Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 400, 2012 г.

С. В. Востоков, В. В. Волков, Г. К. Пак

СИМВОЛ ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ МНОГОЧЛЕННЫХ ФОРМАЛЬНЫХ ГРУПП

В работе строится явная формула для аналога спаривания Гильберта в универсальных формальных модулях для многочленных формальных групп над кольцами целых локальных полей.

§1. Основные обозначения

Пусть k – конечное алгебраическое расширение поля Q_p.
K – расширение поля k, содержащее все корни степени p^n из 1,
ζ_n – первообразный корень степени p^n из 1,
R – мультипликативная система представителей Тейхмюллера поля вычетов $\overline{K}$ поля K в кольце целых $\mathcal{O}_K$,
M – максимальный идеал кольца целых $\mathcal{O}_K$,
T – подполе инерции в $K/\mathbb{Q}_p$,
$\mathcal{O}_T$ – кольцо целых поля T,
x, X – переменные,
$\mathcal{O}'_T = \mathcal{O}_T[x]$, $M_x = X\mathcal{O}'_T[[X]]$ – идеал в $\mathcal{O}'_T[[X]]$,
φ – автоморфизм Фробениуса в $T/\mathbb{Q}_p$,
Δ – оператор Фробениуса в $\mathcal{O}'_T[[X]]$:

$$\Delta\left(\sum \alpha_i x^i\right) = \sum \alpha_i^{\varphi} x^{pi}, \quad \alpha_i \in \mathcal{O}_T,$$
$$\Delta\left(\sum a_i X^i\right) = \sum a_i^{\Delta} X^{pi}, \quad a_i \in \mathcal{O}'_T.$$

Определим следующие формальные группы:

$F_m(X, Y) = X + Y + XY$ – мультипликативная формальная группа,
$F_x(X, Y) = X + Y + xXY$ – универсальная многочленная формальная группа.

Заметим, что формальные группы, которые являются многочленами, имеют только вид

$$F_a(X, Y) = X + Y + aXY.$$

Ключевые слова: универсальные формальные группы, спаривание Гильберта, локальные кольца, многочленные формальные группы.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ No. 11-01-00588-а.

Пусть, далее, $F_x(M_x)$ – универсальный формальный $\mathbb{Z}_p$-модуль, построенный на идеале M_x с помощью формальной группы F_x.

Эндоморфизмы умножения на $r \in \mathbb{N}$ в группах F_m и F_x имеют вид:

$$[r](X) = (1+X)^r - 1,$$

$$[r]_x(X) = x^{-1}[r](xX) = x^{-1}((1+xX)^r - 1);$$

$$\operatorname{Ker}[p^n](X) = \bigl\{\xi_n = (\zeta_n - 1)\bigr\},$$

$$\operatorname{Ker}[p^n]_x(X) = \bigl\{\xi_{x,\,n} = x^{-1}(\zeta_n - 1)\bigr\}.$$

Логарифмы формальных групп F_m и F_x:

$$\lambda(X) = \log(1+X) = \sum_{i\geqslant 1} \frac{X^i}{i},$$

$$\lambda_x(X) = x^{-1}\log(1+xX) = \sum_{i\geqslant 1} \frac{x^{i-1}X^i}{i}.$$

Логарифм p-типической универсальной многочленной формальной группы $F_{p,\,x}$, соответствующей F_x, имеет вид

$$\lambda_{p,\,x} = x^{-1}\left(1 - \frac{\Delta}{p}\right)^{-1}(xX) = \left(1 - \frac{x^{p-1}}{p}\Delta\right)^{-1}(X).$$

§2. Функция Артина-Хассе и обратная к ней для многочленных формальных групп

Пусть $f(X)$ – ряд из кольца $X\mathcal{O}'_T[[X]]$. Определим функции

$$E_x(f) = x^{-1}\left(E(xf) - 1\right) = \lambda_x^{-1}\left(1 - \frac{x^{p-1}}{p}\Delta\right)(f), \qquad (1)$$

где $E(xf) = \exp\left(1 - \frac{\Delta}{p}\right)^{-1}(xf)$,

$$\ell_x(f) = x^{-1}\ell(xf) = \left(1 - \frac{x^{p-1}}{p}\Delta\right)\lambda_x(f),$$

где $\ell(xf) = \left(1 - \frac{\Delta}{p}\right)\log(1+xf)$.

Функцию $E_x(f)$ будем называть *функцией Артина–Хассе* для F_x, а функцию $\ell_x(f)$ – обратной к ней.

Следующее утверждение вытекает непосредственно из лемм 2, 3, 4 работы [2].

Лемма 1. 1) *Функции $E_x(f)$, $\ell_x(f)$ корректно определены, т.е.*

$$E_x(f),\ \ell_x(f) \in \mathcal{O}'_T[[X]]X,$$

и являются взаимно-обратными функциями.

2) $E_x(f+g) = E_x(f) +_{F_x} E_x(g)$, $\ell_x(f +_{F_x} g) = E_x(f) + E_x(g)$.

§3. Спаривания на формальных модулях

Пусть $\alpha \in \mathcal{O}_T[[X]]^*$, $\beta \in F_x(M_x)$. Зададим спаривание

$$\begin{aligned} [\,,]_{x,n}\colon \quad & \mathcal{O}_T[[X]]^* \times F_x(M_x) \longrightarrow \mathcal{O}'_T \mod (p^n,\, \wp) \\ & \alpha,\, \beta \longmapsto \operatorname{res}_X \Phi(\alpha,\, \beta)/x^{-1}(\underline{\zeta}_n^{p^n} - 1), \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\Phi(\alpha,\, \beta) = \ell_x(\beta)\alpha^{-1}\partial\alpha - \ell_M(\alpha)\partial\frac{\Delta}{p}\ell_x(\beta), \quad \partial = \frac{d}{dX},$$

$\underline{\zeta}_n(X) \in 1 + X\mathcal{O}_T[[X]]$ – такой ряд, что $\underline{\zeta}_n(\pi) = \zeta_n$ (π – простой элемент в K) и $\wp(c) = c^\Delta - c$, для $c \in \mathcal{O}'_T$. Наконец, $\ell_M(\alpha) = \dfrac{1}{p}\log \alpha^p/\alpha^\Delta$.

Теорема 1. *Спаривание $[\,,]_x$ корректно определено и обладает следующими свойствами:*

1) *билинейность;*

2) *инвариантность при замене $X = g(Y)$, где $g(X) \in \mathcal{O}'_T[[Y]]$, $g(0) = 0$ (при $p \neq 2$);*

3) *соотношение Стейнберга: $[\alpha,\, \mathcal{E}_x(\alpha)]_x \equiv 0 \mod (p^n,\, \wp)$, где $\alpha \in \mathcal{O}_T((X))^* \cap F_x(M_x)$ и $\mathcal{E}_x(\alpha) = x^{-1}(E(x\alpha) - 1)$ (при $p \neq 2$);*

4) *инвариантность при замене во второй координате*

$$\beta(X) \in M_x \longmapsto \beta(X) + u_x(X)\psi(X),$$

где $u_x(X)$ будет определено ниже, а $\psi(X)$ – некоторый ряд из кольца $O_T[[X]]$.

Доказательство. Так как по определению $x^\Delta = x^p$, то функция $\ell_x(\beta)$ имеет коэффициенты из кольца $\mathcal{O}'_T$ (лемма 1). Поэтому ряд $\Phi(\alpha,\, \beta)$ имеет целые коэффициенты.

1) Свойства билинейности:

$$\begin{aligned} &[\alpha_1\alpha_2,\, \beta]_x = [\alpha_1,\, \beta]_x + [\alpha_2,\, \beta]_x, \\ &[\alpha,\, \beta_1 +_{F_x} \beta_2]_x = [\alpha,\, \beta_1]_x + [\alpha,\, \beta_2]_x, \\ &[\alpha^m,\, \beta]_x = m[\alpha,\, \beta]_x,\ m \in \mathbb{Z}, \\ &[\alpha,\, [m]_x(\beta)]_x = m[\alpha,\, \beta]_x,\ m \in \mathbb{Z}_p, \end{aligned} \tag{3}$$

следуют из аддитивности функций ℓ_x, ℓ_M и аддитивности логарифмической производной.

2) Пусть имеется следующая замена переменных $X = g(Y)$, где $g(X) \in \mathcal{O}'_T[[Y]]$, $g(0) = 0$. Пусть $\alpha = \theta x^k$, $\theta \in R$. Рассмотрим как изменится ряд $E_x(\alpha X^m)$ при такой замене переменных. Так как функция E_x зависит от выбора переменной X (см. (1)), то снабдим её индексом X. Таким образом,

$$E_{x,\,X}(f) = x^{-1}\left(E_X(xf) - 1\right) = x^{-1}\left(\exp\left(1 - \frac{\Delta_X}{p}\right)^{-1}(xf) - 1\right).$$

При этих обозначениях имеет место следующая формула при замене переменных $X = g(Y)$:

$$E_{x,\,X}(\alpha X^m) = E_{x,\,Y}\left(x^{-1}\left(1 - \frac{\Delta_Y}{p}\right)S\right),$$

где $S = \sum\limits_{r\geqslant 0}\dfrac{(x\alpha g^m)^{p^r}}{p^r}$. Действительно,

$$\begin{aligned} E_{x,\,Y}\left(x^{-1}\left(1 - \frac{\Delta_Y}{p}\right)S\right) &= x^{-1}\left(\exp\left(1 - \frac{\Delta_Y}{p}\right)^{-1}\left(1 - \frac{\Delta_Y}{p}\right)S - 1\right) \\ &= x^{-1}\left(E_X(\alpha X^m) - 1\right) = E_{x,\,X}(\alpha X^m). \end{aligned}$$

При этом ряд $x^{-1}\left(1 - \frac{\Delta_Y}{p}\right)S$ имеет коэффициенты в кольце $\mathcal{O}'_T$, т.к.

$$\begin{aligned} x^{-1}\left(1 - \frac{\Delta_Y}{p}\right)S &= \alpha g^m + x^{-1}\sum_{r\geqslant 1}\frac{(x\alpha g^m)^{p^r} - (x\alpha g^m)^{p^{r-1}\Delta_Y}}{p^r} \\ &= \alpha g^m + x^{-1}\sum_{r\geqslant 1}(x\alpha)^{p^r}\frac{g^{mp^r} - g^{p^{r-1}\Delta_Y}}{p^r} \end{aligned}$$

(по определению $x\alpha = \theta x^{k+1}$ и, значит, $(x\alpha)^{\Delta_Y} = \theta^p x^{p(k+1)}$). Индукцией по r проверяется, что слагаемое $(g^{mp^r} - g^{p^{r-1}\Delta_Y})/p^r$ имеет коэффициенты в $\mathcal{O}'_T$. Проверим сравнение

$$[X,\, E_{x,\,X}(\alpha X^m)]_x \equiv \left[g(Y), E_{x,\,Y}\left(x^{-1}\left(1 - \frac{\Delta_Y}{p}\right)S\right)\right]_x \bmod (p^n,\, \wp).$$

По определению ряда Φ имеем $[X,\, E_{x,\,X}(\alpha X^m)]_x = \alpha X^{m-1}/(\underline{\zeta}_n p^n - 1)$, и

$$\left[g(Y), E_{x,Y}\left(x^{-1}\left(1-\frac{\Delta_Y}{p}\right)S\right)\right]_x = \operatorname{res}\Psi(Y)/(\underline{\zeta}_n p^n - 1),$$

где

$$\Psi(Y) = \alpha g^{m-1}\frac{d}{dY}g + x^{-1}\sum_{r\geqslant 1}\left(\frac{(x\alpha g^m)^{p^r} - (x\alpha g^m)^{p^{r-1}\Delta_Y}}{p^r} - \ell_Y(g)\frac{d}{dY}\frac{(x\alpha g^m)^{p^{r-1}\Delta_Y}}{p^r}\right)$$
$$= \alpha g^{m-1}\frac{d}{dY}g + x^{-1}\sum_{r\geqslant 1}(x\alpha)^{p^r}\left(\frac{g^{mp^r} - g^{p^{r-1}\Delta_Y}}{p^r} - \ell_Y(g)\frac{d}{dY}\frac{g^{mp^{r-1}\Delta_Y}}{p^r}\right),$$

так как $(x\alpha)^{\Delta_Y} = (\theta x^{k+1})^{\Delta_Y} = (\theta x^{k+1})^p$. Дальнейшая проверка происходит так же, как в предложении 3 работы [6].

3) Доказательство проходит так же, как в пункте 6°, §2 работы [1].

4) Пусть $\underline{\xi}_n(X)$ – такой ряд из $\mathcal{O}_T[[X]]$, что $\underline{\xi}_n(\pi) = \xi_n$, и пусть $s_{m,x}(X) = [p^m]_x(\underline{\xi}_n)$. Определим $u_x(X) = s_{n,x}(X)/s_{n-1,x}(X)$, $u(X) = s_n(X)/s_{n-1}(X)$, где $s_m(X) = [p^m](\underline{\zeta}_n - 1)$ и $\underline{\zeta}_n(\pi) = \zeta_n$. Нетрудно видеть, что $u_x(X) = u(X)$, т. к.

$$u_x(X) = \frac{x^{-1}[p^n](x\underline{\xi}_n)}{x^{-1}[p^{n-1}](x\underline{\xi}_n)} = \frac{[p^n](\underline{\zeta}_n - 1)}{[p^{n-1}](\underline{\zeta}_n - 1)} = u(X),$$

т.е. ряд $u_x(X)$ совпадает с рядом $u(X)$ для мультипликативной формальной группы. Ясно при этом, что $u_x(X) = p + pc_1x + \ldots + pc_{k-1}x^{k-1} + c_kx^k + \ldots \in \mathcal{O}_T[[X]]$, $p \not| c_k$ – ряд Эйзенштейна для простого элемента π поля K, т.е. $u_x(\pi) = 0$. Кроме того, если $\beta(x) \in \mathcal{O}_T[[X]]$ и $\beta(\pi) = 0$, то $\beta(x) = u(x)\psi(x)$ при некотором ряде $\psi(x)$ из $\mathcal{O}_T[[X]]$ (см. [2], лемма 6). Поэтому так же, как в работе [6] (теорема 1, §3), получаем указанный результат. □

Литература

1. Т. Б. Беляева, С. В. Востоков, *Символ Гильберта в полном многомерном поле.* I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **281** (2001), 5–34.
2. С. В. Востоков, *Явная форма закона взаимности.* — Изв. АН СССР, Сер. матем. **42**, No. 6 (1978), 1287–1320.

3. С. В. Востоков, *Символ Гильберта в дискретно нормированном поле.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **94** (1979), 50–69.
4. I. Fesenko, S. Vostokov, *Local fields and their extensions.* — Amer. Math. Soc. New York (1993).
5. K. Hensel, *Die multiplikative Darstellung der algebraischen Zahlen für den Bereich eines beliebigen Primteilers.* — J. reine angew. Math. **146** (1916), 189–215.
6. С. В. Востоков, *Норменное спаривание в формальных модулях.* — Изв. АН СССР, Сер. матем. **43** (1979), No. 4, 765–794.

Vostokov S. V., Volkov V. V., Pak G. K. The Hilbert symbol of a polynomial formal group.

We constract an explicit formula for the analogue of Hilbert pairing over universal formal modules for polynomial formal group of integer ring of local field is constructed. This pairing is well-defined, invariant under the change of variables and has a property similar to the invariance under the change of series expansion. Aim of this construction is to obtain explicit formulae for generalised Hilbert pairing over arbitrary formal module for polynomial formal group of local ring.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: sergei.vostokov@gmail.com

ДВГУ, Владивосток, Россия

Поступило 19 февраля 2012 г.