cdots \xrightarrow{\Delta^{n-1}} \mathrm{HH}^{n-4}(R) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{HH}^n(R) \xrightarrow{i^*} \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) \xrightarrow{\Delta^n} \mathrm{HH}^{n-3}(R) \xrightarrow{\pi^*} \cdots .$$

Легко доказывается (ср. доказательство предложения 3.22 в [23]), что в этой последовательности связывающие гомоморфизмы Δ^n нулевые при $n \geqslant 4$. Тогда

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) = \dim_K \mathrm{HH}^{n-4}(R) + \dim_K \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet),$$

и остаётся применить предложение 3.16. □

Таким образом, используя предложение 3.17, мы завершаем доказательство теоремы 1.1.

Литература

1. K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras.* — Lecture Notes Math. **1428** Berlin; Heidelberg (1990).
2. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* I: *серия $D(3\mathcal{K})$ в характеристике* 2. — Алгебра и анализ **16**, No. 6 (2004), 53–122.
3. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа,* I: *обобщенные группы кватернионов.* — Алгебра и анализ **18**, No. 1 (2006), 55–107.
4. А. И. Генералов, А. А. Иванов, С. О. Иванов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа,* II. *Серия $Q(2\mathcal{B})_1$ в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **349** (2007), 53–134.
5. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа,* III. *Алгебры с малым параметром.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **356** (2008), 46–84.
6. А. А. Иванов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа: серия $Q(2\mathcal{B})_1(k,s,a,c)$ над полем характеристики не* 2. — Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер.1. Мат., мех., астрон. No. 1 (2010), 63–72.
7. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* II. *Локальные алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **375** (2010), 92–129.
8. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* III. *Локальные алгебры в характеристике* 2. — Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер.1. Мат., мех., астрон. No. 1 (2010), 28–38.

9. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* I. *Групповые алгебры полудиэдральных групп.* — Алгебра и анализ **21**, No. 2 (2009), 1–51.
10. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* II. *Локальные алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **386** (2011), 144–202.
11. А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская, *Когомологии Хохшильда алгебр Лю–Шульца.* — Алгебра и анализ **18**, вып. 4 (2006), 39–82.
12. K. Erdmann, Th. Holm, N. Snashall, *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class* A_n, II. — Algebras and Repr. Theory **5** (2002), 457–482.
13. А. И. Генералов, М. А. Качалова, *Бимодульная резольвента алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **321** (2005), 36–66.
14. М. А. Качалова, *Когомологии Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **330** (2006), 173–200.
15. М. А. Пустовых, *Кольцо когомологий Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **388** (2011), 173–200.
16. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **343** (2007), 121–182.
17. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **365** (2009), 63–121.
18. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. III. — Зап. научн. семин. ПОМИ **386** (2011), 100–128.
19. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда нестандартных самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. — Зап. научн. семин. ПОМИ **388** (2011), 48–99.
20. Ю. В. Волков, *Алгебра когомологий Хохшильда для одной серии самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. — Алгебра и Анализ **23** (2011), No. 5, 99–139.
21. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. IV. — Зап. научн. семин. ПОМИ **388** (2011), 100–118.
22. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. V. — Зап. научн. семин. ПОМИ **394** (2011), 140–173.
23. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда целочисленного группового кольца диэдральной группы.* I. *Чётный случай.* — Алгебра и анализ **19**, No. 5 (2007), 70–123.
24. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда целочисленного группового кольца полудиэдральной группы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **388** (2011), 119–151.
25. T. Hayami, *Hochschild cohomology ring of the integral group ring of dihedral groups.* — Tsukuba J. Math. **31** (2007), 99–127.
26. T. Hayami, *Hochschild cohomology ring of the integral group ring of the semidihedral* 2*-groups.* — Algebra Colloq. **18**, No. 2 (2011), 241–258.
27. S. F. Siegel, S. J. Witherspoon, *The Hochschild cohomology ring of a group algebra.* — Proc. London Math. Soc. **79** (1999), 131–157.

28. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, С. О. Иванов, *О построении бимодульных резольвент с помощью лемма Хаппеля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **375** (2010), 61–70.
29. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа.* V. — Зап. научн. семин. ПОМИ **394** (2011), 194–208.

Generalov A. I. Hochschild cohomology for algebras of semidihedral type. III. The family $SD(2\mathcal{B})_2$ in characteristic 2.

We compute the Hochschild cohomology groups for algebras of semidihedral type which are contained in the family $SD(2\mathcal{B})_2$ (from the famous K. Erdmann's classification) over an algebraically closed field of characteristic two. In the calculation, we use a construction of the bimodule resolution for algebras from the above family.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: general@pdmi.ras.ru

Поступило 21 мая 2012 г.