Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 400, 2012 г.

Н. А. Вавилов, А. В. Щеголев

НАДГРУППЫ SUBSYSTEM SUBGROUPS В ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ ГРУППАХ: УРОВНИ

В настоящей статье, представляющей собой курсовую работу второго автора, выполненную под руководством первого автора, мы делаем первый шаг в направлении описания надгрупп подсистемных подгрупп (= subsystem subgroups) в исключительных группах. А именно, вложению $\Delta \subseteq \Phi$ систем корней отвечает регулярное вложение групп Шевалле $G(\Delta, R) \leq G(\Phi, R)$ над произвольным коммутативным кольцом R. Далее, пусть $E(\Delta, R)$ – элементарная подгруппа в $G(\Phi, R)$. В настоящей работе мы связываем с каждой промежуточной подгруппой $E(\Delta, R) \leq H \leq G(\Phi, R)$ ее уровень.

При естественных предположениях на подсистему Δ и кольцо R уровень подгруппы H задается некоторой системой идеалов в R. Мы явно вычисляем соотношения между этими идеалами, необходимые для того, чтобы они фактически задавали уровень какой-то промежуточной подгруппы H.

Для систем с простыми связями идеалы, задающие уровень промежуточных подгрупп, параметризуются орбитами группы Вейля $W(\Delta)$ на дополнении $\Phi \setminus \Delta$ подсистемы Δ. Накладываемые нами дополнительные условия как раз и гарантируют выполнение чего-то в таком духе и для систем с кратными связями. Таким образом, с технической точки зрения настоящая работа имеет чисто комбинаторный характер. А именно, мы вычисляем эти орбиты и отмечаем все возникающие при этом нетривиальные случаи коммутационной формулы Шевалле, которые и дают соотношения между соответствующими идеалами. Получающиеся ответы представлены в форме таблиц.

Ключевые слова: исключительные группы Шевалле, системные подгруппы, уровни, корневые элементы, коммутационная формула Шевалле, шаблоны.

Настоящая работа выполнена в рамках проекта РФФИ 09-01-00878 “Надгруппы редуктивных групп в алгебраических группах над кольцами”. На заключительном этапе работа первого автора была поддержана проектами РФФИ 09-01-00762, 09-01-00784, 09-01-91333, 09-01-90304, 10-01-90016, 10-01-92651, 11-01-00756 и грантом НШ-3229.2012.1. Кроме того, работа обоих авторов поддержана НИР 6.38.74.2011 Санкт-Петербургского государственного Университета, “Структурная теория и геометрия алгебраических групп и их приложения в теории представлений и алгебраической K-теории”.

Полученные результаты позволяют сравнить различные случаи по сложности и сформулировать конкретные гипотезы об описании надгрупп подсистемных подгрупп в группах Шевалле. В дальнейших работах мы намереваемся доказать эти гипотезы в некоторых простейших случаях.

Введение

В работе Зенона Боревича и первого автора [4] описаны надгруппы [элементарных подгрупп] подсистемных подгрупп в полной линейной группе $\mathrm{GL}(n, R)$ над произвольным коммутативным кольцом R. Разумеется, в этом случае [элементарные] подсистемные подгруппы – это в точности группы [элементарных] клеточно диагональных матриц. В дальнейшем первый автор [7–13] перенес эти результаты на другие расщепимые классические группы, по крайней мере в предположении $2 \in R^*$. Естественно, при этом необходимо также предполагать, что ранги всех неприводимых компонент не слишком малы. Обычно достаточно предполагать, что все эти ранги ≥ 2, но в ортогональном случае, чтобы избежать особенностей, связанных с исключительным поведением D_4, нужно требовать даже, чтобы некоторые из них были ≥ 4. В работах первого автора и Алексея Степанова [54, 53, 22] можно найти детальное изложение этих результатов и более простые доказательства.

Естественно попытаться получить аналогичные результаты для исключительных групп. По этому поводу в работе первого автора и Алексея Степанова [22] сформулирована следующая задача (проблема 7).

Проблема. *Описать подгруппы исключительных групп $G(\Phi, R)$, содержащие регулярно вложенную подгруппу $E(\Delta, R)$, $\Delta \leq \Phi$, в предположении, что Δ достаточно велика.*

Разумеется, в действительности эта задача интересовала нас начиная с конца 1980-х годов и была одним из основных стимулов для развития метода разложения унипотентов, см. [53–55] и содержащиеся там ссылки. Стоит отметить, что для исключительных групп над произвольными коммутативными кольцами ЭТА ЗАДАЧА НЕ РЕШЕНА НИ В ОДНОМ СЛУЧАЕ. Перечислим известные нам частичные результаты в этом направлении.

• Для случая *алгебраически замкнутого* поля надгруппы *достаточно больших* подсистемных подгрупп *фактически* известны. Даже если соответствующие результаты нигде явно не формулировались, их обычно несложно вывести из таблиц в работах Гэри Зайтца и Мартина Либека [49, 43, 45].

• Для *конечных* полей ситуация несколько сложнее, тем не менее, такое описание также можно часто извлечь из работ Мартина Либека и Гэри Зайтца [40, 50, 41, 42, 44, 46] или вывести из них.

• В случае *бесконечных* полей для большинства подсистем эта задача *формально* не решена. В этом случае такое описание можно было бы, конечно, пытаться вывести из общих результатов Франца Тиммесфельда о подгруппах, порожденных корневыми подгруппами.

• Для произвольных полей несложно вычислить нормализаторы подсистемных подгрупп в $G(\Phi, R)$, частично это проделано по другим поводам в [38, 15]. Для *конечных* полей это вычисление доведено до явных ответов в работе Евгения Вдовина и Алексея Гальта [24].

• Описание подгрупп в максимальных параболических подгруппах, содержащих элементарную подгруппу Леви, получено в работе Анастасии Ставровой [51]. Заметим, что над полями такое описание было ранее получено в работах Ванг Дэнъина и Ли Шанчжы [62] и Виктории Казакевич и Анастасии Ставровой [26][1].

• Для случая поля в работах Ванг Дэнъина [57–59] описаны надгруппы $G(\mathrm{A}_2, K)$ в $G(\mathrm{G}_2, K)$ и надгруппы $G(\mathrm{D}_4, K)$ в $G(\mathrm{F}_4, K)$. Заметим, что это в точности подгруппы, отвечающие подсистеме, состоящей из всех длинных корней.

• Для случая поля в работах Ванг Дэнъина и Ли Шанчжы [61], [60][2] описаны надгруппы $G(\mathrm{D}_5, K)$ в $G(\mathrm{E}_6, K)$ и надгруппы $G(\mathrm{E}_6, K)$ в $G(\mathrm{E}_7, K)$. Это в точности подгруппы Леви параболических подгрупп, получающиеся выбрасыванием простого корня, который входит в разложение максимального корня с коэффициентом 1.

---

[1]На самом деле в работах Казакевич и Ставровой решается более общая задача, а именно, описываются подгруппы, *нормализуемые* коммутантом подгруппы Леви.

[2]По деталям доказательств в [60] у нас возникли некоторые сомнения, но сами результаты этой работы, конечно, верны.

До недавнего времени не просматривалось никакой техники, позволяющей перенести доказательства из работ Зенона Боревича и первого автора с классических групп на исключительные. Существовавшие формы разложения унипотентов [54, 55] требовали большого технического напряжения и позволяли *надеяться* на получение такого описания только для немногих случаев, когда Δ содержит *огромный* простой классический фактор, обычно максимального или субмаксимального ранга. Никакой надежды получить аналогичные результаты С ТАКИМИ ЖЕ, КАК ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ ГРУПП, ОЦЕНКАМИ НА РАНГИ НЕПРИВОДИМЫХ КОМПОНЕНТ вообще не было. Однако, в последнее десятилетие ситуация решительно изменилась.

• Во-первых, в цикле работ первого автора, Виктора Петрова и Ю.Хонга [20, 21, 47, 30, 63, 64] были описаны надгруппы классических групп. Технически эти работы оказались *значительно* труднее, чем работы Боревича и первого автора о надгруппах подсистемных подгрупп в классических группах. В частности, в них для решения такого рода вопросов систематически использовались локализационные методы, что перевело всю область на совершенно новый технологический уровень. Это уже привело к дальнейшим заметным успехам в описании надгрупп для других классов больших подгрупп в группах Шевалле. Достаточно упомянуть, например, работы Алексея Степанова, Алексея Ананьевского, первого автора и Сергея Синчука [1, 2, 52].

• Во-вторых, в работах первого автора, Михаила Гавриловича и Сергея Николенко [17–19] получено новое геометрическое доказательство основных структурных теорем для групп типов E_6, E_7 и F_4. Это доказательство не только технически значительно проще первых версий разложения унипотентов для исключительных групп, но и использует только унипотентные элементы, лежащие в классических подгруппах ранга 2 или 3. В недавней работе [16] продемонстрировано, что оно дает еще гораздо большую техническую свободу вычислений в исключительных группах, чем ранее казалось.

• Оба эти цикла работ были блестяще продолжены Александром Лузгаревым [28–30], который в некоторых случаях получил аналогичные результаты для исключительных групп и, в частности, полностью описал надгруппы $E(\mathrm{F}_4, R)$ в $G(\mathrm{E}_6, R)$ для произвольного коммутативного кольца R. Как нам представляется, эти работы содержат все основные ингредиенты, необходимые для описания надгрупп подсистемных подгрупп в исключительных группах Шевалле, по крайней мере для многих важных примеров.

Поэтому в настоящее время мы активно продолжили попытки решения сформулированной выше задачи, по крайней мере для нескольких ключевых примеров. Настоящая работа является первым шагом в реализации этой программы. В этом смысле она находится в одном ряду с недавними работами [2] и [3], где также вычислялись уровни подгрупп, содержащих некоторую фиксированную подгруппу или нормализуемую ей, причем ответы оказались значительно сложнее тех, которые ожидались ранее.

Еще один шаг, который мы в состоянии достаточно единообразно проделать для всех не слишком маленьких подсистемных подгрупп, это вычисление нормализаторов. В то же время, мы не видим *никакого* единого подхода собственно к извлечению унипотентов и описанию промежуточных подгрупп. Даже полное рассмотрение *простейших* примеров связано с большими техническими трудностями и должно производиться case by case.

1. Подсистемные подгруппы

Наши обозначения совершенно стандартны. Мы отсылаем читателя к [56] по поводу дальнейших ссылок, относящихся к группам Шевалле над кольцами.

Зафиксируем коммутативное кольцо R с единицей. Как обычно, R^* обозначает множество обратимых элементов R. Запись $I \trianglelefteq R$ означает, что I является идеалом в R. Пусть Φ – приведенная неприводимая система корней ранга l, а $\mathcal{P}$ – решетка, лежащая между решеткой корней $\mathcal{Q}(\Phi)$ и решеткой весов $\mathcal{P}(\Phi)$. Мы фиксируем на Φ некоторый порядок и обозначаем через $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$, Φ^+ и Φ^- – множества простых, положительных и отрицательных корней, отвечающие этому порядку. Наша нумерация простых корней следует [5]. Как обычно $W(\Phi)$ обозначает группу Вейля системы корней Φ. Она порождается корневыми отражениями w_α, $\alpha \in \Phi$.

Как хорошо известно, по данным Φ, $\mathcal{P}$, R можно построить группу Шевалле $G = G_{\mathcal{P}}(\Phi, R)$, являющуюся группой R-точек некоторой аффинной групповой схемы $G_{\mathcal{P}}(\Phi, -)$, называемой схемой Шевалле–Демазюра. Так как результаты настоящей работы фактически не зависят от решетки весов, в дальнейшем мы обычно опускаем указание на $\mathcal{P}$ и пишем просто $G(\Phi, R)$ или, чтобы подчеркнуть, что речь идет именно об односвязной группе, для которой $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\Phi)$, мы пишем $G_{\mathrm{sc}}(\Phi, R)$. Присоединенная группа, для которой $\mathcal{P} = \mathcal{Q}(\Phi)$, обозначается $G_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$.

В дальнейшем мы фиксируем некоторый расщепимый максимальный тор $T(\Phi, -)$ схемы $G(\Phi, -)$ и полагаем $T = T(\Phi, R)$. Как обычно, X_α, $\alpha \in \Phi$, обозначает унипотентную корневую подгруппу в G, элементарную относительно T. Мы фиксируем изоморфизмы

$$x_\alpha \, : \, R \mapsto X_\alpha$$

таким образом, чтобы корневые подгруппы

$$X_\alpha = \{x_\alpha(\xi), \xi \in R\}$$

были связаны между собой коммутационной формулой Шевалле, см. [33], [34]. Через $E(\Phi, R)$ обозначается элементарная подгруппа в $G(\Phi, R)$, порожденная всеми X_α, $\alpha \in \Phi$.

Группы $G_{\mathcal{P}}(\Phi, R)$ и $E_{\mathcal{P}}(\Phi, R)$ ведут себя функториально по отношению к параметрам $\Phi, \mathcal{P}, R$. В частности, любому вложению систем корней $\Delta \leq \Phi$ отвечает вложение соответствующих *односвязных* групп Шевалле

$$G_{\mathrm{sc}}(\Delta, R) \longrightarrow G_{\mathrm{sc}}(\Phi, R), \qquad E_{\mathrm{sc}}(\Delta, R) \longrightarrow E_{\mathrm{sc}}(\Phi, R).$$

С неодносвязными группами дело обстоит чуть сложнее, так как аналогичное вложение существует только в тех случаях, когда оно согласовано с решетками весов, иными словами, соответствующее условие нужно формулировать в терминах корневых данных, а не просто систем корней. В любом случае, в $G_{\mathcal{P}}(\Phi, R)$ есть *какая-то* подгруппа $G(\Delta, R)$ типа Δ, но вот какая именно, нужно уточнять в каждой конкретной ситуации. Это несложно сделать, см., например, [15], но для нас здесь это не будет иметь большого значения.

Образ группы $G(\Delta, R)$ при этом вложении в $G(\Phi, R)$ называется **подсистемной подгруппой** = `subsystem subgroup` в $G(\Phi, R)$, и в настоящей работе мы интересуемся подгруппами в $G(\Phi, R)$, содержащими элементарную подгруппу системных подгрупп $E(\Delta, R)$.

2. Классификация подсистем

Напомним, что подсистемы неприводимых систем корней классифицировали Борель—де Зибенталь и Дынкин около 60 лет назад. Список подсистем и дальнейшую относящуюся к ним информацию, в частности, их нормализаторы в группе Вейля $W = W(\Phi)$ можно найти, например, в работах Роджера Картера [27, 37], посвященных классам сопряженности группы Вейля, или в работе Алана Харебова и первого автора [38].

Чтобы не увеличивать без нужды объем настоящей статьи, мы не будем воспроизводить оттуда таблицы *всех* таких подсистем, приводимый в § 4 список построен как раз исключением всего лишнего из этих таблиц. Однако, для понимания того, откуда берутся реализации подсистем в наших таблицах уровней, воспроизведем из работы первого автора и Николая Харчева [23] алгоритм Дынкина—Бореля—де Зибенталя, там же можно найти дальнейшие детали и ссылки.

• Пусть $\overline{\Pi}$ – расширенная система простых корней системы Φ, получающаяся из Π добавлением корня $\alpha_0 = -\delta$, где δ – максимальный корень системы Φ относительно системы простых корней Π. Для каждого r, $1 \leq r \leq l$, рассмотрим подсистему Δ_r в Φ, порожденную $\overline{\Pi} \setminus \{\alpha_r\}$, иными словами, наименьшую подсистему, содержащую эти корни – или, что то же самое, наименьшее замкнутое подмножество, содержащее эти корни и противоположные к ним.

Построенные подсистемы Δ_r являются подсистемами **максимального ранга**, а именно, ранга l. Однако, вообще говоря, системы Δ_r приводимы и не исчерпывают всех подсистем максимального ранга. Кроме того, они не всегда максимальны, для максимальности необходимо, чтобы метка при α_r в разложении максимального корня была простым числом. Более того, в некоторых случаях они могут совпадать с Φ, например, это всегда так для $\Phi = \mathrm{A}_l$.

• Применяя только что описанную процедуру ко всем неприводимым компонентам систем Δ_r и повторяя этот процесс quantum satis, до тех пор, пока при этом не перестанут появляться новые системы, мы получим все подсистемы $\Delta \subseteq \Phi$ максимального ранга.

• Теперь вообще все подсистемы $\Delta \subseteq \Phi$ можно получить следующим образом. Пусть $\Sigma \subseteq \Phi$ – какая-то подсистема максимального ранга, Ξ – ее система простых корней. Тогда для любого подмножества $J \subseteq \Xi$

порожденная им подсистема Δ является замкнутой подсистемой в Φ и все подсистемы в Φ получаются таким образом.

Для исключительных систем с точностью до сопряженности элементом из $W(\Phi)$ имеется 5 *собственных* подсистем в G_2, 23 в F_4, 20 в E_6, 46 в E_7 и 76 в E_8, там же, таблица 11.

Как правило, две подсистемы $\Delta, \Sigma \subseteq \Phi$ одного и того же типа сопряжены при помощи элемента группы Вейля $W(\Phi)$. Все исключения перечислены ниже.

• В случае, когда все корни системы Δ имеют одинаковую длину, ее, вообще говоря, можно вложить в Φ двумя существенно различными способами, на длинные корни и на короткие корни. Чтобы различать эти вложения, мы обозначаем вложение на короткие корни через $\widetilde{\Delta} \subseteq \Phi$, сохраняя обозначение $\Delta \subseteq \Phi$ для вложения на длинные корни.

• Подсистемы D_2 и $2\mathrm{A}_1$, а также D_3 и A_3 являются изоморфными, но не сопряженными подсистемами D_l. Более того, при $l \geq 5$ они не сопряжены не только при помощи элемента $W(\mathrm{D}_l)$, но даже при помощи элемента $\mathrm{Aut}(\mathrm{D}_l) = W(\mathrm{B}_l)$. Правда, при $l = 4$ они становятся сопряженными при помощи элемента $\mathrm{Aut}(\mathrm{D}_4) = W(\mathrm{F}_4)$, это явление известно как тройственность.

• В системе типа E_7 имеется по два класса подсистем следующих типов: $\mathrm{A}_5 + \mathrm{A}_1$, A_5, $\mathrm{A}_3 + 2\mathrm{A}_1$, $\mathrm{A}_3 + \mathrm{A}_1$, $4\mathrm{A}_1$, $3\mathrm{A}_1$, а в системе типа E_8 имеется по два класса подсистем типов A_7, $\mathrm{A}_5 + \mathrm{A}_1$, $2\mathrm{A}_3$, $\mathrm{A}_3 + 2\mathrm{A}_1$, $4\mathrm{A}_1$, см. [25, с. 384] или [37, с. 299]. Обратите внимание, что в случае E_7 это в точности пары подсистем, несопряженных в $\mathrm{D}_6 + \mathrm{A}_1$, а в случае E_8 – соответственно, пары подсистем, не сопряженных в D_8.

Следуя Дынкину [25] мы обозначаем через Δ' ту из подсистем типа Δ, которая содержится в A_7 или, соответственно, в A_8, а через Δ'', ту, которая там не содержится. Стоит предостеречь, что в работах Роджера Картера [27, 37] символы Δ' и Δ'' используются в противоположном смысле.

3. Условия на подсистему и кольцо

Итак, пусть $\Delta = \Delta_1 + \ldots + \Delta_s \subseteq \Phi$ – подсистема корней в Φ, с неприводимыми компонентами $\Delta_1, \ldots, \Delta_s$ рангов $l_1, \ldots, l_s$, соответственно. Ясно, что выполнение следующего условия *необходимо* для того, чтобы описание надгрупп $E(\Delta, R)$ в $G(\Phi, R)$ было стандартным в обычном смысле.

$(*)$ $\Delta^\perp = \varnothing$, иными словами, в системе Φ нет корней ортогональных к Δ.

Мы уверены, что для полей (и некоторых классов колец размерности 0 или 1) это условие является и достаточным для того, чтобы полностью описать надгруппы $E(\Delta, K)$ существующими методами.

До недавнего времени, по аналогии с классическими группами нам *казалось*, что для произвольных коммутативных колец нет абсолютно никакой возможности использовать неприводимые компоненты ранга 1 для извлечения унипотентов. Поэтому в работах первого автора и Алексея Степанова предлагалось получить такое описание для коммутативных колец лишь при выполнении следующего более сильного условия.

$(**)$ Для любого корня $\alpha \in \Phi \setminus \Delta$ найдется неприводимая компонента Δ_i ранга $l_i \geq 2$ такая, что $\alpha \notin \Delta_i^\perp$.

Однако, в настоящее время, в процессе более тщательного обдумывания доказательства из [17], мы пришли к убеждению, что во многих случаях для извлечения унипотентов можно с успехом использовать и компоненты типа A_1. Но априори совершенно неясно, для каких случаев такие доказательства удастся довести до конца. Поэтому мы приняли принципиальное решение доказывать *все* вспомогательные результаты – в том числе строить таблицы уровней – для *всех* подсистем, удовлетворяющих условию $(*)$.

Кроме того, чтобы ограничиться идеалами, а не строить, сверх того, относительные форменные параметры, и не обсуждать различные иррегулярности, связанные с неприводимыми компонентами ранга 2, в случае наличия кратных связей мы дополнительно накладываем следующее условие на основное кольцо. В случае поля это условие известно как `not a very bad prime`.

$(***)$ $2 \in R^*$ в случае $\Phi = \mathrm{B}_l, \mathrm{C}_l, \mathrm{F}_4$ и $6 \in R^*$ в случае G_2.

Разумеется, не представляло бы большого труда отследить, что происходит без этого предположения. Однако, цель настоящей работы состоит в том, чтобы сформулировать точный ответ на задачу описания надгрупп $E(\Delta, R)$ и сравнить случаи по сложности, с тем, чтобы в дальнейшем фактически описать промежуточные подгруппы в нескольких *простейших* случаях. Как мы уже отмечали, для *исключительных* групп это не сделано пока ни для одной подсистемы!

Даже для систем E_6, E_7 и E_8, в которых все корни имеют одинаковую длину, и даже в *простейшей* ситуации, когда уровень задается одним идеалом, такое описание *настолько* технически сложно, что было бы абсолютно бессмысленно начинать здесь обсуждение *дополнительных* трудностей, которые возникают для системы F_4 без условия обратимости 2.

4. Список подсистем, удовлетворяющих условию (∗)

Перечислим теперь все случаи, для которых, с нашей точки зрения, нет *принципиальных* препятствий к описанию надгрупп $E(\Delta, R)$ в $G(\Phi, R)$. Впрочем, как только что отмечалось, в случае систем с кратными связями для получения *стандартного* ответа в нашем смысле необходимо будет дополнительно предполагать, что $2 \in R^*$ или даже $6 \in R^*$.

Сами случаи перечислены здесь *приблизительно* в порядке нарастания сложности, от самых простых к самым сложным, в соответствии с нашими сегодняшними представлениями. Впрочем, *полностью* уверены мы лишь в том, что анализ нескольких первых подсистем в этих списках будет *значительно* легче, чем анализ всех остальных случаев. Упорядочивая же дальнейшие подсистемы, мы руководствовались лишь общим пониманием ситуации, своими инстинктами и грубыми прикидками из общих соображений.

• Для $\Phi = \mathrm{E}_6$ имеется 9 подсистем Δ, для которых возможно описание надгрупп $E(\Delta, R)$,

$$\mathrm{A}_5 + \mathrm{A}_1, \quad 3\mathrm{A}_2, \quad \mathrm{D}_5, \quad \mathrm{A}_4 + \mathrm{A}_1, \quad \mathrm{D}_4,$$
$$\mathrm{A}_3 + 2\mathrm{A}_1, \quad 2\mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_1, \quad \mathrm{A}_2 + 2\mathrm{A}_1, \quad 4\mathrm{A}_1,$$

из них 2 максимального ранга, 4 ранга 5 и 3 ранга 4.

• Для $\Phi = \mathrm{E}_7$ описание возможно для 18 подсистем Δ, а именно,

$$\mathrm{A}_7, \quad \mathrm{D}_6+\mathrm{A}_1, \quad \mathrm{A}_5+\mathrm{A}_2, \quad \mathrm{E}_6, \quad \mathrm{A}_6, \quad \mathrm{D}_5+\mathrm{A}_1, \quad 2\mathrm{A}_3+\mathrm{A}_1, \quad \mathrm{D}_4+3\mathrm{A}_1,$$
$$(\mathrm{A}_5 + \mathrm{A}_1)', \quad (\mathrm{A}_5 + \mathrm{A}_1)'', \quad \mathrm{A}_4 + \mathrm{A}_2, \quad \mathrm{A}_3 + \mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_1, \quad 7\mathrm{A}_1, \quad 3\mathrm{A}_2,$$
$$\mathrm{A}_3 + 3\mathrm{A}_1, \quad \mathrm{A}_4 + \mathrm{A}_1, \quad 2\mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_1, \quad \mathrm{A}_2 + 3\mathrm{A}_1,$$

из них 6 максимального ранга, 9 ранга 6 и 3 ранга 5.

• Для $\Phi = \mathrm{E}_8$ описание возможно для 32 подсистем Δ, а именно[3],

$$\mathrm{D}_8,\quad \mathrm{E}_7{+}\mathrm{A}_1,\quad \mathrm{E}_6{+}\mathrm{A}_2,\quad \mathrm{A}_8,\quad \mathrm{D}_5{+}\mathrm{A}_3,\quad \mathrm{A}_7{+}\mathrm{A}_1,\quad \mathrm{D}_6{+}2\mathrm{A}_1,\quad 2\mathrm{D}_4,$$
$$\mathrm{D}_7,\quad 2\mathrm{A}_4,\quad \mathrm{A}_5+\mathrm{A}_2+\mathrm{A}_1,\quad \mathrm{E}_6+\mathrm{A}_1,\quad 4\mathrm{A}_2,\quad \mathrm{D}_4+4\mathrm{A}_1,\quad (\mathrm{A}_7)',$$
$$\mathrm{D}_5+\mathrm{A}_2,\quad \mathrm{D}_4+\mathrm{A}_3,\quad 8\mathrm{A}_1,\quad 2\mathrm{A}_3+2\mathrm{A}_1,\quad \mathrm{A}_6+\mathrm{A}_1,\quad \mathrm{D}_5+2\mathrm{A}_1,$$
$$\mathrm{A}_4+\mathrm{A}_3,\quad \mathrm{A}_5+2\mathrm{A}_1,\quad \mathrm{A}_4+\mathrm{A}_2+\mathrm{A}_1,\quad 3\mathrm{A}_2+\mathrm{A}_1,\quad \mathrm{A}_3+\mathrm{A}_2+2\mathrm{A}_1,$$
$$\mathrm{D}_4+\mathrm{A}_2,\quad (2\mathrm{A}_3)',\quad \mathrm{A}_3+4\mathrm{A}_1,\quad \mathrm{A}_4+2\mathrm{A}_1,\quad 2\mathrm{A}_2+2\mathrm{A}_1,\quad \mathrm{A}_2+4\mathrm{A}_1,$$

из них 14 максимального ранга, 13 ранга 7 и 5 ранга 6.

• Для $\Phi = \mathrm{F}_4$ описание возможно для 11 подсистем Δ, а именно,

$$\mathrm{B}_4,\quad \mathrm{C}_3+\mathrm{A}_1,\quad \mathrm{D}_4,\quad \mathrm{A}_2+\widetilde{\mathrm{A}}_2,\quad \mathrm{A}_3+\widetilde{\mathrm{A}}_1,\quad \mathrm{B}_2+2\mathrm{A}_1,\quad 4\mathrm{A}_1,$$
$$\mathrm{B}_3,\quad \mathrm{A}_2+\widetilde{\mathrm{A}}_1,\quad \widetilde{\mathrm{A}}_2+\mathrm{A}_1,\quad 2\mathrm{A}_1+\widetilde{\mathrm{A}}_1,$$

из них 7 максимального ранга и 4 ранга 3.

• Для $\Phi = \mathrm{G}_2$ описание возможно только для двух подсистем максимального ранга $\Delta = \mathrm{A}_2$ и $\mathrm{A}_1+\widetilde{\mathrm{A}}_1$.

Основной целью настоящей работы является построение уровней промежуточных подгрупп для каждого из этих случаев, получающиеся результаты суммируются в таблицах 1–4.

Стоит подчеркнуть, что за прошедшее после написания [22] время наши представления об относительной сложности случаев несколько изменились. Кроме того, здесь мы перечисляем все подсистемы, удовлетворяющие условию $(*)$, а не более сильному условию $(**)$, как в работе [22][4].

А именно, как отмечалось в [22], сравнительная сложность случаев зависит от

• ранга и порядка Δ (чем больше, тем проще),

• порядка группы внешних автоморфизмов $N_{W(\Phi)}(W(\Delta))/W(\Delta)$ и количества содержащихся в Δ неприводимых компонент типа A_1 (чем больше, тем сложнее)

и других подобных факторов, влияющих на возможность осуществить извлечение корневых элементов.

[3]Напомним, что $(\mathrm{A}_7)'$ содержится в A_8 и D_8, а $(\mathrm{A}_7)''$ содержится в E_7 и $\mathrm{A}_7{+}\mathrm{A}_1$. Таким образом, $(\mathrm{A}_7)''$ не удовлетворяет даже сформулированному выше условию $(*)$.

[4]Не говоря уже о том, что приведенный там список подсистем, удовлетворяющих условию $(**)$, содержит пробелы.

Однако, в настоящее время, вникнув в эту задачу чуть глубже, мы пришли к убеждению, что *важнейшим* среди всех критериев сложности описания промежуточных подгрупп с ОГРОМНЫМ отрывом является именно

- количество идеалов, задающих уровень.

Кроме того, *некоторое* значение имеет

- тип возникающих между этими идеалами соотношений,

который вообще не учитывался в [22].

В частности, случаи, когда уровень задается одним идеалом, заведомо *значительно* проще всех остальных, независимо от рангов неприводимых компонент системы Δ. В следущей работе авторы намереваются описать промежуточные подгруппы для двух таких вложений, $\mathrm{A}_5+\mathrm{A}_1$ в E_6 и A_7 в E_7, когда для извлечения унипотентов можно с успехом использовать технику работ [16–19].

Заметим, впрочем, что как всегда технически доказательства обычно заметно проще, если предполагать, что

- группа $E(\Delta, R)$ совершенна.

Поэтому, например, случай $\mathrm{A}_7 \subseteq \mathrm{E}_7$ несколько проще, чем случай $\mathrm{A}_5 + \mathrm{A}_1 \subseteq \mathrm{E}_6$.

5. Корневые элементы в надгруппах подсистемных подгрупп

Пусть H – подгруппа в $G(\Phi, R)$, содержащая $E(\Delta, R)$ для некоторой подсистемы $\Delta \subseteq \Phi$. В настоящем параграфе предполагается, что выполнено условие $(*)$ из предыдущего параграфа, иными словами, $\Delta^{\perp} = \varnothing$. Кроме того, так как нас в первую очередь интересуют системы с простыми связями, *для упрощения доказательств* мы предполагаем, что выполнено условие $({*}{*}{*})$, хотя на самом деле во многих случаях оно не является необходимым.

Свяжем, прежде всего, с подгруппой H некоторые идеалы, отвечающие корням $\alpha \in \Phi$. А именно, положим

$$I_\alpha = \big\{\xi \in R \mid x_\alpha(\xi) \in H\big\}.$$

Ясно, что все I_α являются аддитивными подгруппами.

Следующий результат является упражнением на использование коммутационной формулы Шевалле. Вычисления такого типа проделывались по разным поводам столько раз, что невозможно указать первоисточник. Для классических групп непосредственно следующее утверждение доказано в работах Боревича и автора [4, 9, 11]. Так как фактически доказательства там зависят только от взаимного расположения корней, проведенные там вычисления легко транспонировать и на случаи E_6, E_7, E_8 и F_4. Случай G_2 требует чуть большей тщательности. Все нужные для этого вычисления можно найти, например, в доказательстве леммы 5 работы Казакевич и Ставровой [26][5]. Для специалиста достаточно одной фразы: последовательное коммутирование

$$[x_\alpha(\xi), x_\beta(\zeta)], \quad [[x_\alpha(\xi), x_\beta(\zeta)], x_\beta(\zeta)], \quad [[[x_\alpha(\xi), x_\beta(\zeta)], x_\beta(\zeta)], x_\beta(\zeta)]$$

по β-цепочкам корней через α. Однако, так на это опираются все дальнейшие результаты, воспроизведем детали, в нужной нам форме.

Лемма 1. *Для каждого корня $\alpha \in \Phi$ множество I_α является идеалом в R.*

Доказательство. Заметим, что $I_\alpha = R$ для $\alpha \in \Delta$. Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что $\alpha \in \Phi \setminus \Delta$. Всюду далее $\xi \in I_\alpha$, а $\zeta \in R$ произвольно.

• Совсем просто рассмотреть случай, когда для корня $\alpha \in \Phi \setminus \Delta$ найдется корень $\beta \in \Delta$ *той же длины* такой, что $\alpha + \beta \in \Phi$ также имеет ту же длину, причем либо корни α и β длинные, либо $\Phi \neq \mathrm{G}_2$. Заметим, что это условие *автоматически* выполнено для систем без кратных связей, то есть для $\Phi = \mathrm{A}_n, \mathrm{D}_n, \mathrm{E}_n$.

В этом случае коммутационная формула Шевалле принимает вид

$$[x_\alpha(\xi), x_\beta(\zeta)] = x_{\alpha+\beta}(\pm\xi\zeta) \in H,$$

и, так как ζ здесь произвольно, то $I_\alpha R \leq I_{\alpha+\beta}$. Так как Δ – подсистема корней, то $-\beta \in \Delta$ и, тем самым, также $I_{\alpha+\beta} R \leq I_\alpha$. В частности, $I_\alpha R \leq I_\alpha$, как и утверждалось.

Продолжим теперь какое-то время считать, что $\Phi \neq \mathrm{G}_2$.

---

[5]Впрочем, как замечено в доказательстве леммы 4.1 работы [51], фактически такое же вычисление намечено уже в доказательстве леммы 1 работы [6], о чем первый автор, естественно, совершенно забыл.

• Пусть теперь корень $\alpha \in \Phi \setminus \Delta$ *короткий* и найдется такой *короткий* корень $\beta \in \Delta$, что $\alpha + \beta \in \Phi$ *длинный*. В этом случае коммутационная формула Шевалле принимает вид

$$[x_\alpha(\xi), x_{\pm\beta}(\zeta)] = x_{\alpha\pm\beta}(\pm 2\xi\zeta) \in H,$$

но так как мы предполагаем, что $2 \in R^*$, то заменив здесь ζ на $\zeta/2$, мы видим, что как и выше, $I_\alpha R \leq I_{\alpha\pm\beta}$. С другой стороны, в этом случае

$$[x_{\alpha+\beta}(\xi\zeta), x_{-\beta}(1)] = x_\alpha(\pm\xi\zeta)x_{\alpha-\beta}(\pm\xi\zeta) \in H$$

и так как $x_{\alpha-\beta}(\pm\xi\zeta) \in H$ по уже доказанному, то $x_\alpha(\pm\xi\zeta) \in H$, так что снова $I_\alpha R \leq I_\alpha$, как и утверждалось.

Замечание. Это одно из тех мест в доказательстве, где без условия обратимости 2 возникают форменные параметры. В самом деле, без этого условия приведенное выше рассуждение доказывает лишь, что $2I_\alpha R \leq I_{\alpha+\beta}$. В дальнейшем мы не будем систематически обсуждать подобные тонкости, которые нужно учитывать, если не предполагать, что $2 \in R^*$ или $3 \in R^*$, хотя еще в нескольких местах обратим на них внимание.

• Пусть корень $\alpha \in \Phi \setminus \Delta$ по-прежнему *короткий*, но найдется такой *длинный* корень $\beta \in \Delta$, что $\alpha + \beta \in \Phi$, в этом случае корень $\alpha + \beta$ автоматически короткий. В этом случае коммутационная формула Шевалле принимает вид

$$x = [x_\alpha(\xi), x_\beta(\zeta)] = x_{\alpha+\beta}(\pm\xi\zeta)x_{2\alpha+\beta}(\pm\xi^2\zeta) \in H.$$

Но тогда также

$$[x, x_\alpha(\xi/2)] = x_{2\alpha+\beta}(\pm\xi^2\zeta) \in H$$

и, таким образом, $x_{\alpha+\beta}(\pm\xi\zeta) \in H$, так что снова $I_\alpha R \leq I_{\alpha+\beta}$, откуда точно так же, как и выше, следует, что $I_\alpha R \leq I_\alpha$.

• Пусть, наконец, корень $\alpha \in \Phi \setminus \Delta$ *длинный*, но найдется такой *короткий* корень $\beta \in \Delta$, что $\alpha+\beta \in \Phi$. В этом случае коммутационная формула Шевалле принимает вид

$$x = [x_\alpha(\xi), x_\beta(\zeta)] = x_{\alpha+\beta}(\pm\xi\zeta)x_{\alpha+2\beta}(\pm\xi\zeta^2) \in H.$$

Но тогда

$$[x, x_\beta(1/2)] = x_{\alpha+2\beta}(\pm\xi\zeta) \in H,$$

так что $I_\alpha R \leq I_{\alpha+2\beta}$. Как и выше, заменяя здесь β на $-\beta$, мы видим, что $I_{\alpha+2\beta} R \leq I_\alpha$, так что I_α снова является идеалом.

Это завершает рассмотрение случая $\Phi \neq \mathrm{G}_2$. С другой стороны, в случае $\Phi = \mathrm{G}_2$ имеется ровно две собственные подсистемы Δ, удовлетворяющие условию $(*)$, а именно, A_2 и $\mathrm{A}_1 + \widetilde{\mathrm{A}}_1$. Тем самым, либо в дополнении к Δ вообще нет длинных корней, либо для каждого такого корня α найдется длинный же корень $\beta \in \Delta$ такой, что $\alpha+\beta \in \Phi$. Это значит, что для длинных корней утверждение леммы доказано уже в первом пункте. Поэтому нам остается рассмотреть только случай *короткого* корня $\alpha \in \Phi \setminus \Delta$ для каждой из двух указанных подсистем Δ.

• Пусть вначале $\Phi = \mathrm{G}_2$, $\Delta = \mathrm{A}_2$, а $\beta \in \mathrm{A}_2$ – длинный корень такой, что $\alpha + \beta \in \mathrm{G}_2$. В этом случае коммутационная формула Шевалле принимает вид

$$[x_\alpha(\xi), x_\beta(\zeta)] = x_{\alpha+\beta}(\pm\xi\zeta)x_{2\alpha+\beta}(\pm\xi^2\zeta)x_{3\alpha+\beta}(*)x_{3\alpha+2\beta}(*) \in H.$$

Корни $3\alpha+\beta$ и $3\alpha+2\beta$ длинные, так что по условию $I_{3\alpha+\beta} = I_{3\alpha+2\beta} = R$ и, тем самым, вместе с предыдущим коммутатором также

$$x = x_{\alpha+\beta}(\pm\xi\zeta)x_{2\alpha+\beta}(\pm\xi^2\zeta) \in H.$$

Но тогда, конечно,

$$[x, x_\alpha(\xi)] = x_{2\alpha+\beta}(\pm 2\xi^2\zeta)x_{3\alpha+\beta}(*)x_{3\alpha+2\beta}(*) \in H.$$

Снова воспользовавшись равенствами $I_{3\alpha+\beta} = I_{3\alpha+2\beta} = R$, и вспоминая, что по предположению $2 \in R^*$, мы можем заключить, что $x_{2\alpha+\beta}(\pm\xi^2\zeta) \in H$ и, окончательно,

$$x_{\alpha+\beta}(\pm\xi\zeta) = x x_{2\alpha+\beta}(\mp\xi^2\zeta) \in H.$$

Таким образом, мы снова доказали, что $I_\alpha R \leq I_{\alpha+\beta}$, после чего доказательство завершается как обычно.

• Пусть наконец $\Phi = \mathrm{G}_2$, $\Delta = \mathrm{A}_1 + \widetilde{A}_1$. Тогда найдутся как длинный корень $\beta \in \mathrm{A}_1 + \widetilde{A}_1$ такой, что $\alpha + \beta \in \mathrm{G}_2$, так и короткий корень $2\alpha + \beta \in \mathrm{A}_1 + \widetilde{A}_1$, для которого $\alpha + (2\alpha + \beta) \in \mathrm{G}_2$ длинный. Тогда

$$[x_\alpha(\xi), x_{2\alpha+\beta}(\zeta)] = x_{3\alpha+\beta}(\pm 3\xi\zeta) \in H,$$

и, так как мы предполагаем, что $3 \in R^*$, то заменяя ζ на $\zeta/3$ мы можем заключить, что $I_\alpha R \leq I_{3\alpha+\beta}$. Заметим, кроме того, что уже из первого пункта нам известно, что $I_{3\alpha+\beta} = I_{3\alpha+2\beta}$.

С другой стороны, как мы уже знаем, для корней α и β коммутационная формула Шевалле имеет вид

$$[x_\alpha(\xi), x_\beta(\zeta)] = x_{\alpha+\beta}(\pm\xi\zeta)x_{2\alpha+\beta}(\pm\xi^2\zeta)x_{3\alpha+\beta}(\pm\xi^3\zeta)x_{3\alpha+2\beta}(\pm\xi^3\zeta^2) \in H,$$

причем, как мы только что доказали,

$$x_{3\alpha+\beta}(\pm\xi^3\zeta), x_{3\alpha+2\beta}(\pm\xi^3\zeta^2) \in H.$$

Это значит, что снова

$$x_{\alpha+\beta}(\pm\xi\zeta)x_{2\alpha+\beta}(\pm\xi^2\zeta) = [x_\alpha(\xi), x_\beta(\zeta)]x_{3\alpha+\beta}(\mp\xi^3\zeta), x_{3\alpha+2\beta}(\mp\xi^3\zeta^2) \in H,$$

после чего доказательство завершается точно так же, как в предыдущем случае. Лемма полностью доказана.

§1. 6. Δ-эквивалентность

Извлечем теперь несколько следствий из леммы 1 и ее доказательства. Следующее утверждение сразу вытекает из нашей леммы 1 и леммы 1 работы [6], ровно в этом состоит доказательство предложения 1 цитированной работы.

Лемма 2. *Набор идеалов $I = (I_\alpha)$, $\alpha \in \Phi$, образует сеть идеалов в R, иными словами, $I_\alpha I_\beta \leq I_{\alpha+\beta}$ каждый раз как $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Phi$.*

Следующее утверждение является ключевым для построения уровня. Для этого нужно лишь чуть внимательнее взглянуть на доказательство леммы 1.

Лемма 3. *Идеал I_α зависит не от самого корня α, а только от его орбиты под действием группы Вейля $W(\Delta)$.*

Доказательство. Предположим вначале, что $\Phi \neq \mathrm{G}_2$. В этом случае в доказательстве леммы 1 фактически проверено что для любого корня $\alpha \in \Phi \setminus \Delta$ и любого образующего с α тупой угол корня $\beta \in \Delta$ имеет место либо включение $I_\alpha \leq I_{\alpha+\beta}$, либо, в случае, когда корень α длинный, а корень β короткий, включение $I_\alpha \leq I_{\alpha+2\beta}$. Осталось заметить, что группа Вейля $W(\Delta)$ порождается корневыми отражениями и что $w_\beta(\alpha) = \alpha + \beta$, за исключением случая, когда α длинный, а β короткий, и $w_\beta(\alpha) = \alpha + 2\beta$ в этом последнем случае.

Таким образом, при $\Phi \neq \mathrm{G}_2$ действительно $I_{w(\alpha)} = I_\alpha$ для всех $\alpha \in \Phi$ и всех $w \in W(\Delta)$. Осталось взглянуть чуть пристальнее на случай $\Phi = \mathrm{G}_2$.

Чтобы больше не возвращаться к этому случаю, приведем для него явный ответ, уточняющий лемму 3.

Лемма 4. *Выберем простые корни α и β системы $\Phi = \mathrm{G}_2$, таким образом, что α короткий, а β длинный, причем $\beta \in \Delta$.*

- *Для* $\Delta = \mathrm{A}_2$ *имеют место равенства*

$$I_\alpha = I_{\alpha+\beta} = I_{-2\alpha-\beta} = A, \quad I_{-\alpha} = I_{-\alpha-\beta} = I_{2\alpha+\beta} = B.$$

При этом $A^2 \le B$ *и* $B^2 \le A$.

- *Для* $\Delta = \mathrm{A}_1 + \widetilde{A}_1$ *все идеалы* I_γ *для* $\gamma \notin \Delta$ *равны между собой.*

Доказательство. Для случая $\Delta = \mathrm{A}_2$ первое утверждение также содержится в доказательстве леммы 1. Второе утверждение вытекает из леммы 2.

Таким образом, мы можем сосредоточиться на случае $\Delta = \mathrm{A}_1 + \widetilde{\mathrm{A}}_1$. По предположению $\Delta = \{\pm\beta, \pm(2\alpha+\beta)\}$. В доказательстве леммы 1 мы доказали лишь, что

$$I_{3\alpha+\beta} = I_{3\alpha+2\beta} = A, \quad I_\alpha = I_{\alpha+\beta} = B,$$
$$I_{-\alpha-\beta} = I_{-\alpha} = C, \quad I_{-3\alpha-2\beta} = I_{-3\alpha-\beta} = D. \quad (1)$$

Теперь нам остается доказать, что идеалы A, B, C, D совпадают между собой. Для этого мы проведем коммутирование по $(2\alpha+\beta)$-цепочкам корней.

$$x_{-3\alpha-2\beta}(\pm 6\xi) = [[[x_{3\alpha+\beta}(\xi), x_{-2\alpha-\beta}(1)], x_{-2\alpha-\beta}(1)], x_{-2\alpha-\beta}(1)] \in H.$$

Таким образом, $6A \le D$ и воспользовавшись тем, что $6 \in R^*$, мы можем заключить, что $A \le D$. Ясно, что теперь точно таким же образом мы докажем, что $2A \le C$, $3C \le D$ и т.д. □

Заметим, что без условия $6 \in R^*$ уровень промежуточной подгруппы в случае $\Phi = \mathrm{G}_2$, $\Delta = \mathrm{A}_1 + \widetilde{A}_1$ действительно будет определяться четверкой идеалов (A, B, C, D), связанных между собой включениями наподобие приведенных выше, но не обязательно совпадающими. Ясно, что такого рода ответы невозможно *угадать* из общих соображений или усмотреть из результатов, относящихся к случаю поля, не проводя детальных вычислений уровня. Дело в том, что для поля пара включений $A^2 \le B$, $B^2 \le A$ автоматически влечет равенство $A = B$; поле довольно редко *одновременно* имеет характеристики 2 и 3 и т.д.

Теперь ясно, что в предположении (∗∗∗) для систем с кратными связями лемму 3 можно уточнить следующим образом и что фактически именно это и проверялось в доказательстве леммы 1.

Лемма 5. *Если корни* $\alpha, \beta \in \Phi \setminus \Delta$ *можно соединить* γ*-цепочкой корней для некоторого корня* $\gamma \in \Delta$*, то* $I_\alpha = I_\beta$*.*

Назовем транзитивное замыкание описанного в лемме 5 отношения **Δ-эквивалентностью**. Разумеется, для интересующего нас в первую очередь случая систем с простыми связями Δ-эквивалентность в точности совпадает с сопряженностью под действием группы Вейля $W(\Delta)$, так что лемма 5 утверждает *ровно* то же самое, что лемма 3.

В то же время для случая $\Phi = \mathrm{F}_4$ она чуть сильнее, и без условия $2 \in R^*$ идеалы, отвечающие длинному корню α и короткому корню β в некоторой γ-цепочке, связаны между собой соотношениями $2I_\beta \leq I_\alpha \leq I_\beta$, при этом идеал I_α играет роль **относительного форм-параметра**, см. [19, 39] по поводу точных формулировок, деталей и исторических ссылок. В настоящей работе мы не будем обсуждать такого рода явления.

7. Шаблоны и соотношения

Для случая подсистем корней, порожденных каким-то множеством простых корней, классы Δ-эквивалентности детально изучались ранее, см., в частности, [35, 32]. Дело в том, что описание этих классов играет ключевую роль в изучении строения параболических подгрупп, и, тем самым, в построении относительных систем корней.

В этом случае классы Δ-эквивалентности полностью определяются своими шаблонами. Так как на этом основано построение наших таблиц, сейчас мы совсем коротко напомним, что это такое.

Зафиксируем какое-то подмножество простых корней $J \subseteq \Pi$, и пусть Δ – подсистема, порожденная $\Pi \setminus J$. Такие подсистемы Δ – это в точности редуктивные части стандартных параболических подмножеств.

Каждый корень α единственным образом представляется как линейная комбинация простых корней,

$$\alpha = \sum m_i(\alpha)a_i, \quad \alpha_i \in \Pi.$$

Для корня $\alpha \in \Phi \setminus \Delta$ рассмотрим подсумму этого выражения, в которой оставлены только слагаемые, отвечающие простым корням из J,

$$\alpha_J = \sum m_i(\alpha)a_i, \quad \alpha_i \in J.$$

Линейная комбинация a простых корней из J называется **шаблоном** = `shape`, если существует такой корень $\alpha \in \Phi \setminus \Delta$, что $\alpha_J = a$. В работе [35] вектор α_J обозначается через $\mathrm{shape}(\alpha)$, а в работе [32] –

через $\pi_J(\alpha)$. Иногда, чтобы подчеркнуть роль J мы будем называть α_J шаблоном с носителем J.

В дальнейшем шаблоны будут изображаться в форме Дынкина. Например, $\begin{smallmatrix} *&*&1&*&* \\ &&*&& \end{smallmatrix}$ изображает шаблон α_4, и/или множество всех корней

$$\alpha = m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3 + m_4\alpha_4 + m_5\alpha_5 + m_6\alpha_6 \in \mathrm{E}_6,$$

для которых $m_4 = 1$. Кроме того, для краткости черта сверху будет обозначать противоположный шаблон/корень. Например, если $A = \begin{smallmatrix} *&*&\overline{1}&*&* \\ &&*&& \end{smallmatrix}$, то это шаблон $-\alpha_4$, и/или множество тех корней, для которых $m_4 = -1$.

Важность шаблонов определяется следующими двумя утверждениями, которые представляют собой лемму 1 работы [35] и лемму 2 работы [32], соответственно.

Лемма 6. *Пусть α и β – корни одинаковой длины из $\Phi \setminus \Delta$, шаблоны которых совпадают, $\alpha_J = \beta_J$. Тогда α и β лежат в одной орбите группы Вейля $W(\Delta)$.*

Лемма 7. *Пусть a, b, c – такие шаблоны, что $a + b = c$. Тогда для любого корня γ шаблона c найдется такой корень α шаблона a и такой корень β шаблона b, что $\gamma = \alpha + \beta$.*

Теперь фактическое описание классов Δ-эквивалентности и возникающих соотношений производится следующим образом.

• Пусть вначале Δ является редуктивной частью параболического подмножества. В этом случае лемма 6 полностью отвечает на вопрос описания орбит группы $W(\Delta)$, а лемма 7 – на вопрос описания соотношений между соответствующими этим орбитам идеалами.

Для $\Phi = \mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7, \mathrm{E}_8$ эти орбиты и будут классами Δ-эквивалентности, а для случая $\Phi = \mathrm{F}_4$ каждый такой класс либо сам образует орбиту длинных корней, либо является объединением двух орбит, длинных и коротких корней. Для того, чтобы перечислить все соотношения, достаточно теперь найти все случаи, когда сумма двух шаблонов с носителем J сама является шаблоном.

В условия этого пункта попадают 4 из 9 классов подсистем, удовлетворяющих условию $(*)$ в случае $\Phi = \mathrm{E}_6$; 9 из 18 таких классов в E_7; 10 из 32 классов в E_8 и, наконец, 3 из 11 классов в F_4. В общем случае, мы будем поступать следующим образом.

• Рассмотрим подсистему Δ из данного класса сопряженности, для которой порядок $\Delta\cap\Pi$ наибольший, и обозначим через Δ_0 подсистему в Δ, порожденную $\Delta\cap\Pi$. Предыдущий пункт позволяет найти классы Δ_0-эквивалентности и возникающие для них соотношения.

Примерно в 3/4 остающихся случаев подсистема Δ_0 имеет в Δ субмаксимальный ранг, причем Δ порождается Δ_0 и отрицательным максимальным корнем α_0. В случае $\Phi = \mathrm{E}_6$ таковы все 5 остающихся классов подсистем, удовлетворяющих условию $(*)$; в E_7 таких классов 7 из 9 остающихся; в E_8 их 15 из 22 остающихся и, и, наконец, в F_4 их 5 из 8 остающихся.

Наличие корня α_0 приводит к тому, что некоторые пары классов Δ_0-эквивалентности сливаются в один класс. Остается лишь переписать соотношения с учетом этих отождествлений.

• Тот же рецепт годится и в во всех остальных 12 случаях, нужно вначале найти классы Δ_0, потом произвести необходимые отждествления, чтобы получить классы подсистемы в Δ, порожденной Δ_0 и α_0, а потом еще один или два раза – а в случае $8\mathrm{A}_1$ в E_8 еще три раза – проделывать такую же процедуру для остальных простых корней в Δ.

Ровно так и строились таблицы в настоящей работе, чуть подробнее мы пишем об этом в следующем параграфе.

8. Построение уровня

Мы продолжаем считать, что подгруппа $H \leq G(\Phi, R)$ содержит элементарную группу Шевалле $E(\Delta, R)$ для некоторой подсистемы $\Delta \subseteq \Phi$, причем выполняются условия $(*)$ и $(***)$. Далее, пусть

$$E(\Delta, R) \leq R \leq G(\Phi, R)$$

– промежуточная подгруппа. Сейчас мы проделаем следующее.

• Пользуясь описанным в предыдущем параграфе алгоритмом, для каждой удовлетворяющей условию $(*)$ подсистемы Δ в системах $\Phi = \mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7, \mathrm{E}_8, \mathrm{F}_4$ мы опишем классы Δ-эквивалентности корней $\alpha \in \Phi \setminus \Delta$. Как мы знаем, за исключением случая F_4 они в точности совпадают с орбитами группы Вейля $W(\Delta)$.

• По леммам 1, 3, 5 каждому такому классу Ω соответствует некоторый идеал $A = I_\Omega(H) \trianglelefteq R$, состоящий из всех $\xi \in R$ таких, что $x_\alpha(\xi) \in H$ для какого-то (= любого) корня $\alpha \in \Omega$.

• Для каждой такой подсистемы Δ мы перечислим все тройки (Ω, Ψ, Ξ) классов Δ-эквивалентности, для которых найдутся корни $\alpha \in \Omega$ и $\beta \in \Psi$ такие, что $\alpha + \beta \in \Xi$. По лемме 2 каждая такая тройка порождает включение $AB \leq C$ соответствующих идеалов $A = I_\Omega(H)$, $B = I_\Psi(H)$, $C = I_\Xi(H)$.

Так как сами эти вычисления носят достаточно рутинный характер, ограничимся тем, что приведем указания на то, как именно они проводились и воспроизведем получающиеся ответы. В таблицах 1–4 строятся уровни надгрупп подсистемных подгрупп в группах Шевалле типов E_6, E_7, E_8 и F_4, соответственно. В них для каждой из подсистем, удовлетворяющих условию $(**)$, перечисляются следующие данные – при этом для случая F_4 предполагается дополнительно, что $2 \in R^*$.

• Порядковый номер системы Δ.

• Тип системы Δ.

• Фиксированная система простых корней Δ, которая состоит из каких-то простых корней $\overline{\Pi}$ – в этом случае вместо α_i указывается просто его номер i – и еще каких-то корней, которые явно указаны в легенде ниже.

• Количество идеалов, задающих уровень промежуточных подгрупп.

• Сами эти идеалы, с указанием класса Δ-эквивалентности корней из $\Phi \setminus \Delta$, которому соответствует этот идеал. Все данные в этой графе указаны по отношению к реализации в графе 3 и читать ее надлежит следующим образом.

◦ Запись $A = \alpha$ в таблице следует, разумеется, понимать как $A = I_\alpha$.

◦ Запись $\overline{A}$ без указания шаблона следует понимать как идеал, соответствующий шейпу с противоположным знаком, т.е. если $A = I_\alpha$, то $\overline{A} = I_{-\alpha}$.

◦ Как указано в предыдущем параграфе, сами орбиты задаются шаблонами входящих в них корней.

◦ В тех случаях, когда для нахождения соотношений существенно знать, что в одной орбите могут лежать корни разных шаблонов, это отмечается, например, в форме $A = \overline{B}$ или, реже, перечислением самих этих шаблонов.

• Наконец, в последней графе приведены соотношения между задающими уровень идеалами.

Сделаем теперь несколько замечаний по поводу того, как фактически производились вычисления классов Δ-эквивалентности/шаблонов корней из $\Phi \setminus \Delta$. Разумеется, это можно сделать и непосредственно по таблицам корней. Однако фактически мы пользовались для вычислений весовыми диаграммами присоединенных представлений, которые можно найти, например, в работах [48, 14].

∘ Для нахождения классов Δ_0-эквивалентности, где Δ_0 имеет тот же смысл, что в предыдущем параграфе, достаточно выбросить из этих диаграмм ребра, отвечающие простым корням, не попадающим в Δ_0. Тогда классы Δ_0-эквивалентности в точности отвечают всем связным компонентам получающегося графа, за вычетом самой Δ_0 и одноточечных компонент, состоящих из нулевых весов.

∘ Теперь добавление к получившемуся графу ребер с меткой α_0, а потом дальнейших ребер такого типа, приводит к слияниям некоторых связных компонент и отождествлениям соответствующих шаблонов, отмеченным в графе 5 наших таблиц.

∘ Соотношения отслеживались по шаблонам, первоначально вручную. Чтобы избежать возможных ошибок, в особенности для нескольких наиболее трудных случаев в E_8, в дальнейшем мы написали программу, которая генерировала соотношения на компьютере.

9. Where next?

Настоящая работа является первым шагом в реализации программы описания надгрупп subsystem subgroups в исключительных группах. То, что эта задача важна и естественна, стало ясно в 1980-х годах, сразу после того, как аналогичные результаты были получены для классических групп. Однако, в то время, по крайней мере до работы Майкла Ашбахера [34], никто не умел решать задачи подобной сложности для исключительных групп. Более того, не имелось никаких инструментов для их решения.

Именно создание таких работающих инструментов было значительной частью нашей внутренней мотивации при развитии метода разложения унипотентов, см. [53–55] и содержащиеся там ссылки, а также дальнейших геометрических методов в структурной теории групп Шевалле [16–19]. Теперь, после работ Александра Лузгарева [29, 30] мы уверены, что эти методы позволят, наконец, решить задачу описания надгрупп subsystem subgroups, по крайней мере в некоторых важных случаях.

Перечислим несколько случаев, в которых описание промежуточных подгрупп выглядит наиболее реалистичным – или наиболее интересным. Прежде всего, это следующие 5 случаев, для которых уровень задается *одним* идеалом. Эти случаи заметно проще всех остальных, так как для них не нужно извлекать все корневые унипотенты, а можно провести обычную редукцию по уровню, в том же духе, как при описании нормальных подгрупп в $G(\Phi, R)$.

Проблема 1. *Описать надгруппы* $E(\mathrm{A}_7, R)$ *в* $G(\mathrm{E}_7, R)$.

Проблема 2. *Описать надгруппы* $E(\mathrm{A}_5 + \mathrm{A}_1, R)$ *в* $G(\mathrm{E}_6, R)$.

Проблема 3. *Описать надгруппы* $E(\mathrm{D}_6 + \mathrm{A}_1, R)$ *в* $G(\mathrm{E}_7, R)$.

Проблема 4. *Описать надгруппы* $E(\mathrm{D}_8, R)$ *в* $G(\mathrm{E}_8, R)$.

Проблема 5. *Описать надгруппы* $E(\mathrm{E}_7 + \mathrm{A}_1, R)$ *в* $G(\mathrm{E}_8, R)$.

Сформулируем, как, с нашей точки зрения, выглядит ответ в этих случаях. Для каждой промежуточной подгруппы H, $E(\Delta, R) \leq H \leq G = G(\Phi, R)$, существует единственный идеал $I \trianglelefteq R$ такой, что

$$E(\Delta, R)E(\Phi, R, I) \leq H \leq N_G\big(E(\Delta, R)E(\Phi, R, I)\big).$$

Мы уверены, что в настоящее время располагаем всеми инструментами для решения проблем 1–3. Для решения первых двух из них достаточно первоначального варианта метода разложения унипотентов [54, 55], хотя, вероятно, и для них проще использовать какой-то вариант A_2-доказательства. Как мы уже отмечали, случай $\mathrm{A}_7 \subseteq \mathrm{E}_7$ кажется нам чуть более простым, чем случай $\mathrm{A}_5 + \mathrm{A}_1 \subseteq \mathrm{E}_6$.

Для систем F_4 и G_2 имеется еще три подсистемы, для которых уровень задается *одним* идеалом.

Проблема 6. *Описать надгруппы* $E(\mathrm{A}_2, R)$ *в* $G(\mathrm{G}_2, R)$.

Проблема 7. *Описать надгруппы* $E(\mathrm{B}_4, R)$ *в* $G(\mathrm{F}_4, R)$.

Проблема 8. *Описать надгруппы* $E(\mathrm{C}_3 + \mathrm{A}_1, R)$ *в* $G(\mathrm{F}_4, R)$.

Заметим, впрочем, что вторая из этих задач чрезвычайно близка к следующей задаче, стандартный ответ на которую дается в терминах *двух* идеалов.

Проблема 9. *Описать надгруппы* $E(\mathrm{D}_5, R)$ *в* $G(\mathrm{E}_6, R)$.

Следующими по сложности являются четыре случая, в которых ответ также дается в терминах *двух* идеалов A, B. Однако, в отличие от проблемы 9, где эти идеалы произвольны, в следующих четырех случаях они связаны между собой соотношениями $A^2 \leq B$, $B^2 \leq A$.

Проблема 10. *Описать надгруппы* $E(\mathrm{A}_5 + \mathrm{A}_2, R)$ *в* $G(\mathrm{E}_7, R)$.

Проблема 11. *Описать надгруппы* $E(3\mathrm{A}_2, R)$ *в* $G(\mathrm{E}_6, R)$.

Проблема 12. *Описать надгруппы* $E(\mathrm{A}_8, R)$ *в* $G(\mathrm{E}_8, R)$.

Проблема 13. *Описать надгруппы* $E(\mathrm{E}_6 + \mathrm{A}_2, R)$ *в* $G(\mathrm{E}_8, R)$.

В этих случаях стандартный ответ должен выглядеть следующим образом. Пусть Ω и Ψ суть классы Δ-эквивалентности корней из $\Phi \setminus \Delta$. Сопоставим паре (A, B) идеалов кольца R элементарную подгруппу

$$E(\Phi, \Delta, R, A, B) = E(\Delta, R) \cdot \big\langle x_\alpha(\xi),\ \text{где } \alpha \in \Omega,\ \xi \in A \text{ или } \alpha \in \Psi,\ \xi \in B \big\rangle.$$

Тогда для каждой промежуточной подгруппы H, $E(\Delta, R) \leq H \leq G = G(\Phi, R)$, существует два идеала $A = I_\Omega(H)$ и $B = I_\Psi(H)$, $A^2 \leq B$, $B^2 \leq A$ такие, что

$$E(\Phi, \Delta, R, A, B) \leq H \leq N_G\big(E(\Phi, \Delta, R, A, B)\big).$$

Мы считаем, что решение этих задач существующими методами также вполне реалистично.

Случаев, когда имеется ровно *три* класса Δ-эквивалентности корней из $\Phi \setminus \Delta$, также совсем немного, 2 для E_7, 4 для E_8 и 3 для F_4. Пусть Ω, Ψ и Ξ суть эти классы. Сопоставим тройке (A, B, C) идеалов кольца R элементарную подгруппу

$$\begin{gathered} E(\Phi, \Delta, R, A, B, C) = E(\Delta, R)\cdot \\ \big\langle x_\alpha(\xi),\ \text{где } \alpha \in \Omega,\ \xi \in A \text{ или } \alpha \in \Psi,\ \xi \in B,\ \text{или } \alpha \in \Xi,\ \xi \in C \big\rangle. \end{gathered}$$

Как и выше, стандартный ответ состоит в том, что любая промежуточная подгруппа лежит между [однозначно определенной] элементарной подгруппой вида $E(\Phi, \Delta, R, A, B, C)$ и ее нормализатором в $G(\Phi, R)$.

В пяти случаях между задающими уровень идеалами выполняются соотношения $AB \leq C$, $CA \leq B$, $CB \leq A$. Вот 3 из них, возникающие для систем с простыми связями, два других – это D_4 и $\mathrm{B}_2 + 2\mathrm{A}_1$ в F_4.

Проблема 14. *Описать надгруппы* $E(\mathrm{D}_4 + 3\mathrm{A}_1, R)$ *в* $G(\mathrm{E}_7, R)$.

Проблема 15. *Описать надгруппы* $E(\mathrm{D}_6 + 2\mathrm{A}_1, R)$ *в* $G(\mathrm{E}_8, R)$.

Проблема 16. *Описать надгруппы* $E(2\mathrm{D}_4, R)$ *в* $G(\mathrm{E}_8, R)$.

В четырех оставшихся случаях, когда уровень задается тремя идеалами, соотношения чуть сложнее, а именно $A^2, C^2 \leq B$, $BC \leq A$, $BA \leq C$. Вот те из них, которые возникают для систем с простыми связями, остающийся случай – это $\mathrm{A}_2 + \widetilde{\mathrm{A}}_1$ в F_4.

Проблема 17. *Описать надгруппы* $E(2\mathrm{A}_3 + \mathrm{A}_1, R)$ *в* $G(\mathrm{E}_7, R)$.

Проблема 18. *Описать надгруппы* $E(\mathrm{A}_7 + \mathrm{A}_1, R)$ *в* $G(\mathrm{E}_8, R)$.

Проблема 19. *Описать надгруппы* $E(\mathrm{D}_5 + \mathrm{A}_3, R)$ *в* $G(\mathrm{E}_8, R)$.

В F_4 реализуется следующий чрезвычайно интересный случай.

Проблема 20. *Описать надгруппы* $E(\mathrm{D}_4, R)$ *в* $G(\mathrm{F}_4, R)$.

Заметим, что в работе первого автора и Сергея Николенко [18] предложено A_2-доказательство структурных теорем в группе Шевалле типа F_4, в котором используются только длинные корни. Мы уверены, что это доказательство можно адаптировать для описания подгрупп в $G(\mathrm{F}_4, R)$, нормализуемых $E(\mathrm{D}_4, R)$.

Следующая задача еще гораздо сложнее и должна дать более реалистическое представление о трудностях, с которыми придется столкнуться в общем случае.

Проблема 21. *Описать надгруппы* $E(\mathrm{D}_4, R)$ *в* $G(\mathrm{E}_6, R)$.

Дело в том, что решение этой задачи включает в себя, *в частности*, как решение предыдущей задачи, так и описание надгрупп надгруппы $E(\mathrm{F}_4, R)$ в $G(\mathrm{E}_6, R)$. Как мы уже упоминали, последняя задача недавно решена Лузгаревым [29, 30]. Из этих работ, в сочетании с возникающими в нашей ситуации дополнительными исключительными симметриями, видно, что уже решение этой конкретной задачи будет *чрезвычайно* сложным.

Отметим еще одно чрезвычайно важное обстоятельство, которое ранее от нас совершенно ускользало. А именно, всюду ранее, руководствуясь аналогией с классическими группами, мы требовали выполнения условия $(**)$. Иными словами, мы считали, что для извлечения унипотентов невозможно использовать компоненты ранга 1.

Это действительно так для случаев A_l и C_l, где необходимо, чтобы все неприводимые компоненты содержали подсистему типа A_2 или C_2.

В то же время, как мы недавно заметили, в исключительных группах – да и в ортогональных группах! – для извлечения унипотентов можно с успехом использовать подсистемы типа $2\mathrm{A}_1$.

Это связано с тем, что с точки зрения действия на минимальном модуле объемлющей группы подсистемы типа $2\mathrm{A}_1$ могут вести себя как системы ранга 2! Для целей стабилизации столбцов они ничем не отличаются от подсистем типа A_2. Собственно, это обстоятельство отмечено в замечании после доказательства основной леммы в работе [17], но в то время мы не заметили открывающиеся здесь возможности.

В частности, как нам теперь представляется, следующая задача, хотя и чрезвычайно сложна, в принципе вполне может быть решена над *произвольным* коммутативным кольцом!

Проблема 22. *Описать надгруппы* $E(7\mathrm{A}_1, R)$ *в* $G(\mathrm{E}_7, R)$.

В этой связи стоит отметить, что в имеющейся литературе нет даже решения следующей гораздо более простой задачи, которая в любом случае возникнет как часть решения проблемы 22.

Проблема 23. *Описать надгруппы* $E(4\mathrm{A}_1, R)$ *в* $G(\mathrm{D}_4, R)$.

Ясно, что имеет смысл рассмотреть следующую более общую задачу, относящуюся к ортогональным группам произвольного ранга.

Проблема 24. *Описать надгруппы* $E(2m\mathrm{A}_1, R)$ *в* $G(\mathrm{D}_{2m}, R)$.

В E_6 можно найти лишь 4 попарно ортогональных корня. Таким образом, возникают еще две вариации на тему проблемы 23.

Проблема 25. *Описать надгруппы* $E(4\mathrm{A}_1, R)$ *в* $G(\mathrm{E}_6, R)$.

Проблема 26. *Описать надгруппы* $E(4\mathrm{A}_1, R)$ *в* $G(\mathrm{F}_4, R)$.

Ясно, однако, что эти задачи, являющиеся, *в частности*, совместными обобщениями проблем 7, 8, 20, 21, 23, *чрезвычайно* сложны. Пока нам совершенно неясно, хватит ли четырех копий A_1, чтобы произвести извлечение унипотентов в этих случаях.

Отметим еще несколько интересных подсистем в E_8, которые также обладают высоким уровнем симметрии и имеют большие нормализаторы. Это еще три случая, когда было бы чрезвычайно интересно получить описание промежуточных подгрупп, хотя в настоящий момент мы не представляем, как это могло бы выглядеть технически.

Проблема 27. *Описать надгруппы* $E(2\mathrm{A}_4, R)$ *в* $G(\mathrm{E}_8, R)$.

Проблема 28. *Описать надгруппы* $E(4\mathrm{A}_2, R)$ *в* $G(\mathrm{E}_8, R)$.

Проблема 29. *Описать надгруппы* $E(8\mathrm{A}_1, R)$ *в* $G(\mathrm{E}_8, R)$.

В следующей нашей работе мы планируем решить первые две из сформулированных выше задач.

Таблица 1. Уровни надгрупп subsystem subgroups в E_6

#	тип Δ	Δ	m	уровень	соотношения
1.	A_5+A_1	1,3,4,5,6,0	1	$A=\begin{smallmatrix}*&*&*&*&*\\&&1&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&*&*&*\\&&1&&\end{smallmatrix}$	
2.	$3A_2$	1,2,3,5,6,0	2	$A=\begin{smallmatrix}*&*&1&*&*\\&&*&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&2&*&*\\&&*&&\end{smallmatrix}$, $B=\begin{smallmatrix}*&*&2&*&*\\&&*&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&1&*&*\\&&*&&\end{smallmatrix}$	$A^2\le B$, $B^2\le A$;
3.	D_5	2,3,4,5,0	2	$A=\begin{smallmatrix}1&*&*&*&0\\&&*&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}0&*&*&*&1\\&&*&&\end{smallmatrix}$, $B=\begin{smallmatrix}0&*&*&*&1\\&&*&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}1&*&*&*&0\\&&*&&\end{smallmatrix}$	
4.	A_4+A_1	1,2,3,4,6	4	$A=\begin{smallmatrix}*&*&*&1&*\\&&*&&\end{smallmatrix}$, $B=\begin{smallmatrix}*&*&*&2&*\\&&*&&\end{smallmatrix}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$	$A^2\le B$, $B\overline{A}\le A$, $\overline{A}^2\le\overline{B}$, $\overline{B}A\le\overline{A}$;
5.	A_3+2A_1	1,2,4,6,0	5	$A=\begin{smallmatrix}*&1&*&0&*\\&&*&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&1&*&2&*\\&&*&&\end{smallmatrix}$, $B=\begin{smallmatrix}*&0&*&1&*\\&&*&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&2&*&1&*\\&&*&&\end{smallmatrix}$, $C=\begin{smallmatrix}*&1&*&1&*\\&&*&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&1&*&1&*\\&&*&&\end{smallmatrix}$, $D=\begin{smallmatrix}*&2&*&1&*\\&&*&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&0&*&1&*\\&&*&&\end{smallmatrix}$, $E=\begin{smallmatrix}*&1&*&2&*\\&&*&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&1&*&0&*\\&&*&&\end{smallmatrix}$	$AB\le C$, $CE\le B$, $CD\le A$, $ED\le C$, $CA\le D$, $CB\le E$;
6.	$2A_2+A_1$	1,2,3,5,6	6	$A=\begin{smallmatrix}*&*&1&*&*\\&&*&&\end{smallmatrix}$, $B=\begin{smallmatrix}*&*&2&*&*\\&&*&&\end{smallmatrix}$, $C=\begin{smallmatrix}*&*&3&*&*\\&&*&&\end{smallmatrix}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$	$A^2\le B$, $B\overline{A}\le A$, $\overline{A}^2\le\overline{B}$, $\overline{B}A\le\overline{A}$; $AB\le C$, $C\overline{A}\le B$, $C\overline{B}\le A$, $\overline{AB}\le\overline{C}$, $\overline{C}A\le\overline{B}$, $\overline{C}B\le\overline{A}$;
7.	D_4	2,3,4,5	6	$A=\begin{smallmatrix}1&*&*&*&0\\&&*&&\end{smallmatrix}$, $B=\begin{smallmatrix}0&*&*&*&1\\&&*&&\end{smallmatrix}$, $C=\begin{smallmatrix}1&*&*&*&1\\&&*&&\end{smallmatrix}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$	$AB\le C$, $C\overline{A}\le B$, $C\overline{B}\le A$, $\overline{AB}\le\overline{C}$, $\overline{C}A\le\overline{B}$, $\overline{C}B\le\overline{A}$;

Таблица 1 (продолжение). Уровни надгрупп subsystem subgroups в E_6

#	тип Δ	Δ	m	уровень	соотношения
8.	$\mathrm{A}_2+2\mathrm{A}_1$	1,2,4,6	12	$A = \begin{smallmatrix} * & 1 & * & 0 & * \\ & & * & & \end{smallmatrix}$, $B = \begin{smallmatrix} * & 0 & * & 1 & * \\ & & * & & \end{smallmatrix}$, $C = \begin{smallmatrix} * & 1 & * & 1 & * \\ & & * & & \end{smallmatrix}$, $D = \begin{smallmatrix} * & 2 & * & 1 & * \\ & & * & & \end{smallmatrix}$, $E = \begin{smallmatrix} * & 1 & * & 2 & * \\ & & * & & \end{smallmatrix}$, $F = \begin{smallmatrix} * & 2 & * & 2 & * \\ & & * & & \end{smallmatrix}$, $\overline{A} = -\begin{smallmatrix} * & 1 & * & 0 & * \\ & & * & & \end{smallmatrix}$, $\overline{B} = -\begin{smallmatrix} * & 0 & * & 1 & * \\ & & * & & \end{smallmatrix}$, $\overline{C} = -\begin{smallmatrix} * & 1 & * & 1 & * \\ & & * & & \end{smallmatrix}$, $\overline{D} = -\begin{smallmatrix} * & 2 & * & 1 & * \\ & & * & & \end{smallmatrix}$, $\overline{E} = -\begin{smallmatrix} * & 1 & * & 2 & * \\ & & * & & \end{smallmatrix}$, $\overline{F} = -\begin{smallmatrix} * & 2 & * & 2 & * \\ & & * & & \end{smallmatrix}$	$AB \le C$, $C\overline{A} \le B$, $C\overline{B} \le A$, $\overline{AB} \le \overline{C}$, $\overline{C}A \le \overline{B}$, $\overline{C}B \le \overline{A}$; $AC \le D$, $D\overline{A} \le C$, $D\overline{C} \le A$, $\overline{AC} \le \overline{D}$, $\overline{D}A \le \overline{C}$, $\overline{DC} \le \overline{A}$; $AE \le F$, $F\overline{A} \le E$, $F\overline{E} \le A$, $\overline{AE} \le \overline{F}$, $\overline{F}A \le \overline{E}$, $\overline{F}E \le \overline{A}$; $BC \le E$, $E\overline{B} \le C$, $E\overline{C} \le B$, $\overline{BC} \le \overline{E}$, $\overline{E}B \le \overline{C}$, $\overline{EC} \le \overline{B}$; $BD \le F$, $F\overline{B} \le D$, $F\overline{D} \le B$, $\overline{BD} \le \overline{F}$, $\overline{F}B \le \overline{D}$, $\overline{F}D \le \overline{B}$; $C^2 \le F$, $F\overline{C} \le C$, $\overline{C}^2 \le \overline{F}$, $\overline{F}C \le \overline{C}$;
9.	$4\mathrm{A}_1$	1,4,6,0	13	$A = \begin{smallmatrix} * & 1 & * & 0 & * \\ & & 0 & & \end{smallmatrix}$, $B = \begin{smallmatrix} * & 0 & * & 1 & * \\ & & 0 & & \end{smallmatrix}$, $C = \begin{smallmatrix} * & 1 & * & 1 & * \\ & & 0 & & \end{smallmatrix}$, $D = \begin{smallmatrix} * & 0 & * & 0 & * \\ & & 1 & & \end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix} * & 2 & * & 2 & * \\ & & 1 & & \end{smallmatrix}$, $E \begin{smallmatrix} * & 1 & * & 0 & * \\ & & 1 & & \end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix} * & 1 & * & 2 & * \\ & & 1 & & \end{smallmatrix}$, $F = \begin{smallmatrix} * & 0 & * & 1 & * \\ & & 1 & & \end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix} * & 2 & * & 1 & * \\ & & 1 & & \end{smallmatrix}$, $G = \begin{smallmatrix} * & 1 & * & 1 & * \\ & & 1 & & \end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix} * & 1 & * & 1 & * \\ & & 1 & & \end{smallmatrix}$, $H = \begin{smallmatrix} * & 2 & * & 1 & * \\ & & 1 & & \end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix} * & 0 & * & 1 & * \\ & & 1 & & \end{smallmatrix}$, $I = \begin{smallmatrix} * & 1 & * & 2 & * \\ & & 1 & & \end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix} * & 1 & * & 0 & * \\ & & 1 & & \end{smallmatrix}$, $J = \begin{smallmatrix} * & 2 & * & 2 & * \\ & & 1 & & \end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix} * & 0 & * & 0 & * \\ & & 1 & & \end{smallmatrix}$, $\overline{A} = -\begin{smallmatrix} * & 1 & * & 0 & * \\ & & 0 & & \end{smallmatrix}$, $\overline{B} = -\begin{smallmatrix} * & 0 & * & 1 & * \\ & & 0 & & \end{smallmatrix}$, $\overline{C} = -\begin{smallmatrix} * & 1 & * & 1 & * \\ & & 0 & & \end{smallmatrix}$	$AB \le C$, $C\overline{A} \le B$, $C\overline{B} \le A$, $\overline{AB} \le \overline{C}$, $\overline{C}A \le \overline{B}$, $\overline{C}B \le \overline{A}$; $AD \le E$, $E\overline{A} \le D$, $EJ \le A$, $\overline{A}J \le I$, $IA \le J$, $ID \le \overline{A}$; $AF \le G$, $G\overline{A} \le F$, $GH \le A$, $\overline{A}H \le G$, $GA \le H$, $GF \le \overline{A}$; $BD \le F$, $F\overline{B} \le D$, $FJ \le B$, $\overline{B}J \le H$, $HB \le J$, $HD \le \overline{B}$; $BE \le G$, $G\overline{B} \le E$, $GI \le B$, $\overline{B}I \le G$, $GB \le I$, $GE \le \overline{B}$; $CD \le G$, $G\overline{C} \le D$, $GJ \le C$, $\overline{C}J \le G$, $GC \le J$, $GD \le \overline{C}$; $CE \le H$, $H\overline{C} \le E$, $HI \le C$, $\overline{C}I \le F$, $FC \le I$, $FE \le \overline{C}$;

Таблица 2. Уровни надгрупп subsystem subgroups в E_7

#	тип Δ	Δ	m	уровень	соотношения
1.	D_6+A_1	2,3,4,5,6,7,0	1	$A=\begin{smallmatrix}1&*&*&*&*&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}1&*&*&*&*&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$,	
2.	A_7	1,3,4,5,6,7,0	1	$A=\begin{smallmatrix}*&*&*&*&*&*\\&&1&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&*&*&*&*\\&&1&&&\end{smallmatrix}$,	
3.	A_5+A_2	1,2,4,5,6,7,0	2	$A=\begin{smallmatrix}*&1&*&*&*&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&2&*&*&*&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$, $B=\begin{smallmatrix}*&2&*&*&*&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&1&*&*&*&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$,	$A^2\le B$, $B^2\le A$;
4.	D_4+3A_1	2,3,4,5,7,0, $-\begin{smallmatrix}0&1&2&2&2&1\\&&1&&&\end{smallmatrix}=-\alpha_0(D_6)$	3	$A=\begin{smallmatrix}1&*&*&*&0&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=\begin{smallmatrix}1&*&*&*&2&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}1&*&*&*&0&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}1&*&*&*&2&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$, $B=\begin{smallmatrix}0&*&*&*&1&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}0&*&*&*&1&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$, $C=\begin{smallmatrix}1&*&*&*&1&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}1&*&*&*&1&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$,	$AB\le C, CA\le B$, $CB\le A$;
5.	$2A_3+A_1$	1,2,3,5,6,7,0	3	$A=\begin{smallmatrix}*&*&1&*&*&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&3&*&*&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$, $B=\begin{smallmatrix}*&*&2&*&*&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&2&*&*&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$, $C=\begin{smallmatrix}*&*&3&*&*&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&1&*&*&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$,	$A^2\le B$, $BC\le A$, $C^2\le B$, $BA\le C$;
6.	$7A_1$	2,3,5,7,0, $-\begin{smallmatrix}0&1&2&2&2&1\\&&1&&&\end{smallmatrix}=-\alpha_0(D_6)$, $\begin{smallmatrix}0&1&2&1&0&0\\&&1&&&\end{smallmatrix}=-\alpha_0(D_4)$	7	$A=\begin{smallmatrix}1&*&0&*&0&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=\begin{smallmatrix}1&*&2&*&2&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=\begin{smallmatrix}1&*&4&*&2&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}1&*&0&*&0&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}1&*&2&*&2&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=\begin{smallmatrix}1&*&2&*&0&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}1&*&4&*&2&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}1&*&2&*&0&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$, $B=\begin{smallmatrix}0&*&1&*&0&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}0&*&1&*&0&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$, $C=\begin{smallmatrix}1&*&1&*&0&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=\begin{smallmatrix}1&*&3&*&2&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}1&*&1&*&0&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}1&*&3&*&2&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$, $D=\begin{smallmatrix}0&*&0&*&1&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=\begin{smallmatrix}0&*&2&*&1&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}0&*&0&*&1&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}0&*&2&*&1&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$, $E=\begin{smallmatrix}0&*&1&*&1&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}0&*&1&*&1&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$, $F=\begin{smallmatrix}1&*&1&*&1&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=\begin{smallmatrix}1&*&3&*&1&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}1&*&1&*&1&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}1&*&3&*&1&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$, $G=\begin{smallmatrix}1&*&2&*&1&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}1&*&2&*&1&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$,	$AB\le C, CA\le B$, $CB\le A$; $AD\le G$, $GA\le D, GD\le A$; $AE\le F, FA\le E$, $FE\le A$; $BD\le E$, $EB\le D, ED\le B$; $BF\le G, GB\le F$, $GF\le B$; $CD\le F$, $FC\le D, FD\le C$; $CE\le G, GC\le E$, $GE\le C$;

Таблица 2 (продолжение). Уровни надгрупп subsystem subgroups в E_7

#	тип Δ	Δ	m	уровень	соотношения
7.	E_6	1,2,3,4,5,6	2	$A = \begin{smallmatrix} * & * & * & * & * & 1 \\ & & * & & & \end{smallmatrix}$, $\overline{A} = -\begin{smallmatrix} * & * & * & * & * & 1 \\ & & * & & & \end{smallmatrix}$,	
8.	A_6	1,3,4,5,6,7	4	$A = \begin{smallmatrix} * & * & * & * & * & * \\ & & 1 & & & \end{smallmatrix}$, $B = \begin{smallmatrix} * & * & * & * & * & * \\ & & 2 & & & \end{smallmatrix}$, $\overline{A} = -\begin{smallmatrix} * & * & * & * & * & * \\ & & 1 & & & \end{smallmatrix}$, $\overline{B} = -\begin{smallmatrix} * & * & * & * & * & * \\ & & 2 & & & \end{smallmatrix}$,	$A^2 \le B$, $B\overline{A} \le A$, $\overline{A}^2 \le \overline{B}$, $\overline{B}A \le \overline{A}$;
9.	$D_5 + A_1$	1,2,3,4,5,7	4	$A = \begin{smallmatrix} * & * & * & * & 1 & * \\ & & * & & & \end{smallmatrix}$, $B = \begin{smallmatrix} * & * & * & * & 2 & * \\ & & * & & & \end{smallmatrix}$, $\overline{A} = -\begin{smallmatrix} * & * & * & * & 1 & * \\ & & * & & & \end{smallmatrix}$, $\overline{B} = -\begin{smallmatrix} * & * & * & * & 2 & * \\ & & * & & & \end{smallmatrix}$,	$A^2 \le B$, $B\overline{A} \le A$, $\overline{A}^2 \le \overline{B}$, $\overline{B}A \le \overline{A}$;
10.	$(A_5 + A_1)'$	3,4,5,6,7,0	5	$A = \begin{smallmatrix} 1 & * & * & * & * & * \\ & & 0 & & & \end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix} 1 & * & * & * & * & * \\ & & 2 & & & \end{smallmatrix}$, $B = \begin{smallmatrix} 0 & * & * & * & * & * \\ & & 1 & & & \end{smallmatrix}$, $\overline{B}$, $C = \begin{smallmatrix} 1 & * & * & * & * & * \\ & & 1 & & & \end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix} 1 & * & * & * & * & * \\ & & 1 & & & \end{smallmatrix}$, $D = \begin{smallmatrix} 1 & * & * & * & * & * \\ & & 2 & & & \end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix} 1 & * & * & * & * & * \\ & & 0 & & & \end{smallmatrix}$,	$AB \le C$, $CD \le B$, $C\overline{B} \le A$, $D\overline{B} \le C$, $CA \le \overline{B}$, $CB \le D$;
11.	$(A_5 + A_1)''$	1,2,4,5,6,7	6	$A = \begin{smallmatrix} * & 1 & * & * & * & * \\ & & * & & & \end{smallmatrix}$, $B = \begin{smallmatrix} * & 2 & * & * & * & * \\ & & * & & & \end{smallmatrix}$, $C = \begin{smallmatrix} * & 3 & * & * & * & * \\ & & * & & & \end{smallmatrix}$, $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$,	$A^2 \le B$, $B\overline{A} \le A$, $\overline{A}^2 \le \overline{B}$, $\overline{B}A \le \overline{A}$; $AB \le C$, $C\overline{A} \le B$, $C\overline{B} \le A$, $\overline{AB} \le \overline{C}$, $\overline{C}A \le \overline{B}$, $\overline{C}B \le \overline{A}$;
12.	$A_4 + A_2$	1,2,3,4,6,7	6	$A = \begin{smallmatrix} * & * & * & 1 & * & * \\ & & * & & & \end{smallmatrix}$, $B = \begin{smallmatrix} * & * & * & 2 & * & * \\ & & * & & & \end{smallmatrix}$, $C = \begin{smallmatrix} * & * & * & 3 & * & * \\ & & * & & & \end{smallmatrix}$, $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$,	$A^2 \le B$, $B\overline{A} \le A$, $\overline{A}^2 \le \overline{B}$, $\overline{B}A \le \overline{A}$; $AB \le C$, $C\overline{A} \le B$, $C\overline{B} \le A$, $\overline{AB} \le \overline{C}$, $\overline{C}A \le \overline{B}$, $\overline{C}B \le \overline{A}$;
13.	$A_3+A_2+A_1$	1,2,3,5,6,7	8	$A = \begin{smallmatrix} * & * & 1 & * & * & * \\ & & * & & & \end{smallmatrix}$, $B = \begin{smallmatrix} * & * & 2 & * & * & * \\ & & * & & & \end{smallmatrix}$, $C = \begin{smallmatrix} * & * & 3 & * & * & * \\ & & * & & & \end{smallmatrix}$, $D = \begin{smallmatrix} * & * & 4 & * & * & * \\ & & * & & & \end{smallmatrix}$, $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$,	$A^2 \le B$, $B\overline{A} \le A$, $\overline{A}^2 \le \overline{B}$, $\overline{B}A \le \overline{A}$; $AB \le C$, $C\overline{A} \le B$, $C\overline{B} \le A$, $\overline{AB} \le \overline{C}$, $\overline{C}A \le \overline{B}$, $\overline{C}B \le \overline{A}$; $AC \le D$, $D\overline{A} \le C$, $D\overline{C} \le A$, $\overline{AC} \le \overline{D}$, $\overline{D}A \le \overline{C}$, $\overline{D}C \le \overline{A}$; $B^2 \le D$, $D\overline{B} \le B$, $\overline{B}^2 \le \overline{D}$, $\overline{D}B \le \overline{B}$;

Таблица 2 (продолжение) . Уровни надгрупп subsystem subgroups в E_7

#	тип Δ	Δ	m	уровень	соотношения
14.	$3A_2$	1,2,4,6,7,0	8	$A=\begin{smallmatrix}*&1&*&0&*&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&2&*&3&*&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$, $B=\begin{smallmatrix}*&0&*&1&*&*\\&&*&&&\end{smallmatrix},\overline{B}$, $C=\begin{smallmatrix}*&1&*&1&*&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&2&*&2&*&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$, $D=\begin{smallmatrix}*&2&*&1&*&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&1&*&2&*&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$, $E=\begin{smallmatrix}*&1&*&2&*&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&2&*&1&*&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$, $F=\begin{smallmatrix}*&2&*&2&*&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&1&*&1&*&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$, $G=\begin{smallmatrix}*&2&*&3&*&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&1&*&0&*&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$,	$AB\le C, CG\le B, C\overline{B}\le A, G\overline{B}\le F, FA\le\overline{B}$, $FB\le G$; $AC\le D, DG\le C, DF\le A, GF\le E$, $EA\le F, EC\le G$; $BC\le E, E\overline{B}\le C, EF\le B$, $\overline{B}F\le D, DB\le F, DC\le\overline{B}$; $C^2\le F, F^2\le C$;
15.	A_3+3A_1	1,2,3,5,7,0	9	$A=\begin{smallmatrix}*&*&1&*&0&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&3&*&2&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$, $B=\begin{smallmatrix}*&*&0&*&1&*\\&&*&&&\end{smallmatrix},\overline{B}$, $C=\begin{smallmatrix}*&*&1&*&1&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&3&*&1&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$, $D=\begin{smallmatrix}*&*&2&*&0&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&2&*&2&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$, $E=\begin{smallmatrix}*&*&2&*&1&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&2&*&1&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$, $F=\begin{smallmatrix}*&*&3&*&1&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&1&*&1&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$, $G=\begin{smallmatrix}*&*&2&*&2&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&2&*&0&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$, $H=\begin{smallmatrix}*&*&3&*&2&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&1&*&0&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$,	$A^2\le D, DH\le A, H^2\le G, GA\le H$; $AB\le C$, $CH\le B, C\overline{B}\le A, H\overline{B}\le F, FA\le\overline{B}, FB\le H$; $AC\le E, EH\le C, EF\le A, HF\le E, EA\le F$, $EC\le H$; $BD\le E, E\overline{B}\le D, EG\le B, \overline{B}G\le E$, $EB\le G, ED\le\overline{B}$; $C^2\le G, GF\le C, F^2\le D$, $DC\le F$;

Таблица 2 (продолжение). Уровни надгрупп subsystem subgroups в E_7

#	тип Δ	Δ	m	уровень	соотношения
16.	A_4+A_1	1,3,4,5,7	12	$A=\begin{smallmatrix}*&*&*&*&0&*\\&&1&&&\end{smallmatrix}$, $B=\begin{smallmatrix}*&*&*&*&1&*\\&&0&&&\end{smallmatrix}$, $C=\begin{smallmatrix}*&*&*&*&1&*\\&&1&&&\end{smallmatrix}$, $D=\begin{smallmatrix}*&*&*&*&2&*\\&&1&&&\end{smallmatrix}$, $E=\begin{smallmatrix}*&*&*&*&1&*\\&&2&&&\end{smallmatrix}$, $F=\begin{smallmatrix}*&*&*&*&2&*\\&&2&&&\end{smallmatrix}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$, $\overline{E}$, $\overline{F}$,	$AB\le C$, $C\overline{A}\le B$, $C\overline{B}\le A$, $\overline{AB}\le\overline{C}$, $\overline{C}A\le\overline{B}$, $\overline{C}B\le\overline{A}$; $AC\le E$, $E\overline{A}\le C$, $E\overline{C}\le A$, $\overline{AC}\le\overline{E}$, $\overline{E}A\le\overline{C}$, $\overline{E}C\le\overline{A}$; $AD\le F$, $F\overline{A}\le D$, $F\overline{D}\le A$, $\overline{AD}\le\overline{F}$, $\overline{F}A\le\overline{D}$, $\overline{F}D\le\overline{A}$; $BC\le D$, $D\overline{B}\le C$, $D\overline{C}\le B$, $\overline{BC}\le\overline{D}$, $\overline{D}B\le\overline{C}$, $\overline{D}C\le\overline{B}$; $BE\le F$, $F\overline{B}\le E$, $F\overline{E}\le B$, $\overline{BE}\le\overline{F}$, $\overline{F}B\le\overline{E}$, $\overline{F}E\le\overline{B}$; $C^2\le F$, $F\overline{C}\le C$, $\overline{C}^2\le\overline{F}$, $\overline{F}C\le\overline{C}$;
17.	$2A_2+A_1$	1,2,4,6,7	16	$A=\begin{smallmatrix}*&1&*&0&*&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$, $B=\begin{smallmatrix}*&0&*&1&*&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$, $C=\begin{smallmatrix}*&1&*&1&*&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$, $D=\begin{smallmatrix}*&1&*&2&*&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$, $E=\begin{smallmatrix}*&2&*&1&*&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$, $F=\begin{smallmatrix}*&2&*&2&*&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$, $G=\begin{smallmatrix}*&2&*&3&*&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$, $H=\begin{smallmatrix}*&3&*&3&*&*\\&&*&&&\end{smallmatrix}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$, $\overline{E}$, $\overline{F}$, $\overline{G}$, $\overline{H}$,	$AB\le C$, $C\overline{A}\le B$, $C\overline{B}\le A$, $\overline{AB}\le\overline{C}$, $\overline{C}A\le\overline{B}$, $\overline{C}B\le\overline{A}$; $AC\le E$, $E\overline{A}\le C$, $E\overline{C}\le A$, $\overline{AC}\le\overline{E}$, $\overline{E}A\le\overline{C}$, $\overline{E}C\le\overline{A}$; $AD\le F$, $F\overline{A}\le D$, $F\overline{D}\le A$, $\overline{AD}\le\overline{F}$, $\overline{F}A\le\overline{D}$, $\overline{F}D\le\overline{A}$; $AG\le H$, $H\overline{A}\le G$, $H\overline{G}\le A$, $\overline{AG}\le\overline{H}$, $\overline{H}A\le\overline{G}$, $\overline{H}G\le\overline{A}$; $BC\le D$, $D\overline{B}\le C$, $D\overline{C}\le B$, $\overline{BC}\le\overline{D}$, $\overline{D}B\le\overline{C}$, $\overline{D}C\le\overline{B}$; $BE\le F$, $F\overline{B}\le E$, $F\overline{E}\le B$, $\overline{BE}\le\overline{F}$, $\overline{F}B\le\overline{E}$, $\overline{F}E\le\overline{B}$; $BF\le G$, $G\overline{B}\le F$, $G\overline{F}\le B$, $\overline{BF}\le\overline{G}$, $\overline{G}B\le\overline{F}$, $\overline{G}F\le\overline{B}$; $C^2\le F$, $F\overline{C}\le C$, $\overline{C}^2\le\overline{F}$, $\overline{F}C\le\overline{C}$; $CD\le G$, $G\overline{C}\le D$, $G\overline{D}\le C$, $\overline{CD}\le\overline{G}$, $\overline{G}C\le\overline{D}$, $\overline{G}D\le\overline{C}$; $CF\le H$, $H\overline{C}\le F$, $H\overline{F}\le C$, $\overline{CF}\le\overline{H}$, $\overline{H}C\le\overline{F}$, $\overline{H}F\le\overline{C}$; $DE\le H$, $H\overline{D}\le E$, $H\overline{E}\le D$, $\overline{DE}\le\overline{H}$, $\overline{H}D\le\overline{E}$, $\overline{H}E\le\overline{D}$;

Таблица 2 (продолжение). Уровни надгрупп subsystem subgroups в E_7

#	тип Δ	Δ	m	уровень	соотношения
18.	A_2+3A_1	1,2,3,5,7	18	$A=\begin{smallmatrix}* & * & 1 & * & 0 & *\\ & & * & & & \end{smallmatrix}$, $B=\begin{smallmatrix}* & * & 0 & * & 1 & *\\ & & * & & & \end{smallmatrix}$, $C=\begin{smallmatrix}* & * & 1 & * & 1 & *\\ & & * & & & \end{smallmatrix}$, $D=\begin{smallmatrix}* & * & 2 & * & 0 & *\\ & & * & & & \end{smallmatrix}$, $E=\begin{smallmatrix}* & * & 2 & * & 1 & *\\ & & * & & & \end{smallmatrix}$, $F\begin{smallmatrix}* & * & 3 & * & 1 & *\\ & & * & & & \end{smallmatrix}$, $G=\begin{smallmatrix}* & * & 2 & * & 2 & *\\ & & * & & & \end{smallmatrix}$, $H=\begin{smallmatrix}* & * & 3 & * & 2 & *\\ & & * & & & \end{smallmatrix}$, $I=\begin{smallmatrix}* & * & 4 & * & 2 & *\\ & & * & & & \end{smallmatrix}$, $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}, \overline{E}, \overline{F}, \overline{G}, \overline{H}, \overline{I}$	$A^2 \leq D$, $D\overline{A} \leq A$, $\overline{A}^2 \leq \overline{D}$, $\overline{D}A \leq \overline{A}$; $AB \leq C$, $C\overline{A} \leq B$, $C\overline{B} \leq A$, $\overline{AB} \leq \overline{C}$, $\overline{C}A \leq \overline{B}$, $\overline{C}B \leq \overline{A}$; $AC \leq E$, $E\overline{A} \leq C$, $E\overline{C} \leq A$, $\overline{AC} \leq \overline{E}$, $\overline{E}A \leq \overline{C}$, $\overline{E}C \leq \overline{A}$; $AE \leq F$, $F\overline{A} \leq E$, $F\overline{E} \leq A, \overline{AE} \leq \overline{F}, \overline{F}A \leq \overline{E}, \overline{F}E \leq \overline{A}$; $AG \leq H$, $H\overline{A} \leq G$, $H\overline{G} \leq A$, $\overline{AG} \leq \overline{H}$, $\overline{H}A \leq \overline{G}$, $\overline{H}G \leq \overline{A}$; $AH \leq I, I\overline{A} \leq H, I\overline{H} \leq A, \overline{AH} \leq \overline{I}$, $\overline{I}A \leq \overline{H}, \overline{I}H \leq \overline{A}; BD \leq E, E\overline{B} \leq D$, $E\overline{D} \leq B$, $\overline{BD} \leq \overline{E}$, $\overline{E}B \leq \overline{D}$, $\overline{E}D \leq \overline{B}$; $BE \leq G$, $G\overline{B} \leq E$, $G\overline{E} \leq B$, $\overline{BE} \leq \overline{G}$, $\overline{G}B \leq \overline{E}$, $\overline{G}E \leq \overline{B}$; $BF \leq H$, $H\overline{B} \leq F$, $H\overline{F} \leq B$, $\overline{BF} \leq \overline{H}$, $\overline{H}B \leq \overline{F}$, $\overline{H}F \leq \overline{B}; C^2 \leq G, G\overline{C} \leq C, \overline{C}^2 \leq \overline{G}$, $\overline{G}C \leq \overline{C}$; $CD \leq F$, $F\overline{C} \leq D$, $F\overline{D} \leq C$, $\overline{CD} \leq \overline{F}$, $\overline{F}C \leq \overline{D}$, $\overline{F}D \leq \overline{C}$; $CE \leq H$, $H\overline{C} \leq E$, $H\overline{E} \leq C$, $\overline{CE} \leq \overline{H}$, $\overline{H}C \leq \overline{E}$, $\overline{H}E \leq \overline{C}; CF \leq I, I\overline{C} \leq F, I\overline{F} \leq C$, $\overline{CF} \leq \overline{I}, \overline{I}C \leq \overline{F}, \overline{I}F \leq \overline{C}; DG \leq I$, $I\overline{D} \leq G, I\overline{G} \leq D, \overline{DG} \leq \overline{I}, \overline{I}D \leq \overline{G}$, $\overline{I}G \leq \overline{D}; E^2 \leq I, I\overline{E} \leq E, \overline{E}^2 \leq \overline{I}$, $\overline{I}E \leq \overline{E}$;

Таблица 3. Уровни надгрупп subsystem subgroups в E_8

#	тип Δ	Δ	m	уровень	соотношения
1.	$\mathrm{E}_7+\mathrm{A}_1$	1,2,3,4,5,6,7,0	1	$A=\begin{smallmatrix}*&*&*&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&*&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$,	
2.	D_8	2,3,4,5,6,7,8,0	1	$A=\begin{smallmatrix}1&*&*&*&*&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}1&*&*&*&*&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$,	
3.	$\mathrm{E}_6+\mathrm{A}_2$	1,2,3,4,5,6,8,0	2	$A=\begin{smallmatrix}*&*&*&*&*&1&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&*&*&*&2&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $B=\begin{smallmatrix}*&*&*&*&*&2&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&*&*&*&1&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$,	$A^2\le B$, $B^2\le A$;
4.	A_8	1,3,4,5,6,7,8,0	2	$A=\begin{smallmatrix}*&*&*&*&*&*&*\\&&1&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&*&*&*&*&*\\&&2&&&&\end{smallmatrix}$, $B=\begin{smallmatrix}*&*&*&*&*&*&*\\&&2&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&*&*&*&*&*\\&&1&&&&\end{smallmatrix}$,	$A^2\le B$, $B^2\le A$;
5.	$\mathrm{D}_6+2\mathrm{A}_1$	2,3,4,5,6,7,0, $-\begin{smallmatrix}2&3&4&3&2&1&0\\&&2&&&&\end{smallmatrix}$ $=-\alpha_0(\mathrm{D}_8)$	3	$A=\begin{smallmatrix}1&*&*&*&*&*&0\\&&*&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}1&*&*&*&*&*&0\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $B=\begin{smallmatrix}0&*&*&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix}=\begin{smallmatrix}2&*&*&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}0&*&*&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix}=$ $-\begin{smallmatrix}2&*&*&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $C=\begin{smallmatrix}1&*&*&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}1&*&*&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$,	$AB\le C$, $CA\le B$, $CB\le A$;
6.	$\mathrm{A}_7+\mathrm{A}_1$	1,2,4,5,6,7,8,0	3	$A=\begin{smallmatrix}*&1&*&*&*&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&3&*&*&*&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $B=\begin{smallmatrix}*&2&*&*&*&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&2&*&*&*&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $C=\begin{smallmatrix}*&3&*&*&*&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&1&*&*&*&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$,	$A^2\le B$, $BC\le A$, $C^2\le B$, $BA\le C$;
7.	$\mathrm{D}_5+\mathrm{A}_3$	1,2,3,4,5,7,8,0	3	$A=\begin{smallmatrix}*&*&*&*&1&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&*&*&3&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $B=\begin{smallmatrix}*&*&*&*&2&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&*&*&2&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $C=\begin{smallmatrix}*&*&*&*&3&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&*&*&1&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$,	$A^2\le B$, $BC\le A$, $C^2\le B$, $BA\le C$;

Таблица 3 (продолжение). Уровни надгрупп subsystem subgroups в E_8

#	тип Δ	Δ	m	уровень	соотношения
8.	$2D_4$	2,3,4,5,7,8,0, $-\begin{smallmatrix}2&3&4&3&2&1&0\\&&2&&&&\end{smallmatrix}$ $=-\alpha_0(D_8)$	3	$A=\begin{smallmatrix}1&*&*&*&0&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}1&*&*&*&2&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}=\begin{smallmatrix}1&*&*&*&2&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}1&*&*&*&0&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $B=\begin{smallmatrix}0&*&*&*&1&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}=\begin{smallmatrix}2&*&*&*&3&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}0&*&*&*&1&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}2&*&*&*&3&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $C=\begin{smallmatrix}1&*&*&*&1&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}1&*&*&*&3&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}1&*&*&*&1&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}=\begin{smallmatrix}1&*&*&*&3&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$,	$AB\le C$, $CA\le B$, $CB\le A$;
9.	$2A_4$	1,2,3,4,6,7,8,0	4	$A=\begin{smallmatrix}*&*&*&1&*&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&*&4&*&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $B=\begin{smallmatrix}*&*&*&2&*&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&*&3&*&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $C=\begin{smallmatrix}*&*&*&3&*&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&*&2&*&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $D=\begin{smallmatrix}*&*&*&4&*&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&*&1&*&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$,	$A^2\le B$, $BD\le A$, $D^2\le C$, $CA\le D$; $AB\le C$, $CD\le B$, $C^2\le A$, $B^2\le D$;
10.	$A_5+A_2+A_1$	3,4,5,6,8,0, $-\begin{smallmatrix}1&2&3&2&1&0&0\\&&2&&&&\end{smallmatrix}$	5	$A=\begin{smallmatrix}*&*&*&*&*&0&*\\&&1&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&*&*&*&0&*\\&&1&&&&\end{smallmatrix}$, $B=\begin{smallmatrix}*&*&*&*&*&1&*\\&&0&&&&\end{smallmatrix}=\begin{smallmatrix}*&*&*&*&*&1&*\\&&2&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&*&*&*&2&*\\&&1&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&*&*&*&2&*\\&&3&&&&\end{smallmatrix}$, $C=\begin{smallmatrix}*&*&*&*&*&1&*\\&&1&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&*&*&*&2&*\\&&2&&&&\end{smallmatrix}$, $D=\begin{smallmatrix}*&*&*&*&*&2&*\\&&1&&&&\end{smallmatrix}=\begin{smallmatrix}*&*&*&*&*&2&*\\&&3&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&*&*&*&1&*\\&&0&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&*&*&*&1&*\\&&2&&&&\end{smallmatrix}$, $E=\begin{smallmatrix}*&*&*&*&*&2&*\\&&2&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&*&*&*&1&*\\&&1&&&&\end{smallmatrix}$,	$AB\le C$, $CA\le B$, $CD\le A$, $AD\le E$, $EA\le D$, $EB\le A$; $B^2\le E$, $ED\le B$, $D^2\le C$, $CB\le D$; $C^2\le E$, $E^2\le C$;

Таблица 3 (продолжение). Уровни надгрупп subsystem subgroups в E_8

#	тип Δ	Δ	m	уровень	соотношения
11.	D_4+4A_1	2,3,4,5,7,0, $\_\begin{smallmatrix}2&3&4&3&2&1&0\\&&2\end{smallmatrix}$ $=-\alpha_0(D_8)$, $\_\begin{smallmatrix}0&1&2&2&2&1&0\\&&1\end{smallmatrix}$ $=-\alpha_0(D_6)$	7	$A=\begin{smallmatrix}1&*&*&*&0&*&0\\&&*\end{smallmatrix}=\begin{smallmatrix}1&*&*&*&2&*&0\\&&*\end{smallmatrix}=\_\begin{smallmatrix}1&*&*&*&0&*&0\\&&*\end{smallmatrix}=\_\begin{smallmatrix}1&*&*&*&2&*&0\\&&*\end{smallmatrix}$, $B=\begin{smallmatrix}0&*&*&*&1&*&0\\&&*\end{smallmatrix}=\_\begin{smallmatrix}0&*&*&*&1&*&0\\&&*\end{smallmatrix}$, $C=\begin{smallmatrix}1&*&*&*&1&*&0\\&&*\end{smallmatrix}=\_\begin{smallmatrix}1&*&*&*&1&*&0\\&&*\end{smallmatrix}$, $D=\begin{smallmatrix}0&*&*&*&0&*&1\\&&*\end{smallmatrix}=\begin{smallmatrix}2&*&*&*&2&*&1\\&&*\end{smallmatrix}=\begin{smallmatrix}2&*&*&*&4&*&1\\&&*\end{smallmatrix}=\_\begin{smallmatrix}0&*&*&*&0&*&1\\&&*\end{smallmatrix}=\_\begin{smallmatrix}2&*&*&*&2&*&1\\&&*\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}0&*&*&*&2&*&1\\&&*\end{smallmatrix}=\_\begin{smallmatrix}2&*&*&*&4&*&1\\&&*\end{smallmatrix}=\_\begin{smallmatrix}0&*&*&*&2&*&1\\&&*\end{smallmatrix}$, $E=\begin{smallmatrix}1&*&*&*&0&*&1\\&&*\end{smallmatrix}=\begin{smallmatrix}1&*&*&*&2&*&1\\&&*\end{smallmatrix}=\_\begin{smallmatrix}1&*&*&*&2&*&1\\&&*\end{smallmatrix}=\_\begin{smallmatrix}1&*&*&*&0&*&1\\&&*\end{smallmatrix}$, $F=\begin{smallmatrix}0&*&*&*&1&*&1\\&&*\end{smallmatrix}=\begin{smallmatrix}2&*&*&*&3&*&1\\&&*\end{smallmatrix}=\_\begin{smallmatrix}0&*&*&*&1&*&1\\&&*\end{smallmatrix}=\_\begin{smallmatrix}2&*&*&*&3&*&1\\&&*\end{smallmatrix}$, $G=\begin{smallmatrix}1&*&*&*&1&*&1\\&&*\end{smallmatrix}=\begin{smallmatrix}1&*&*&*&3&*&1\\&&*\end{smallmatrix}=\_\begin{smallmatrix}1&*&*&*&1&*&1\\&&*\end{smallmatrix}=\_\begin{smallmatrix}1&*&*&*&3&*&1\\&&*\end{smallmatrix}$,	$AB\le C$, $CA\le B$, $CB\le A$; $AD\le E$, $EA\le D$, $ED\le A$; $AF\le G$, $GA\le F$, $GF\le A$; $BD\le F$, $FB\le D$, $FD\le B$; $BE\le G$, $GB\le E$, $GE\le B$; $CD\le G$, $GC\le D$, $GD\le C$; $CE\le F$, $FC\le E$, $FE\le C$;
12.	$2A_3+2A_1$	1,2,3,5,6,7,0, $\_\begin{smallmatrix}2&3&4&3&2&1&0\\&&2\end{smallmatrix}$ $=-\alpha_0(E_7)$	7	$A=\begin{smallmatrix}*&*&1&*&*&*&0\\&&*\end{smallmatrix}=\_\begin{smallmatrix}*&*&3&*&*&*&0\\&&*\end{smallmatrix}$, $B=\begin{smallmatrix}*&*&2&*&*&*&0\\&&*\end{smallmatrix}=\_\begin{smallmatrix}*&*&2&*&*&*&0\\&&*\end{smallmatrix}$, $C=\begin{smallmatrix}*&*&3&*&*&*&0\\&&*\end{smallmatrix}=\_\begin{smallmatrix}*&*&1&*&*&*&0\\&&*\end{smallmatrix}$, $D=\begin{smallmatrix}*&*&0&*&*&*&1\\&&*\end{smallmatrix}=\begin{smallmatrix}*&*&4&*&*&*&1\\&&*\end{smallmatrix}=\_\begin{smallmatrix}*&*&2&*&*&*&1\\&&*\end{smallmatrix}=\_\begin{smallmatrix}*&*&6&*&*&*&1\\&&*\end{smallmatrix}$, $E=\begin{smallmatrix}*&*&1&*&*&*&1\\&&*\end{smallmatrix}=\begin{smallmatrix}*&*&5&*&*&*&1\\&&*\end{smallmatrix}=\_\begin{smallmatrix}*&*&1&*&*&*&1\\&&*\end{smallmatrix}=\_\begin{smallmatrix}*&*&5&*&*&*&1\\&&*\end{smallmatrix}$, $F=\begin{smallmatrix}*&*&2&*&*&*&1\\&&*\end{smallmatrix}=\begin{smallmatrix}*&*&6&*&*&*&1\\&&*\end{smallmatrix}=\_\begin{smallmatrix}*&*&0&*&*&*&1\\&&*\end{smallmatrix}=\_\begin{smallmatrix}*&*&4&*&*&*&1\\&&*\end{smallmatrix}$, $G=\begin{smallmatrix}*&*&3&*&*&*&1\\&&*\end{smallmatrix}=\_\begin{smallmatrix}*&*&3&*&*&*&1\\&&*\end{smallmatrix}$,	$A^2\le B$, $BC\le A$, $C^2\le B$, $BA\le C$; $AD\le E$, $EC\le D$, $EF\le A$, $CF\le E$, $EA\le F$, $ED\le C$; $AF\le G$, $GC\le F$, $GD\le A$, $CD\le G$, $GA\le D$, $GF\le C$; $BD\le F$, $FB\le D$, $F^2\le B$, $D^2\le B$; $BE\le G$, $GB\le E$, $GE\le B$;

Таблица 3 (продолжение). Уровни надгрупп subsystem subgroups в E_8

#	тип Δ	Δ	m	уровень	соотношения
13.	$4\mathrm{A}_2$	1,2,3,5,6,8,0, $-\alpha_0(\mathrm{E}_6) =$ $\_1\,2\,\underset{2}{3}\,2\,1\,0\,0$	8	$A = **\underset{*}{1}**0* = \_**\underset{*}{2}**0*$, $B = **\underset{*}{2}**0* = \_**\underset{*}{1}**0*$, $C = **\underset{*}{0}**1* = **\underset{*}{3}**1* = \_**\underset{*}{3}**2* =$ $\_**\underset{*}{6}**2*$, $D = **\underset{*}{1}**1* = **\underset{*}{4}**1* =$ $\_**\underset{*}{2}**2* = \_**\underset{*}{5}**2*$, $E = **\underset{*}{2}**1* = \_**\underset{*}{4}**2*$, $F = **\underset{*}{2}**2* = **\underset{*}{5}**2* =$ $\_**\underset{*}{1}**1* = \_**\underset{*}{4}**1*$, $G = **\underset{*}{3}**2* = **\underset{*}{6}**2* =$ $\_**\underset{*}{0}**1* = \_**\underset{*}{3}**1*$, $H = **\underset{*}{4}**2* = \_**\underset{*}{2}**1*$	$A^2 \le B$, $B^2 \le A$; $AC \le D$, $DB \le C$, $DG \le A$, $BG \le F$, $FA \le G$, $FC \le B$; $AD \le E$, $EB \le D$, $EF \le A$, $BF \le H$, $HA \le F$, $HD \le B$; $AE \le C$, $CB \le E$, $CH \le A$, $BH \le G$, $GA \le H$, $GE \le B$; $C^2 \le G$, $G^2 \le C$; $CD \le H$, $HG \le D$, $HF \le C$, $GF \le E$, $EC \le F$, $ED \le G$; $D^2 \le F$, $F^2 \le D$; $E^2 \le H$, $H^2 \le E$;
14.	$8\mathrm{A}_1$	2,3,5,7,0, $-\alpha_0(\mathrm{D}_6) =$ $\_0\,1\,\underset{1}{2}\,2\,2\,1\,0$, $-\alpha_0(\mathrm{E}_7) =$ $\_2\,3\,\underset{2}{4}\,3\,2\,1\,0$, $-\alpha_0(\mathrm{D}_4) =$ $\_0\,1\,\underset{1}{2}\,1\,0\,0\,0$	15	$A = 1*\underset{*}{0}*0*0 = 1*\underset{*}{2}*2*0 =$ $1*\underset{*}{4}*2*0 = 1*\underset{*}{2}*0*0 = \_1*\underset{*}{2}*2*0 =$ $\_1*\underset{*}{0}*0*0 = \_1*\underset{*}{2}*0*0 = \_1*\underset{*}{4}*2*0$, $B = 0*\underset{*}{1}*0*0 = \_0*\underset{*}{1}*0*0$, $C = 1*\underset{*}{1}*0*0 = 1*\underset{*}{3}*2*0 =$ $\_1*\underset{*}{1}*0*0 = \_1*\underset{*}{3}*2*0\ \ldots$	$AB \le C$, $CA \le B$, $CB \le A$; $AE \le F$, $FA \le E$, $FE \le A$; $AH \le M$, $MA \le H$, $MH \le A$; $AI \le L$, $LA \le I$, $LI \le A$; $AJ \le K$, $KA \le J$, $KJ \le A$; $AD \le G$, $GA \le D$, $G\overline{D} \le A$, $A\overline{D} \le G$, $GA \le \overline{D}$, $GD \le A$; $BD \le E$, $EB \le D$, $E\overline{D} \le B$, $B\overline{D} \le E$, $EB \le \overline{D}$, $ED \le B$;…

Таблица 3 (продолжение). Уровни надгрупп subsystem subgroups в E_8

#	тип Δ	Δ	m	уровень	соотношения
				$D = 0*\underset{*}{0}*1*0$, $\overline{D}$, $E = 0*\underset{*}{1}*1*0 =$ $\_0*\underset{*}{1}*1*0$, $F = 1*\underset{*}{1}*1*0 = 1*\underset{*}{3}*1*0 =$ $\_1*\underset{*}{1}*1*0 = \_1*\underset{*}{3}*1*0$, $G = 1*\underset{*}{2}*1*0 = \_1*\underset{*}{2}*1*0$, $H = 0*\underset{*}{0}*0*1 = 2*\underset{*}{4}*2*1 = 2*\underset{*}{6}*4*1 =$ $\_0*\underset{*}{0}*0*1 = \_2*\underset{*}{4}*2*1 = \_2*\underset{*}{6}*4*1$, $I = 0*\underset{*}{0}*1*1 = 2*\underset{*}{4}*3*1 = 2*\underset{*}{6}*3*1 =$ $\_0*\underset{*}{0}*1*1 = \_2*\underset{*}{4}*3*1 = \_2*\underset{*}{6}*3*1$, $J = 0*\underset{*}{1}*1*1 = 2*\underset{*}{5}*3*1 = \_0*\underset{*}{1}*1*1 =$ $\_2*\underset{*}{5}*3*1$, $K = 1*\underset{*}{1}*1*1 = 1*\underset{*}{3}*3*1 =$ $1*\underset{*}{5}*3*1 = \_1*\underset{*}{1}*1*1 = \_1*\underset{*}{3}*3*1 =$ $1*\underset{*}{3}*1*1 = \_1*\underset{*}{5}*3*1 = \_1*\underset{*}{3}*1*1$, $L =$ $1*\underset{*}{2}*1*1 = 1*\underset{*}{4}*3*1 = \_1*\underset{*}{2}*1*1 =$ $\_1*\underset{*}{4}*3*1$, $M = 1*\underset{*}{2}*2*11*\underset{*}{4}*2*1 =$ $\_1*\underset{*}{2}*2*1 = \_1*\underset{*}{4}*2*1$, $N = 1*\underset{*}{3}*2*1 = \_1*\underset{*}{3}*2*1$,	$BF \le G, GB \le F, GF \le B; BI \le J,$ $JB \le I, JI \le B; BK \le L, LB \le K,$ $LK \le B$; $BM \le N$, $NB \le M$, $NM \le B$; $CD \le F$, $FC \le D$, $F\overline{D} \le C$, $C\overline{D} \le F$, $FC \le \overline{D}$, $FD \le C$; $CE \le G$, $GC \le E$, $GE \le C$; $CH \le N$, $NC \le H$, $NH \le C; CI \le K, KC \le I, KI \le C;$ $CJ \le L, LC \le J, LJ \le C; DH \le I,$ $I\overline{D} \le H, IH \le D, \overline{D}H \le I, ID \le H,$ $IH \le \overline{D}$; $DK \le N$, $N\overline{D} \le K$, $NK \le D$, $\overline{D}K \le N$, $ND \le K$, $NK \le \overline{D}$; $DL \le M$, $M\overline{D} \le L$, $ML \le D$, $\overline{D}L \le M$, $MD \le L$, $ML \le \overline{D}$; $EH \le J$, $JE \le H$, $JH \le E$; $EK \le M$, $ME \le K$, $MK \le E$; $EL \le N$, $NE \le L$, $NL \le E$; $FH \le K$, $KF \le H$, $KH \le F; FI \le N, NF \le I, NI \le F;$ $FJ \le M$, $MF \le J$, $MJ \le F$; $GH \le L$, $LG \le H$, $LH \le G$; $GI \le M$, $MG \le I$, $MI \le G$; $GJ \le N, NG \le J, NJ \le G;$

Таблица 3 (продолжение). Уровни надгрупп subsystem subgroups в E_8

#	тип Δ	Δ	m	уровень	соотношения
15.	D_7	2,3,4,5,6,7,8	4	$A = \begin{smallmatrix}1&*&*&*&*&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $B = \begin{smallmatrix}2&*&*&*&*&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$,	$A^2 \le B$, $B\overline{A} \le A$, $\overline{A}^2 \le \overline{B}$, $\overline{B}A \le \overline{A}$;
16.	$E_6 + A_1$	1,2,3,4,5,6,8	6	$A = \begin{smallmatrix}*&*&*&*&*&1&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $B = \begin{smallmatrix}*&*&*&*&*&2&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $C = \begin{smallmatrix}*&*&*&*&*&3&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$,	$A^2 \le B$, $B\overline{A} \le A$, $\overline{A}^2 \le \overline{B}$, $\overline{B}A \le \overline{A}$; $AB \le C$, $C\overline{A} \le B$, $C\overline{B} \le A$, $\overline{AB} \le \overline{C}$, $\overline{C}A \le \overline{B}$, $\overline{C}B \le \overline{A}$;
17.	A_7'	1,3,4,5,6,7,8	6	$A = \begin{smallmatrix}*&*&*&*&*&*&*\\&&1&&&&\end{smallmatrix}$, $B = \begin{smallmatrix}*&*&*&*&*&*&*\\&&2&&&&\end{smallmatrix}$, $C = \begin{smallmatrix}*&*&*&*&*&*&*\\&&3&&&&\end{smallmatrix}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$,	$A^2 \le B$, $B\overline{A} \le A$, $\overline{A}^2 \le \overline{B}$, $\overline{B}A \le \overline{A}$; $AB \le C$, $C\overline{A} \le B$, $C\overline{B} \le A$, $\overline{AB} \le \overline{C}$, $\overline{C}A \le \overline{B}$, $\overline{C}B \le \overline{A}$;
18.	$D_5 + A_2$	1,2,3,4,5,7,8	8	$A = \begin{smallmatrix}*&*&*&*&1&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $B = \begin{smallmatrix}*&*&*&*&2&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $C = \begin{smallmatrix}*&*&*&*&3&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $D = \begin{smallmatrix}*&*&*&*&4&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$,	$A^2 \le B$, $B\overline{A} \le A$, $\overline{A}^2 \le \overline{B}$, $\overline{B}A \le \overline{A}$; $AB \le C$, $C\overline{A} \le B$, $C\overline{B} \le A$, $\overline{AB} \le \overline{C}$, $\overline{C}A \le \overline{B}$, $\overline{C}B \le \overline{A}$; $AC \le D$, $D\overline{A} \le C$, $D\overline{C} \le A$, $\overline{AC} \le \overline{D}$, $\overline{D}A \le \overline{C}$, $\overline{D}C \le \overline{A}$; $B^2 \le D$, $D\overline{B} \le B$, $\overline{B}^2 \le \overline{D}$, $\overline{D}B \le \overline{B}$;
19.	$A_6 + A_1$	1,2,4,5,6,7,8	8	$A = \begin{smallmatrix}*&1&*&*&*&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $B = \begin{smallmatrix}*&2&*&*&*&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $C = \begin{smallmatrix}*&3&*&*&*&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $D = \begin{smallmatrix}*&4&*&*&*&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$,	$A^2 \le B$, $B\overline{A} \le A$, $\overline{A}^2 \le \overline{B}$, $\overline{B}A \le \overline{A}$; $AB \le C$, $C\overline{A} \le B$, $C\overline{B} \le A$, $\overline{AB} \le \overline{C}$, $\overline{C}A \le \overline{B}$, $\overline{C}B \le \overline{A}$; $AC \le D$, $D\overline{A} \le C$, $D\overline{C} \le A$, $\overline{AC} \le \overline{D}$, $\overline{D}A \le \overline{C}$, $\overline{D}C \le \overline{A}$; $B^2 \le D$, $D\overline{B} \le B$, $\overline{B}^2 \le \overline{D}$, $\overline{D}B \le \overline{B}$;
20.	$D_5 + 2A_1$	1,2,3,4,5,7,0	9	$A = \begin{smallmatrix}*&*&*&*&1&*&0\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $B = \begin{smallmatrix}*&*&*&*&2&*&0\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $C = \begin{smallmatrix}*&*&*&*&0&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix}*&*&*&*&4&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $D = \begin{smallmatrix}*&*&*&*&1&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix}*&*&*&*&3&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $E = \begin{smallmatrix}*&*&*&*&2&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix}*&*&*&*&2&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $F = \begin{smallmatrix}*&*&*&*&3&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix}*&*&*&*&1&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $G = \begin{smallmatrix}*&*&*&*&4&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix}*&*&*&*&0&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$	$A^2 \le B$, $B\overline{A} \le A$, $\overline{A}^2 \le \overline{B}$, $\overline{B}A \le \overline{A}$; $AC \le D$, $D\overline{A} \le C$, $DG \le A$, $\overline{A}G \le F$, $FA \le G$, $FC \le \overline{A}$; $AD \le E$, $E\overline{A} \le D$, $EF \le A$, $\overline{A}F \le E$, $EA \le F$, $ED \le \overline{A}$; $BC \le E$, $E\overline{B} \le C$, $EG \le B$, $\overline{B}G \le E$, $EB \le G$, $EC \le \overline{B}$; $BD \le F$, $F\overline{B} \le D$, $F^2 \le B$, $D^2 \le \overline{B}$;

Таблица 3 (продолжение). Уровни надгрупп subsystem subgroups в E_8

#	тип Δ	Δ	m	уровень	соотношения
21.	$D_4 + A_3$	2,3,4,5,7,8,0	9	$A = \begin{smallmatrix}1&*&*&*&0&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $\overline{A}$, $B = \begin{smallmatrix}0&*&*&*&1&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix}2&*&*&*&3&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $C = \begin{smallmatrix}1&*&*&*&1&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix}1&*&*&*&3&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $D = \begin{smallmatrix}0&*&*&*&2&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix}2&*&*&*&2&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $E = \begin{smallmatrix}1&*&*&*&2&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix}1&*&*&*&2&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $F = \begin{smallmatrix}2&*&*&*&2&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix}0&*&*&*&2&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $G = \begin{smallmatrix}1&*&*&*&3&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix}1&*&*&*&1&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $H = \begin{smallmatrix}2&*&*&*&3&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix}0&*&*&*&1&*&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$,	$AB \le C$, $C\overline{A} \le B$, $CH \le A$, $\overline{A}H \le G$, $GA \le H$, $GB \le \overline{A}$; $AD \le E$, $E\overline{A} \le D$, $EF \le A$, $\overline{A}F \le E$, $EA \le F$, $ED \le \overline{A}$; $B^2 \le D$, $DH \le B$, $H^2 \le F$, $FB \le H$; $BC \le E$, $EH \le C$, $EG \le B$, $HG \le E$, $EB \le G$, $EC \le H$; $C^2 \le F$, $FG \le C$, $G^2 \le D$, $DC \le G$;
22.	$A_5 + 2A_1$	1,2,4,5,6,7,0	11	$A = \begin{smallmatrix}*&1&*&*&*&*&0\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $B = \begin{smallmatrix}*&2&*&*&*&*&0\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $C = \begin{smallmatrix}*&3&*&*&*&*&0\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $D = \begin{smallmatrix}*&0&*&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix}*&4&*&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $E = \begin{smallmatrix}*&1&*&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix}*&3&*&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $F = \begin{smallmatrix}*&2&*&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix}*&2&*&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $G = \begin{smallmatrix}*&3&*&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix}*&1&*&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $H = \begin{smallmatrix}*&4&*&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix}*&0&*&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$,	$A^2 \le B$, $B\overline{A} \le A$, $\overline{A}^2 \le \overline{B}$, $\overline{B}A \le \overline{A}$; $AB \le C$, $C\overline{A} \le B$, $C\overline{B} \le A$, $\overline{AB} \le \overline{C}$, $\overline{C}A \le \overline{B}$, $\overline{C}B \le \overline{A}$; $AD \le E$, $E\overline{A} \le D$, $EH \le A$, $\overline{A}H \le G$, $GA \le H$, $GD \le \overline{A}$; $AE \le F$, $F\overline{A} \le E$, $FG \le A$, $\overline{A}G \le F$, $FA \le G$, $FE \le \overline{A}$; $BD \le F$, $F\overline{B} \le D$, $FH \le B$, $\overline{B}H \le F$, $FB \le H$, $FD \le \overline{B}$; $BE \le G$, $G\overline{B} \le E$, $G^2 \le B$, $E^2 \le \overline{B}$; $CD \le G$, $G\overline{C} \le D$, $GH \le C$, $\overline{C}H \le E$, $EC \le H$, $ED \le \overline{C}$;

Таблица 3 (продолжение). Уровни надгрупп subsystem subgroups в E_8

#	тип Δ	Δ	m	уровень	соотношения
23.	$A_4 + A_3$	1,2,3,4,6,7,8	10	$A = {*}{*}\underset{*}{*}1{*}{*}{*}$, $B = {*}{*}\underset{*}{*}2{*}{*}{*}$, $C = {*}{*}\underset{*}{*}3{*}{*}{*}$, $D = {*}{*}\underset{*}{*}4{*}{*}{*}$, $E = {*}{*}\underset{*}{*}5{*}{*}{*}$, $\overline{A} = -{*}{*}\underset{*}{*}1{*}{*}{*}$, $\overline{B} = -{*}{*}\underset{*}{*}2{*}{*}{*}$, $\overline{C} = -{*}{*}\underset{*}{*}3{*}{*}{*}$, $\overline{D} = -{*}{*}\underset{*}{*}4{*}{*}{*}$, $\overline{E} = -{*}{*}\underset{*}{*}5{*}{*}{*}$,	$A^2 \le B, B\overline{A} \le A, \overline{A}^2 \le \overline{B}, \overline{B}A \le \overline{A}$; $AB \le C$, $C\overline{A} \le B$, $C\overline{B} \le A$, $\overline{AB} \le \overline{C}$, $\overline{C}A \le \overline{B}$, $\overline{C}B \le \overline{A}$; $AC \le D$, $D\overline{A} \le C$, $D\overline{C} \le A$, $\overline{AC} \le \overline{D}$, $\overline{D}A \le \overline{C}$, $\overline{D}C \le \overline{A}$; $AD \le E$, $E\overline{A} \le D$, $E\overline{D} \le A$, $\overline{AD} \le \overline{E}$, $\overline{E}A \le \overline{D}$, $\overline{E}D \le \overline{A}$; $B^2 \le D, D\overline{B} \le B, \overline{B}^2 \le \overline{D}, \overline{D}B \le \overline{B}$; $BC \le E$, $E\overline{B} \le C$, $E\overline{C} \le B$, $\overline{BC} \le \overline{E}$, $\overline{E}B \le \overline{C}$, $\overline{E}C \le \overline{B}$;
24.	$A_4 + A_2 + A_1$	1,2,3,4,6,7,0	12	$A = {*}{*}\underset{*}{*}1{*}{*}0$, $B = {*}{*}\underset{*}{*}2{*}{*}0$, $C = {*}{*}\underset{*}{*}3{*}{*}0$, $D = {*}{*}\underset{*}{*}0{*}{*}1 = -{*}{*}\underset{*}{*}5{*}{*}1$, $E =$ ${*}{*}\underset{*}{*}1{*}{*}1 = -{*}{*}\underset{*}{*}4{*}{*}1$, $F = {*}{*}\underset{*}{*}2{*}{*}1 = -{*}{*}\underset{*}{*}3{*}{*}1$, $G = {*}{*}\underset{*}{*}3{*}{*}1 = -{*}{*}\underset{*}{*}2{*}{*}1$, $H = {*}{*}\underset{*}{*}4{*}{*}1 = -{*}{*}\underset{*}{*}1{*}{*}1$, $I = {*}{*}\underset{*}{*}5{*}{*}1 = -{*}{*}\underset{*}{*}0{*}{*}1$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$,	$A^2 \le B, B\overline{A} \le A, \overline{A}^2 \le \overline{B}, \overline{B}A \le \overline{A}$; $AB \le C$, $C\overline{A} \le B$, $C\overline{B} \le A$, $\overline{AB} \le \overline{C}$, $\overline{C}A \le \overline{B}$, $\overline{C}B \le \overline{A}$; $AD \le E$, $E\overline{A} \le D$, $EI \le A$, $\overline{A}I \le H$, $HA \le I$, $HD \le \overline{A}$; $AE \le F$, $F\overline{A} \le E$, $FH \le A$, $\overline{A}H \le G$, $GA \le H$, $GE \le \overline{A}$; $AF \le G, G\overline{A} \le F, G^2 \le A, F^2 \le \overline{A}$; $BD \le F, F\overline{B} \le D, FI \le B, \overline{B}I \le G$, $GB \le I, GD \le \overline{B}; BE \le G, G\overline{B} \le E$, $GH \le B$, $\overline{B}H \le F$, $FB \le H$, $FE \le \overline{B}; CD \le G, G\overline{C} \le D, GI \le C$, $\overline{C}I \le F, FC \le I, FD \le \overline{C}; CE \le H$, $H\overline{C} \le E, H^2 \le C, E^2 \le \overline{C}$;

Таблица 3 (продолжение). Уровни надгрупп subsystem subgroups в E_8

#	тип Δ	Δ	m	уровень	соотношения
25.	$A_3+A_2+2A_1$	1,2,3,5,7,8,0	15	$A = **\underset{*}{1}*0**$, $B = **\underset{*}{2}*0**$, $C = **\underset{*}{0}*1** = -**\underset{*}{6}*3**$, $D = **\underset{*}{1}*1** = -**\underset{*}{5}*3**$, $E = **\underset{*}{2}*1** = -**\underset{*}{4}*3**$, $F = **\underset{*}{3}*1** = -**\underset{*}{3}*3**$, $G = **\underset{*}{2}*2** = -**\underset{*}{4}*2**$, $H = **\underset{*}{3}*2** = -**\underset{*}{3}*2**$, $I = **\underset{*}{4}*2** = -**\underset{*}{2}*2**$, $J = **\underset{*}{3}*3** = -**\underset{*}{3}*1**$, $K = **\underset{*}{4}*3** = -**\underset{*}{2}*1**$, $L = **\underset{*}{5}*3** = -**\underset{*}{1}*1**$, $M = **\underset{*}{6}*3** = -**\underset{*}{0}*1**$, $\overline{A}$, $\overline{B}$,	$A^2 \le B, B\overline{A} \le A, \overline{A}^2 \le \overline{B}, \overline{B}A \le \overline{A}$; $AC \le D, D\overline{A} \le C, DM \le A, \overline{A}M \le L, LA \le M, LC \le \overline{A}$; $AD \le E, E\overline{A} \le D, EL \le A, \overline{A}L \le K, KA \le L, KD \le \overline{A}$; $AE \le F, F\overline{A} \le E, FK \le A, \overline{A}K \le J, JA \le K, JE \le \overline{A}$; $AG \le H, H\overline{A} \le G, HI \le A, \overline{A}I \le H, HA \le I, HG \le \overline{A}$; $BC \le E, E\overline{B} \le C, EM \le B, \overline{B}M \le K, KB \le M, KC \le \overline{B}$; $BD \le F, F\overline{B} \le D, FL \le B, \overline{B}L \le J, JB \le L, JD \le \overline{B}$; $BG \le I, I\overline{B} \le G, I^2 \le B, G^2 \le \overline{B}$; $CE \le G, GM \le E, GK \le C, MK \le I, IC \le K, IE \le M$; $CF \le H, HM \le F, HJ \le C, MJ \le H, HC \le J, HF \le M$; $D^2 \le G, GL \le D, L^2 \le I, ID \le L$; $DE \le H, HL \le E, HK \le D, LK \le H, HD \le K, HE \le L$; $DF \le I, IL \le F, IJ \le D, LJ \le G, GD \le J, GF \le L$; $E^2 \le I, IK \le E, K^2 \le G, GE \le K$;

Таблица 3 (продолжение). Уровни надгрупп subsystem subgroups в E_8

#	тип Δ	Δ	m	уровень	соотношения
26.	A_3+4A_1	2,3,5,6,7,0, $-\alpha_0(E_7)$ = $-\begin{smallmatrix}2&3&4&3&2&1&0\\&&2&&&&\end{smallmatrix}$	17	$A = \begin{smallmatrix}1&*&0&*&*&*&0\\&&*&&&&\end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix}1&*&4&*&*&*&0\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $B = \begin{smallmatrix}0&*&1&*&*&*&0\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $C = \begin{smallmatrix}0&*&2&*&*&*&0\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $D = \begin{smallmatrix}1&*&1&*&*&*&0\\&&*&&&&\end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix}1&*&3&*&*&*&0\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $E = \begin{smallmatrix}1&*&2&*&*&*&0\\&&*&&&&\end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix}1&*&2&*&*&*&0\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $F = \begin{smallmatrix}1&*&3&*&*&*&0\\&&*&&&&\end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix}1&*&1&*&*&*&0\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $G = \begin{smallmatrix}1&*&4&*&*&*&0\\&&*&&&&\end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix}1&*&0&*&*&*&0\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $H = \begin{smallmatrix}0&*&0&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix}2&*&4&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix} =$ $-\begin{smallmatrix}0&*&2&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix}2&*&6&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $I = \begin{smallmatrix}0&*&1&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix}2&*&5&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix} =$ $-\begin{smallmatrix}0&*&1&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix}2&*&5&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $J = \begin{smallmatrix}0&*&2&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix}2&*&6&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix} =$ $-\begin{smallmatrix}0&*&0&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix}2&*&4&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $K = \begin{smallmatrix}1&*&1&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix}1&*&5&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $L = \begin{smallmatrix}1&*&2&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix}1&*&4&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $M = \begin{smallmatrix}1&*&3&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix}1&*&3&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $N = \begin{smallmatrix}1&*&4&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix}1&*&2&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $O = \begin{smallmatrix}1&*&5&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix} = -\begin{smallmatrix}1&*&1&*&*&*&1\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$,	$AB \le D$, $DG \le B$, $D\overline{B} \le A$, $G\overline{B} \le F$, $FA \le \overline{B}$, $FB \le G$; $AC \le E$, $EG \le C$, $E\overline{C} \le A$, $G\overline{C} \le E, EA \le \overline{C}, EC \le G; AI \le K$, $KG \le I, KI \le A, GI \le O, OA \le I$, $OI \le G; AJ \le L, LG \le J, LH \le A$, $GH \le N$, $NA \le H$, $NJ \le G$; $B^2 \le C, C\overline{B} \le B, \overline{B}^2 \le \overline{C}, \overline{C}B \le \overline{B}$; $BD \le E$, $E\overline{B} \le D$, $EF \le B$, $\overline{B}F \le E$, $EB \le F$, $ED \le \overline{B}$; $BH \le I, I\overline{B} \le H, IJ \le B, \overline{B}J \le I$, $IB \le J, IH \le \overline{B}; BK \le L, L\overline{B} \le K$, $LO \le B$, $\overline{B}O \le N$, $NB \le O$, $NK \le \overline{B}$; $BL \le M$, $M\overline{B} \le L$, $MN \le B$, $\overline{B}N \le M$, $MB \le N$, $ML \le \overline{B}$; $CD \le F$, $F\overline{C} \le D$, $F^2 \le C, D^2 \le \overline{C}; CH \le J, J\overline{C} \le H$, $J^2 \le C$, $H^2 \le \overline{C}$; $CK \le M$, $M\overline{C} \le K$, $MO \le C$, $\overline{C}O \le M$, $MC \le O$, $MK \le \overline{C}$; $CL \le N$, $N\overline{C} \le L, N^2 \le C, L^2 \le \overline{C}; DH \le K$, $KF \le H$, $KJ \le D$, $FJ \le O$, $OD \le J, OH \le F; DI \le L, LF \le I$, $LI \le D, FI \le N, ND \le I, NI \le F$; $DJ \le M$, $MF \le J$, $MH \le D$, $FH \le M$, $MD \le H$, $MJ \le F$; $EH \le L, LE \le H, LJ \le E, EJ \le N$, $NE \le J$, $NH \le E$; $EI \le M$, $ME \le I, MI \le E$;

Таблица 3 (продолжение). Уровни надгрупп subsystem subgroups в E_8

#	тип Δ	Δ	m	уровень	соотношения
27.	$3A_2+A_1$	1,2,3,5,6,8,0	16	$A=\begin{smallmatrix}*&*&1&*&*&0&*\\&&*\end{smallmatrix}$, $B=\begin{smallmatrix}*&*&2&*&*&0&*\\&&*\end{smallmatrix}$, $C=\begin{smallmatrix}*&*&3&*&*&0&*\\&&*\end{smallmatrix}$, $D=\begin{smallmatrix}*&*&0&*&*&1&*\\&&*\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&6&*&*&2&*\\&&*\end{smallmatrix}$, $E=\begin{smallmatrix}*&*&1&*&*&1&*\\&&*\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&5&*&*&2&*\\&&*\end{smallmatrix}$, $F=\begin{smallmatrix}*&*&2&*&*&1&*\\&&*\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&4&*&*&2&*\\&&*\end{smallmatrix}$, $G=\begin{smallmatrix}*&*&3&*&*&1&*\\&&*\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&3&*&*&2&*\\&&*\end{smallmatrix}$, $H=\begin{smallmatrix}*&*&4&*&*&1&*\\&&*\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&2&*&*&2&*\\&&*\end{smallmatrix}$, $I=\begin{smallmatrix}*&*&2&*&*&2&*\\&&*\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&4&*&*&1&*\\&&*\end{smallmatrix}$, $J=\begin{smallmatrix}*&*&3&*&*&2&*\\&&*\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&3&*&*&1&*\\&&*\end{smallmatrix}$, $K=\begin{smallmatrix}*&*&4&*&*&2&*\\&&*\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&2&*&*&1&*\\&&*\end{smallmatrix}$, $L=\begin{smallmatrix}*&*&5&*&*&2&*\\&&*\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&1&*&*&1&*\\&&*\end{smallmatrix}$, $M=\begin{smallmatrix}*&*&6&*&*&2&*\\&&*\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}*&*&0&*&*&1&*\\&&*\end{smallmatrix}$, $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$,	$A^2\le B, B\overline{A}\le A, \overline{A}^2\le \overline{B}, \overline{B}A\le \overline{A}$; $AB\le C,\ C\overline{A}\le B,\ C\overline{B}\le A$, $\overline{AB}\le \overline{C},\ \overline{C}A\le \overline{B},\ \overline{C}B\le \overline{A}$; $AD\le E,\ E\overline{A}\le D,\ EM\le A$, $\overline{A}M\le L,\ LA\le M,\ LD\le \overline{A}$; $AE\le F, F\overline{A}\le E, FL\le A, \overline{A}L\le K$, $KA\le L,\ KE\le \overline{A}$; $AF\le G$, $G\overline{A}\le F,\ GK\le A,\ \overline{A}K\le J$, $JA\le K,\ JF\le \overline{A}$; $AG\le H$, $H\overline{A}\le G,\ HJ\le A,\ \overline{A}J\le I$, $IA\le J, IG\le \overline{A}$; $BD\le F, F\overline{B}\le D$, $FM\le B,\ \overline{B}M\le K,\ KB\le M$, $KD\le \overline{B}$; $BE\le G,\ G\overline{B}\le E$, $GL\le B, \overline{B}L\le J, JB\le L, JE\le \overline{B}$; $BF\le H,\ H\overline{B}\le F,\ HK\le B$, $\overline{B}K\le I, IB\le K, IF\le \overline{B}$; $CD\le G$, $G\overline{C}\le D,\ GM\le C,\ \overline{C}M\le J$, $JC\le M,\ JD\le \overline{C}$; $CE\le H$, $H\overline{C}\le E, HL\le C, \overline{C}L\le I, IC\le L$, $IE\le \overline{C}$; $DF\le I, IM\le F, IK\le D$, $MK\le H,\ HD\le K,\ HF\le M$; $DG\le J, JM\le G, J^2\le D, G^2\le M$; $E^2\le I, IL\le E, L^2\le H, HE\le L$; $EF\le J, JL\le F, JK\le E, LK\le G$, $GE\le K, GF\le L$; $F^2\le K, K^2\le F$;

Таблица 3 (продолжение). Уровни надгрупп subsystem subgroups в E_8

#	тип Δ	Δ	m	уровень	соотношения
28.	D_4+A_2	2,3,4,5,7,8	18	$A = 1*\underset{*}{*}*0**$, $B = 0*\underset{*}{*}*1**$, $C = 1*\underset{*}{*}*1**$, $D = 0*\underset{*}{*}*2**$, $E = 1*\underset{*}{*}*2**$, $F = 2*\underset{*}{*}*2**$, $G = 1*\underset{*}{*}*3**$, $H = 2*\underset{*}{*}*3**$, $I = 2*\underset{*}{*}*4**$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$, $\overline{E}$, $\overline{F}$, $\overline{G}$, $\overline{H}$, $\overline{I}$.	$AB \le C$, $C\overline{A} \le B$, $C\overline{B} \le A$, $\overline{AB} \le \overline{C}$, $\overline{C}A \le \overline{B}$, $\overline{C}B \le \overline{A}$; $AD \le E$, $E\overline{A} \le D$, $E\overline{D} \le A$, $\overline{AD} \le \overline{E}$, $\overline{E}A \le \overline{D}$, $\overline{E}D \le \overline{A}$; $AE \le F$, $F\overline{A} \le E$, $F\overline{E} \le A$, $\overline{AE} \le \overline{F}$, $\overline{F}A \le \overline{E}$, $\overline{F}E \le \overline{A}$; $AG \le H$, $H\overline{A} \le G$, $H\overline{G} \le A$, $\overline{AG} \le \overline{H}$, $\overline{H}A \le \overline{G}$, $\overline{H}G \le \overline{A}$; $B^2 \le D$, $D\overline{B} \le B$, $\overline{B}^2 \le \overline{D}$, $\overline{D}B \le \overline{B}$; $BC \le E$, $E\overline{B} \le C$, $E\overline{C} \le B$, $\overline{BC} \le \overline{E}$, $\overline{E}B \le \overline{C}$, $\overline{E}C \le \overline{B}$; $BE \le G$, $G\overline{B} \le E$, $G\overline{E} \le B$, $\overline{BE} \le \overline{G}$, $\overline{G}B \le \overline{E}$, $\overline{G}E \le \overline{B}$; $BF \le H$, $H\overline{B} \le F$, $H\overline{F} \le B$, $\overline{BF} \le \overline{H}$, $\overline{H}B \le \overline{F}$, $\overline{H}F \le \overline{B}$; $BH \le I$, $I\overline{B} \le H$, $I\overline{H} \le B$, $\overline{BH} \le \overline{I}$, $\overline{I}B \le \overline{H}$, $\overline{I}H \le \overline{B}$; $C^2 \le F$, $F\overline{C} \le C$, $\overline{C}^2 \le \overline{F}$, $\overline{F}C \le \overline{C}$; $CD \le G$, $G\overline{C} \le D$, $G\overline{D} \le C$, $\overline{CD} \le \overline{G}$, $\overline{G}C \le \overline{D}$, $\overline{G}D \le \overline{C}$; $CE \le H$, $H\overline{C} \le E$, $H\overline{E} \le C$, $\overline{CE} \le \overline{H}$, $\overline{H}C \le \overline{E}$, $\overline{H}E \le \overline{C}$; $CG \le I$, $I\overline{C} \le G$, $I\overline{G} \le C$, $\overline{CG} \le \overline{I}$, $\overline{I}C \le \overline{G}$, $\overline{I}G \le \overline{C}$; $DF \le I$, $I\overline{D} \le F$, $I\overline{F} \le D$, $\overline{DF} \le \overline{I}$, $\overline{I}D \le \overline{F}$, $\overline{I}F \le \overline{D}$; $E^2 \le I$, $I\overline{E} \le E$, $\overline{E}^2 \le \overline{I}$, $\overline{I}E \le \overline{E}$;
29.	A_4+2A_1	1,2,3,4,6,8	22	$A = **\underset{*}{*}1*0*$, $B = **\underset{*}{*}2*0*$, $C = **\underset{*}{*}0*1*$, $D = **\underset{*}{*}1*1*$, $E = **\underset{*}{*}2*1*$, $F = **\underset{*}{*}3*1*$, $G = **\underset{*}{*}2*2*$, $H = **\underset{*}{*}3*2*$, …	$A^2 \le B$, $B\overline{A} \le A$, $\overline{A}^2 \le \overline{B}$, $\overline{B}A \le \overline{A}$; $AC \le D$, $D\overline{A} \le C$, $D\overline{C} \le A$, $\overline{AC} \le \overline{D}$, $\overline{D}A \le \overline{C}$, $\overline{D}C \le \overline{A}$; $AD \le E$, $E\overline{A} \le D$, $E\overline{D} \le A$, $\overline{AD} \le \overline{E}$, $\overline{E}A \le \overline{D}$, $\overline{E}D \le \overline{A}$; $AE \le F$, $F\overline{A} \le E$, $F\overline{E} \le A$, $\overline{AE} \le \overline{F}$, $\overline{F}A \le \overline{E}$, $\overline{F}E \le \overline{A}$; $AG \le H$, $H\overline{A} \le G$, $H\overline{G} \le A$, $\overline{AG} \le \overline{H}$, $\overline{H}A \le \overline{G}$, $\overline{H}G \le \overline{A}$; $AH \le I$, $I\overline{A} \le H$, $I\overline{H} \le A$, $\overline{AH} \le \overline{I}$, $\overline{I}A \le \overline{H}$, $\overline{I}H \le \overline{A}$; $AI \le J$, $J\overline{A} \le I$, $J\overline{I} \le A$, $\overline{AI} \le \overline{J}$, $\overline{J}A \le \overline{I}$, $\overline{J}I \le \overline{A}$; $BC \le E$, $E\overline{B} \le C$, $E\overline{C} \le B$, $\overline{BC} \le \overline{E}$, $\overline{E}B \le \overline{C}$, $\overline{E}C \le \overline{B}$; $BD \le F$, $F\overline{B} \le D$, $F\overline{D} \le B$, $\overline{BD} \le \overline{F}$, $\overline{F}B \le \overline{D}$, $\overline{F}D \le \overline{B}$; $BG \le I$, $I\overline{B} \le G$, $I\overline{G} \le B$, $\overline{BG} \le \overline{I}$, $\overline{I}B \le \overline{G}$, $\overline{I}G \le \overline{B}$; $BH \le J$, $J\overline{B} \le H$, $J\overline{H} \le B$, $\overline{BH} \le \overline{J}$, $\overline{J}B \le \overline{H}$, $\overline{J}H \le \overline{B}$; $CE \le G$, $G\overline{C} \le E$, $G\overline{E} \le C$, $\overline{CE} \le \overline{G}$, …

Таблица 3 (продолжение). Уровни надгрупп subsystem subgroups в E_8

#	тип Δ	Δ	m	уровень	соотношения
				$I = \begin{smallmatrix}*&*&*&4&*&2&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $J = \begin{smallmatrix}*&*&*&5&*&2&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $K = \begin{smallmatrix}*&*&*&5&*&3&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$, $\overline{E}*$, $\overline{F}*$, $\overline{G}$, $\overline{H}$, $\overline{I}$, $\overline{J}$, $\overline{K}$	$\overline{G}C \le \overline{E}$, $\overline{G}E \le \overline{C}$; $CF \le H$, $H\overline{C} \le F$, $H\overline{F} \le C$, $\overline{CF} \le \overline{H}$, $\overline{HC} \le \overline{F}$, $\overline{HF} \le \overline{C}$; $CJ \le K$, $K\overline{C} \le J$, $K\overline{J} \le C$, $\overline{CJ} \le \overline{K}$, $\overline{K}C \le \overline{J}$, $\overline{KJ} \le \overline{C}$; $D^2 \le G$, $G\overline{D} \le D$, $\overline{D}^2 \le \overline{G}$, $\overline{GD} \le \overline{D}$; $DE \le H$, $H\overline{D} \le E$, $H\overline{E} \le D$, $\overline{DE} \le \overline{H}$, $\overline{HD} \le \overline{E}$, $\overline{HE} \le \overline{D}$; $DF \le I$, $I\overline{D} \le F$, $I\overline{F} \le D$, $\overline{DF} \le \overline{I}$, $\overline{I}D \le \overline{F}$, $\overline{I}F \le \overline{D}$; $DI \le K$, $K\overline{D} \le I$, $K\overline{I} \le D$, $\overline{DI} \le \overline{K}$, $\overline{KD} \le \overline{I}$, $\overline{KI} \le \overline{D}$; $E^2 \le I$, $I\overline{E} \le E$, $\overline{E}^2 \le \overline{I}$, $\overline{I}E \le \overline{E}$; $EF \le J$, $J\overline{E} \le F$, $J\overline{F} \le E$, $\overline{EF} \le \overline{J}$, $\overline{J}E \le \overline{F}$, $\overline{J}F \le \overline{E}$; $EH \le K$, $K\overline{E} \le H$, $K\overline{H} \le E$, $\overline{EH} \le \overline{K}$, $\overline{KE} \le \overline{H}$, $\overline{K}H \le \overline{E}$; $FG \le K$, $K\overline{F} \le G$, $K\overline{G} \le F$, $\overline{FG} \le \overline{K}$, $\overline{K}F \le \overline{G}$, $\overline{K}G \le \overline{F}$;
30.	$(2A_3)'$	3,4,5,7,8,0	20	$A = \begin{smallmatrix}1&*&*&*&0&*&*\\&&0&&&&\end{smallmatrix}$, $B = \begin{smallmatrix}0&*&*&*&0&*&*\\&&1&&&&\end{smallmatrix}$, $C = \begin{smallmatrix}1&*&*&*&0&*&*\\&&1&&&&\end{smallmatrix}$, $D = \begin{smallmatrix}0&*&*&*&1&*&*\\&&0&&&&\end{smallmatrix}$ = $\_\begin{smallmatrix}2&*&*&*&3&*&*\\&&3&&&&\end{smallmatrix}$, $E = \begin{smallmatrix}1&*&*&*&1&*&*\\&&0&&&&\end{smallmatrix}$ = $\_\begin{smallmatrix}1&*&*&*&3&*&*\\&&3&&&&\end{smallmatrix}$, $F = \begin{smallmatrix}0&*&*&*&1&*&*\\&&1&&&&\end{smallmatrix}$ = $\_\begin{smallmatrix}2&*&*&*&3&*&*\\&&2&&&&\end{smallmatrix}$, $G = \begin{smallmatrix}1&*&*&*&1&*&*\\&&1&&&&\end{smallmatrix}$ = $\_\begin{smallmatrix}1&*&*&*&3&*&*\\&&2&&&&\end{smallmatrix}$, $H = \begin{smallmatrix}0&*&*&*&2&*&*\\&&1&&&&\end{smallmatrix}$ = $\_\begin{smallmatrix}2&*&*&*&2&*&*\\&&2&&&&\end{smallmatrix}$, $I = \begin{smallmatrix}1&*&*&*&2&*&*\\&&1&&&&\end{smallmatrix}$ = $\_\begin{smallmatrix}1&*&*&*&2&*&*\\&&2&&&&\end{smallmatrix}$, …	$AB \le C$, $C\overline{A} \le B$, $C\overline{B} \le A$, $\overline{AB} \le \overline{C}$, $\overline{C}A \le \overline{B}$, $\overline{C}B \le \overline{A}$; $AD \le E$, $E\overline{A} \le D$, $EP \le A$, $\overline{A}P \le O$, $OA \le P$, $OD \le \overline{A}$; $AF \le G$, $G\overline{A} \le F$, $GN \le A$, $\overline{A}N \le M$, $MA \le N$, $MF \le \overline{A}$; $AH \le I$, $I\overline{A} \le H$, $IK \le A$, $\overline{A}K \le J$, $JA \le K$, $JH \le \overline{A}$; $BD \le F$, $F\overline{B} \le D$, $FP \le B$, $\overline{B}P \le N$, $NB \le P$, $ND \le \overline{B}$; $BE \le G$, $G\overline{B} \le E$, $GO \le B$, $\overline{B}O \le M$, $MB \le O$, $ME \le \overline{B}$; $BG \le \overline{L}$, $\overline{LB} \le G$, $\overline{L}M \le B$, $\overline{B}M \le L$, $LB \le M$, $LG \le \overline{B}$; $BI \le J$, $J\overline{B} \le I$, $J^2 \le B$, $\overline{I}^2 \le \overline{B}$; $CD \le G$, $G\overline{C} \le D$, $GP \le C$, $\overline{C}P \le M$, $MC \le P$, $MD \le \overline{C}$; $CF \le \overline{L}$, $\overline{LC} \le F$, $\overline{L}N \le C$, $\overline{C}N \le L$, …

Таблица 3 (продолжение). Уровни надгрупп subsystem subgroups в E_8

#	тип Δ	Δ	m	уровень	соотношения
				$J=\begin{smallmatrix}1&*&*&*&2&*&*\\&&2&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}1&*&*&*&2&*&*\\&&1&&&&\end{smallmatrix}$, $K=\begin{smallmatrix}2&*&*&*&2&*&*\\&&2&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}0&*&*&*&2&*&*\\&&1&&&&\end{smallmatrix}$, $L=\begin{smallmatrix}1&*&*&*&3&*&*\\&&1&&&&\end{smallmatrix}$, $M=\begin{smallmatrix}1&*&*&*&3&*&*\\&&2&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}1&*&*&*&1&*&*\\&&1&&&&\end{smallmatrix}$, $N=\begin{smallmatrix}2&*&*&*&3&*&*\\&&2&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}0&*&*&*&1&*&*\\&&1&&&&\end{smallmatrix}$, $O=\begin{smallmatrix}1&*&*&*&3&*&*\\&&3&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}1&*&*&*&1&*&*\\&&0&&&&\end{smallmatrix}$, $P=\begin{smallmatrix}2&*&*&*&3&*&*\\&&3&&&&\end{smallmatrix}=-\begin{smallmatrix}0&*&*&*&1&*&*\\&&0&&&&\end{smallmatrix}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{L}$,	$LC \le N$, $LF \le \overline{C}$; $CH \le J$, $J\overline{C} \le H$, $JK \le C$, $\overline{C}K \le I$, $IC \le K$, $IH \le \overline{C}$; $DF \le H$, $HP \le F$, $HN \le D$, $PN \le K$, $KD \le N$, $KF \le P$; $DG \le I$, $IP \le G$, $IM \le D$, $PM \le J$, $JD \le M$, $JG \le P$; $DI \le L$, $LP \le I$, $LJ \le D$, $PJ \le \overline{L}$, $\overline{L}D \le J$, $\overline{L}I \le P$; $EF \le I$, $IO \le F$, $IN \le E$, $ON \le J$, $JE \le N$, $JF \le O$; $EH \le L$, $LO \le H$, $LK \le E$, $OK \le \overline{L}$, $\overline{L}E \le K$, $\overline{L}H \le O$; $FG \le J$, $JN \le G$, $JM \le F$, $NM \le I$, $IF \le M$, $IG \le N$; $G^2 \le K$, $KM \le G$, $M^2 \le H$, $HG \le M$;
31.	$2A_2+2A_1$	1,2,3,5,6,8	28	$A=\begin{smallmatrix}*&*&1&*&*&0&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $B=\begin{smallmatrix}*&*&2&*&*&0&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $C=\begin{smallmatrix}*&*&3&*&*&0&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $D=\begin{smallmatrix}*&*&0&*&*&1&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $E=\begin{smallmatrix}*&*&1&*&*&1&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $F=\begin{smallmatrix}*&*&2&*&*&1&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $G=\begin{smallmatrix}*&*&3&*&*&1&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $H=\begin{smallmatrix}*&*&4&*&*&1&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $I=\begin{smallmatrix}*&*&2&*&*&2&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $J=\begin{smallmatrix}*&*&3&*&*&2&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $K=\begin{smallmatrix}*&*&4&*&*&2&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $L=\begin{smallmatrix}*&*&5&*&*&2&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $M=\begin{smallmatrix}*&*&6&*&*&2&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $N=\begin{smallmatrix}*&*&6&*&*&3&*\\&&*&&&&\end{smallmatrix}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$, $\overline{E}$, $\overline{F}$, $\overline{G}$, $\overline{H}$, $\overline{I}$, $\overline{J}$, $\overline{K}$, $\overline{L}$, $\overline{M}$, $\overline{N}$,	$A^2 \le B$, $B\overline{A} \le A$, $\overline{A}^2 \le \overline{B}$, $\overline{B}A \le \overline{A}$; $AB \le C$, $C\overline{A} \le B$, $C\overline{B} \le A$, $\overline{AB} \le \overline{C}$, $\overline{C}A \le \overline{B}$, $\overline{CB} \le \overline{A}$; $AD \le E$, $E\overline{A} \le D$, $E\overline{D} \le A$, $\overline{AD} \le \overline{E}$, $\overline{E}A \le \overline{D}$, $\overline{ED} \le \overline{A}$; $AE \le F$, $F\overline{A} \le E$, $F\overline{E} \le A$, $\overline{AE} \le \overline{F}$, $\overline{F}A \le \overline{E}$, $\overline{FE} \le \overline{A}$; $AF \le G$, $G\overline{A} \le F$, $G\overline{F} \le A$, $\overline{AF} \le \overline{G}$, $\overline{G}A \le \overline{F}$, $\overline{GF} \le \overline{A}$; $AG \le H$, $H\overline{A} \le G$, $H\overline{G} \le A$, $\overline{AG} \le \overline{H}$, $\overline{H}A \le \overline{G}$, $\overline{HG} \le \overline{A}$; $AI \le J$, $J\overline{A} \le I$, $J\overline{I} \le A$, $\overline{AI} \le \overline{J}$, $\overline{J}A \le \overline{I}$, $\overline{JI} \le \overline{A}$; $AJ \le K$, $K\overline{A} \le J$, $K\overline{J} \le A$, $\overline{AJ} \le \overline{K}$, $\overline{K}A \le \overline{J}$, $\overline{KJ} \le \overline{A}$; $AK \le L$, $L\overline{A} \le K$, $L\overline{K} \le A$, $\overline{AK} \le \overline{L}$, $\overline{L}A \le \overline{K}$, $\overline{LK} \le \overline{A}$; $AL \le M$, $M\overline{A} \le L$, $M\overline{L} \le A$, $\overline{AL} \le \overline{M}$, $\overline{M}A \le \overline{L}$, $\overline{ML} \le \overline{A}$; $BD \le F$, $F\overline{B} \le D$, $F\overline{D} \le B$, $\overline{BD} \le \overline{F}$, $\overline{F}B \le \overline{D}$, $\overline{FD} \le \overline{B}$; $BE \le G$, $G\overline{B} \le E$, $G\overline{E} \le B$, $\overline{BE} \le \overline{G}$, $\overline{G}B \le \overline{E}$, ...

Таблица 3 (продолжение). Уровни надгрупп subsystem subgroups в E_8

#	тип Δ	Δ	m	уровень	соотношения
					$\overline{G}E \le \overline{B}$; $BF \le H$, $H\overline{B} \le F$, $H\overline{F} \le B$, $\overline{BF} \le \overline{H}$, $\overline{H}B \le \overline{F}$, $\overline{H}F \le \overline{B}$; $BI \le K$, $K\overline{B} \le I$, $K\overline{I} \le B$, $\overline{BI} \le \overline{K}$, $\overline{K}B \le \overline{I}$, $\overline{K}I \le \overline{B}$; $BJ \le L$, $L\overline{B} \le J$, $L\overline{J} \le B$, $\overline{BJ} \le \overline{L}$, $\overline{L}B \le \overline{J}$, $\overline{L}J \le \overline{B}$; $BK \le M$, $M\overline{B} \le K$, $M\overline{K} \le B$, $\overline{BK} \le \overline{M}$, $\overline{M}B \le \overline{K}$, $\overline{M}K \le \overline{B}$; $CD \le G$, $G\overline{C} \le D$, $G\overline{D} \le C$, $\overline{CD} \le \overline{G}$, $\overline{G}C \le \overline{D}$, $\overline{G}D \le \overline{C}$; $CE \le H$, $H\overline{C} \le E$, $H\overline{E} \le C$, $\overline{CE} \le \overline{H}$, $\overline{H}C \le \overline{E}$, $\overline{H}E \le \overline{C}$; $CI \le L$, $L\overline{C} \le I$, $L\overline{I} \le C$, $\overline{CI} \le \overline{L}$, $\overline{L}C \le \overline{I}$, $\overline{L}I \le \overline{C}$; $CJ \le M$, $M\overline{C} \le J$, $M\overline{J} \le C$, $\overline{CJ} \le \overline{M}$, $\overline{M}C \le \overline{J}$, $\overline{M}J \le \overline{C}$; $DF \le I$, $I\overline{D} \le F$, $I\overline{F} \le D$, $\overline{DF} \le \overline{I}$, $\overline{I}D \le \overline{F}$, $\overline{I}F \le \overline{D}$; $DG \le J$, $J\overline{D} \le G$, $J\overline{G} \le D$, $\overline{DG} \le \overline{J}$, $\overline{J}D \le \overline{G}$, $\overline{J}G \le \overline{D}$; $DH \le K$, $K\overline{D} \le H$, $K\overline{H} \le D$, $\overline{DH} \le \overline{K}$, $\overline{K}D \le \overline{H}$, $\overline{K}H \le \overline{D}$; $DM \le N$, $N\overline{D} \le M$, $N\overline{M} \le D$, $\overline{DM} \le \overline{N}$, $\overline{N}D \le \overline{M}$, $\overline{N}M \le \overline{D}$; $E^2 \le I$, $I\overline{E} \le E$, $\overline{E}^2 \le \overline{I}$, $\overline{I}E \le \overline{E}$; $EF \le J$, $J\overline{E} \le F$, $J\overline{F} \le E$, $\overline{EF} \le \overline{J}$, $\overline{J}E \le \overline{F}$, $\overline{J}F \le \overline{E}$; $EG \le K$, $K\overline{E} \le G$, $K\overline{G} \le E$, $\overline{EG} \le \overline{K}$, $\overline{K}E \le \overline{G}$, $\overline{K}G \le \overline{E}$; $EH \le L$, $L\overline{E} \le H$, $L\overline{H} \le E$, $\overline{EH} \le \overline{L}$, $\overline{L}E \le \overline{H}$, $\overline{L}H \le \overline{E}$; $EL \le N$, $N\overline{E} \le L$, $N\overline{L} \le E$, $\overline{EL} \le \overline{N}$, $\overline{N}E \le \overline{L}$, $\overline{N}L \le \overline{E}$; $F^2 \le K$, $K\overline{F} \le F$, $\overline{F}^2 \le \overline{K}$, $\overline{K}F \le \overline{F}$; $FG \le L$, $L\overline{F} \le G$, $L\overline{G} \le F$, $\overline{FG} \le \overline{L}$, $\overline{L}F \le \overline{G}$, $\overline{L}G \le \overline{F}$; $FH \le M$, $M\overline{F} \le H$, $M\overline{H} \le F$, $\overline{FH} \le \overline{M}$, $\overline{M}F \le \overline{H}$, $\overline{M}H \le \overline{F}$; $FK \le N$, $N\overline{F} \le K$, $N\overline{K} \le F$, $\overline{FK} \le \overline{N}$, $\overline{N}F \le \overline{K}$, $\overline{N}K \le \overline{F}$; $G^2 \le M$, $M\overline{G} \le G$, $\overline{G}^2 \le \overline{M}$, $\overline{M}G \le \overline{G}$; $GJ \le N$, $N\overline{G} \le J$, $N\overline{J} \le G$, $\overline{GJ} \le \overline{N}$, $\overline{N}G \le \overline{J}$, $\overline{N}J \le \overline{G}$; $HI \le N$, $N\overline{H} \le I$, $N\overline{I} \le H$, $\overline{HI} \le \overline{N}$, $\overline{N}H \le \overline{I}$, $\overline{N}I \le \overline{H}$;

Таблица 3 (продолжение). Уровни надгрупп subsystem subgroups в E_8

#	тип Δ	Δ	m	уровень	соотношения
32.	A_2+4A_1	1,2,3,5,7,0	31	$A = **\underset{*}{1}*0*0$, $B = **\underset{*}{2}*0*0$, $C = **\underset{*}{0}*1*0$, $D = **\underset{*}{1}*1*0$, $E =$ $**\underset{*}{2}*1*0$, $F = **\underset{*}{3}*1*0$, $G = **\underset{*}{2}*2*0$, $H = **\underset{*}{3}*2*0$, $I = **\underset{*}{4}*2*0$, $J = **\underset{*}{0}*0*1 = **\underset{*}{6}*4*1$, $K = **\underset{*}{0}*1*1 = **\underset{*}{6}*3*1$, $L = **\underset{*}{1}*1*1 = **\underset{*}{5}*3*1$, $M = **\underset{*}{2}*1*1 = **\underset{*}{4}*3*1$, $N = **\underset{*}{3}*1*1 = **\underset{*}{3}*3*1$, $O = **\underset{*}{2}*2*1 = **\underset{*}{4}*2*1$, $P = **\underset{*}{3}*2*1 = **\underset{*}{3}*2*1$, $Q = **\underset{*}{4}*2*1 = **\underset{*}{2}*2*1$, $R = **\underset{*}{3}*3*1 = **\underset{*}{3}*1*1$, $S = **\underset{*}{4}*3*1 = **\underset{*}{2}*1*1$, $T = **\underset{*}{5}*3*1 = **\underset{*}{1}*1*1$, $U = **\underset{*}{6}*3*1 = **\underset{*}{0}*1*1$, $V = **\underset{*}{6}*4*1 = **\underset{*}{0}*0*1$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$, $\overline{E}$, $\overline{F}$, $\overline{G}$, $\overline{H}$, $\overline{I}$,	$A^2 \le B$, $B\overline{A} \le A$, $\overline{A}^2 \le \overline{B}$, $\overline{B}A \le \overline{A}$; $AC \le D$, $D\overline{A} \le C$, $D\overline{C} \le A$, $\overline{AC} \le \overline{D}$, $\overline{D}A \le \overline{C}$, $\overline{DC} \le \overline{A}$; $AD \le E$, $E\overline{A} \le D$, $E\overline{D} \le A$, $\overline{AD} \le \overline{E}$, $\overline{E}A \le \overline{D}$, $\overline{ED} \le \overline{A}$; $AE \le F$, $F\overline{A} \le E$, $F\overline{E} \le A$, $\overline{AE} \le \overline{F}$, $\overline{F}A \le \overline{E}$, $\overline{FE} \le \overline{A}$; $AG \le H$, $H\overline{A} \le G$, $H\overline{G} \le A$, $\overline{AG} \le \overline{H}$, $\overline{H}A \le \overline{G}$, $\overline{HG} \le \overline{A}$; $AH \le I$, $I\overline{A} \le H$, $I\overline{H} \le A$, $\overline{AH} \le \overline{I}$, $\overline{I}A \le \overline{H}$, $\overline{I}H \le \overline{A}$; $AK \le L$, $L\overline{A} \le K$, $LU \le A$, $\overline{AU} \le T$, $TA \le U$, $TK \le \overline{A}$; $AL \le M$, $M\overline{A} \le L$, $MT \le A$, $\overline{AT} \le S$, $SA \le T$, $SL \le \overline{A}$; $AM \le N$, $N\overline{A} \le M$, $NS \le A$, $\overline{AS} \le R$, $RA \le S$, $RM \le \overline{A}$; $AO \le P$, $P\overline{A} \le O$, $PQ \le A$, $\overline{AQ} \le P$, $PA \le Q$, $PO \le \overline{A}$; $BC \le E$, $E\overline{B} \le C$, $E\overline{C} \le B$, $\overline{BC} \le \overline{E}$, $\overline{E}B \le \overline{C}$, $\overline{EC} \le \overline{B}$; $BD \le F$, $F\overline{B} \le D$, $F\overline{D} \le B$, $\overline{BD} \le \overline{F}$, $\overline{F}B \le \overline{D}$, $\overline{FD} \le \overline{B}$; $BG \le I$, $I\overline{B} \le G$, $I\overline{G} \le B$, $\overline{BG} \le \overline{I}$, $\overline{I}B \le \overline{G}$, $\overline{IG} \le \overline{B}$; $BK \le M$, $M\overline{B} \le K$, $MU \le B$, $\overline{BU} \le S$, $SB \le U$, $SK \le \overline{B}$; $BL \le N$, $N\overline{B} \le L$, $NT \le B$, $\overline{BT} \le R$, $RB \le T$, $RL \le \overline{B}$; $BO \le Q$, $Q\overline{B} \le O$, $Q^2 \le B$, $O^2 \le \overline{B}$; $CE \le G$, $G\overline{C} \le E$, $G\overline{E} \le C$, $\overline{CE} \le \overline{G}$, ...

Таблица 3 (продолжение). Уровни надгрупп subsystem subgroups в E_8

					$\overline{G}C \le \overline{E}$, $\overline{G}E \le \overline{C}$; $CF \le H$, $H\overline{C} \le F$, $H\overline{F} \le C$, $\overline{CF} \le \overline{H}$, $\overline{H}C \le \overline{F}$, $\overline{H}F \le \overline{C}$; $CJ \le K$, $K\overline{C} \le J$, $KV \le C$, $\overline{C}V \le U$, $UC \le V$, $UJ \le \overline{C}$; $CM \le O$, $O\overline{C} \le M$, $OS \le C$, $\overline{C}S \le Q$, $QC \le S$, $QM \le \overline{C}$; $CN \le P$, $P\overline{C} \le N$, $PR \le C$, $\overline{C}R \le P$, $PC \le R$, $PN \le \overline{C}$; $D^2 \le G$, $G\overline{D} \le D$, $\overline{D}^2 \le \overline{G}$, $\overline{G}D \le \overline{D}$; $DE \le H$, $H\overline{D} \le E$, $H\overline{E} \le D$, $\overline{DE} \le \overline{H}$, $\overline{H}D \le \overline{E}$, $\overline{H}E \le \overline{D}$; $DF \le I$, $I\overline{D} \le F$, $I\overline{F} \le D$, $\overline{DF} \le \overline{I}$, $\overline{I}D \le \overline{F}$, $\overline{I}F \le \overline{D}$; $DJ \le L$, $L\overline{D} \le J$, $LV \le D$, $\overline{D}V \le T$, $TD \le V$, $TJ \le \overline{D}$; $DL \le O$, $O\overline{D} \le L$, $OT \le D$, $\overline{D}T \le Q$, $QD \le T$, $QL \le \overline{D}$; $DM \le P$, $P\overline{D} \le M$, $PS \le D$, $\overline{D}S \le P$, $PD \le S$, $PM \le \overline{D}$; $DN \le Q$, $Q\overline{D} \le N$, $QR \le D$, $\overline{D}R \le O$, $OD \le R$, $ON \le \overline{D}$; $E^2 \le I$, $I\overline{E} \le E$, $\overline{E}^2 \le \overline{I}$, $\overline{I}E \le \overline{E}$; $EJ \le M$, $M\overline{E} \le J$, $MV \le E$, $\overline{E}V \le S$, $SE \le V$, $SJ \le \overline{E}$; $EK \le O$, $O\overline{E} \le K$, $OU \le E$, $\overline{E}U \le Q$, $QE \le U$, $QK \le \overline{E}$; $EL \le P$, $P\overline{E} \le L$, $PT \le E$, $\overline{E}T \le P$, $PE \le T$, $PL \le \overline{E}$; $EM \le Q$, $Q\overline{E} \le M$, $QS \le E$, $\overline{E}S \le O$, $OE \le S$, $OM \le \overline{E}$; $FJ \le N$, $N\overline{F} \le J$, $NV \le F$, $\overline{F}V \le R$, $RF \le V$, $RJ \le \overline{F}$; $FK \le P$, $P\overline{F} \le K$, $PU \le F$, $\overline{F}U \le P$, $PF \le U$, $PK \le \overline{F}$; $FL \le Q$, $Q\overline{F} \le L$, $QT \le F$, $\overline{F}T \le O$, $OF \le T$, $OL \le \overline{F}$; $GJ \le O$, $O\overline{G} \le J$, $OV \le G$, $\overline{G}V \le Q$, $QG \le V$, $QJ \le \overline{G}$; $GL \le R$, $R\overline{G} \le L$, $RT \le G$, $\overline{G}T \le N$, $NG \le T$, $NL \le \overline{G}$; $GM \le S$, $S\overline{G} \le M$, $S^2 \le G$, $M^2 \le \overline{G}$; $HJ \le P$, $P\overline{H} \le J$, $PV \le H$, $\overline{H}V \le P$, $PH \le V$, $PJ \le \overline{H}$; $HK \le R$, $R\overline{H} \le K$, $RU \le H$, $\overline{H}U \le N$, $NH \le U$, $NK \le \overline{H}$; $HL \le S$, $S\overline{H} \le L$, $ST \le H$, $\overline{H}T \le M$, $MH \le T$, $ML \le \overline{H}$; $IJ \le Q$, $Q\overline{I} \le J$, $QV \le I$, $\overline{I}V \le O$, $OI \le V$, $OJ \le \overline{I}$; $IK \le S$, $S\overline{I} \le K$, $SU \le I$, $\overline{I}U \le M$, $MI \le U$, $MK \le \overline{I}$; $IL \le T$, $T\overline{I} \le L$, $T^2 \le I$, $L^2 \le \overline{I}$;

Таблица 4. Уровни надгрупп subsystem subgroups в F_4

#	тип Δ	Δ	m	уровень	соотношения
1.	B_4	1,2,3,0	1	$A=***1=-***1$,	
2.	D_4	1,2,0,−0122 $=-\alpha_0(B_4)$	3	$A=**10=**32=-**10=-**32$, $B=**01=-**21=**21=-**01$, $C=**11=-**31=-**11=**31$,	$AB\le C$, $CA\le B$, $CB\le A$;
3.	A_1+C_3	2,3,4,0	1	$A=1***=-1***$,	
4.	$A_3+\widetilde{A}_1$	1,2,4,0	3	$A=**1*=-**3*$, $B=**2*=-**2*$, $C=**3*=-**1*$,	$A^2\le B$, $BC\le A$, $C^2\le B$, $BA\le C$;
5.	$A_2+\widetilde{A}_2$	1,3,4,0	2	$A=*1**=-*2**$, $B=*2**=-*1**$,	$A^2\le B$, $B^2\le A$;
6.	B_2+2A_1	2,4,0,−0122 $=-\alpha_0(C_3)$	3	$A=1*0*=1*2*=1*4*=-1*0*=-1*2*=-1*4*$, $B=0*1*=-0*1*$, $C=1*1*=1*3*=-1*1*=-1*3*$,	$AB\le C$, $CA\le B$, $CB\le A$;
7.	$4A_1$	2,0,−0122 $=$ $-\alpha_0(C_3)$, −0120 $=-\alpha_0(C_2)$	7	$A=0*01=0*21=-0*01=-0*21$, $B=0*10=-0*10$, $C=1*00=1*22=1*42=-1*00=-1*22=1*20=-1*42=-1*20$, $D=0*11=-0*11$, $E=1*10=1*32=-1*10=-1*32$, $F=1*11=1*31=-1*11=-1*31$, $G=1*21=-1*21$,	$AB\le D$, $DA\le B$, $DB\le A$; $AC\le G$, $GA\le C$, $GC\le A$; $AE\le F$, $FA\le E$, $FE\le A$; $BC\le E$, $EB\le C$, $EC\le B$; $BF\le G$, $GB\le F$, $GF\le B$; $CD\le F$, $FC\le D$, $FD\le C$; $DE\le G$, $GD\le E$, $GE\le D$;
8.	B_3	1,2,3	4	$A=**1$, $B=**2$, $\overline{A}=-**1$, $\overline{B}=-**2$,	$A^2\le B$, $B\overline{A}\le A$, $\overline{A}^2\le\overline{B}$, $\overline{B}A\le\overline{A}$;
9.	$A_2+\widetilde{A}_1$	1,2,4	8	$A=**1*$, $B=**2*$, $C=**3*$, $D=**4*$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$,	$A^2\le B$, $B\overline{A}\le A$, $\overline{A}^2\le\overline{B}$, $\overline{B}A\le\overline{A}$; $AB\le C$, $C\overline{A}\le B$, $C\overline{B}\le A$, $\overline{AB}\le\overline{C}$, $\overline{C}A\le\overline{B}$, $\overline{C}B\le\overline{A}$; $AC\le D$, $D\overline{A}\le C$, $D\overline{C}\le A$, $\overline{AC}\le\overline{D}$, $\overline{D}A\le\overline{C}$, $\overline{D}C\le\overline{A}$; $B^2\le D$, $D\overline{B}\le B$, $\overline{B}^2\le\overline{D}$, $\overline{D}B\le\overline{B}$;

Таблица 4 (продолжение). Уровни надгрупп subsystem subgroups в F_4

#	тип Δ	Δ	m	уровень	соотношения
10.	$\widetilde{A}_2+A_1$	1,3,4	6	$A=*1**$, $B=*2**$, $C=*3**$, $\overline{A}=-*1**$, $\overline{B}=-*2**$, $\overline{C}=-*3**$,	$A^2\le B$, $B\overline{A}\le A$, $\overline{A}^2\le\overline{B}$, $\overline{B}A\le\overline{A}$; $AB\le C$, $C\overline{A}\le B$, $C\overline{B}\le A$, $\overline{AB}\le\overline{C}$, $\overline{C}A\le\overline{B}$, $\overline{C}B\le\overline{A}$;
11.	$2A_1+\widetilde{A}_1$	2,4,0	9	$A=1*0*=-1*4*$, $B=0*1*$, $C=1*1*=-1*3*$, $D=0*2*$, $E=1*2*=-1*2*$, $F=1*3*=-1*1*$, $G=1*4*=-1*0*$, $\overline{B}=-0*1*$, $\overline{D}=-0*2*$,	$AB\le C$, $CG\le B$, $C\overline{B}\le A$, $G\overline{B}\le F$, $FA\le\overline{B}$, $FB\le G$; $AD\le E$, $EG\le D$, $E\overline{D}\le A$, $G\overline{D}\le E$, $EA\le\overline{D}$, $ED\le G$; $B^2\le D$, $D\overline{B}\le B$, $\overline{B}^2\le\overline{D}$, $\overline{D}B\le\overline{B}$; $BC\le E$, $E\overline{B}\le C$, $EF\le B$, $\overline{B}F\le E$, $EB\le F$, $EC\le\overline{B}$; $C^2\le\overline{D}$, $\overline{D}F\le C$, $F^2\le D$, $DC\le F$;

Литература

1. А. С. Ананьевский, Н. А. Вавилов, С. С. Синчук, *Об описании надгрупп* $E(l,R)\otimes E(m,R)$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **365** (2009), 5–28.
2. А. С. Ананьевский, Н. А. Вавилов, С. С. Синчук, *О надгруппах* $E(m,R)\otimes E(n,R)$. I. *Уровни и нормализаторы.* — Алгебра и Анализ **23**, No. 5 (2011), 55–98.
3. С. В. Бакулин, Н. А. Вавилов, *О подгруппах, нормализуемых* $\mathrm{EO}(2l,R)$. — Вестник СПбГУ, сер.1, No. 4 (2011), 19–27.
4. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Расположение подгрупп в полной линейной группе над коммутативным кольцом.* — Тр. Мат. ин-та АН СССР **165** (1984), 24–42.
5. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли, Гл.* IV–VI. М. (1972), 1–334.
6. Н. А. Вавилов, *О параболических подгруппах групп Шевалле над полулокальным кольцом.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **75** (1978), 43–58.
7. Н. А. Вавилов, *Подгруппы расщепимых классических групп.* Докт. Дисс., Ленингр. Гос. Ун-т (1987), 1–334.
8. Н. А. Вавилов, *Строение расщепимых классических групп над коммутативным кольцом.* — Докл. АН СССР **299**, No. 6 (1988), 1300–1303.
9. Н. А. Вавилов, *О подгруппах расщепимых ортогональных групп над кольцом.* — Сиб. Мат. Журн. **29**, No. 4 (1988), 31–43.
10. Н. А. Вавилов, *О подгруппах расщепимых классических групп.* — Тр. Мат. ин-та АН СССР **183** (1990), 29–41.
11. Н. А. Вавилов, *О подгруппах полной симплектической группы над коммутативным кольцом.* — Кольца и Модули. Предельные Теоремы Теории Вероятностей. No. 3 (1993), 16–38.
12. Н. А. Вавилов, *Подгруппы расщепимых ортогональных групп над коммутативным кольцом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **281** (2001), 35–59.
13. Н. А. Вавилов, *О подгруппах симплектической группы, содержащих subsystem subgroup.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **349** (2007), 5–29.
14. Н. А. Вавилов, *Как увидеть знаки структурных констант?* — Алгебра и Анализ **19**, No. 4 (2007), 34–68.
15. Н. А. Вавилов, *Весовые элементы групп Шевалле.* — Алгебра и Анализ **20**, No. 1 (2008), 34–85.
16. Н. А. Вавилов, A_3*-доказательство структурных теорем для групп Шевалле типов* E_6 *и* E_7. II. *Основная лемма.* — Алгебра и анализ **23**, No. 6 (2011), 1–31.
17. Н. А. Вавилов, М. Р. Гаврилович, A_2*-доказательство структурных теорем для групп Шевалле типов* E_6 *и* E_7. — Алгебра и Анализ **16**, No. 4 (2004), 54–87.
18. Н. А. Вавилов, М. Р. Гаврилович, С. И. Николенко, *Строение групп Шевалле: доказательство из Книги.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **330** (2006), 36–76.
19. Н. А. Вавилов, С. И. Николенко, A_2*-доказательство структурных теорем для групп Шевалле типа* F_4. — Алгебра и Анализ **20**, No. 4 (2008), 27–63.
20. Н. А. Вавилов, В. А. Петров, *О надгруппах* $\mathrm{Ep}(2l,R)$. — Алгебра и Анализ **15**, No. 3 (2003), 72–114.

21. Н. А. Вавилов, В. А. Петров, *О надгруппах* $\mathrm{EO}(n, R)$. — Алгебра и Анализ **19**, No. 2 (2007), 10–51.
22. Н. А. Вавилов, А. В. Степанов, *Надгруппы полупростых групп.* — Вестн. Самарского ун-та, Естественнонаучная сер. No. 3 (2008), 51–95.
23. Н. А. Вавилов, Н. П. Харчев, *Орбиты стабилизатора подсистем.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **338** (2006), 98–124.
24. Е. П. Вдовин, А. А. Гальт, *Нормализаторы подсистемных подгрупп в конечных группах лиева типа.* — Алгебра и Логика **47**, No. 1 (2008), 3–30.
25. Е. Б. Дынкин, *Полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли.* — Мат. сб. **30**, No. 2 (1952), 349–362.
26. В. Г. Казакевич, А. К. Ставрова, *Подгруппы, нормализуемые коммутантом подгруппы Леви.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **319** (2004), 199–215.
27. Р. Картер, *Классы сопряженных элементов в группе Вейля.* Семинар по алгебраическим группам. Мир, М. (1973), 288–306.
28. А. Ю. Лузгарев, *О надгруппах* $\mathrm{E}(\mathrm{E}_6, R)$ *и* $\mathrm{E}(\mathrm{E}_7, R)$ *в минимальных представлениях.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **319** (2004), 216–243.
29. А. Ю. Лузгарев, *Надгруппы*$\mathrm{E}(\mathrm{F}_4, R)$ *в* $G(\mathrm{E}_6, R)$. — Алгебра и Анализ **20**, No. 6 (2008), 148–185.
30. А. Ю. Лузгарев, *Надгруппы исключительных групп.* Канд. Дисс., СПб Гос Ун-т (2008), 1–106.
31. В. А. Петров, *Надгруппы классических групп.* — Канд. Дисс., СПб Гос Ун-т (2005), 1–129.
32. В. А. Петров, А. К. Ставрова, *Элементарные подгруппы изотропных редуктивных групп.* — Алгебра и Анализ **20**, No. 4 (2008), 160–188.
33. Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле.* Мир, М. (1973).
34. M. Aschbacher, *The 27-dimensional module for* E_6. I – IV. — Invent. Math. **89**, No. 1 (1987), 159–195; J. London Math. Soc. **37** (1988), 275–293; Trans. Amer. Math. Soc. **321** (1990), 45–84; J. Algebra **191** (1991), 23–39.
35. H. Azad, M. Barry, G. M. Seitz, *On the structure of parabolic subgroups.* — Comm. Algebra. **18** (1990), 551–562.
36. R. W. Carter, *Simple groups of Lie type.* Wiley, London et al (1972).
37. R. W. Carter, *Conjugacy classes in the Weyl group.* — Compositio Math. **25**, No. 1 (1972), 1–59.
38. A. Harebov, N. Vavilov, *On the lattice of subgroups of Chevalley groups containing a split maximal torus.* — Comm. Algebra **24**, No. 1 (1996), 109–133.
39. R. Hazrat, N. Vavilov, *Bak's work on* K*-theory of rings* (*with an appendix by Max Karoubi*). — J. K-Theory **4**, No. 1 (2009), 1–65.
40. M. W. Liebeck, *Subgroups of exceptional groups.* Algebraic groups and their representations (Cambridge – 1997), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1998), 275–290.
41. M. W. Liebeck, J. Saxl, G. M. Seitz, *Subgroups of maximal rank in finite exceptional groups of Lie type.* — Proc. London Math. Soc. **65**, No. 2 (1992), 297–325.
42. M. W. Liebeck, G. M. Seitz, *Maximal subgroups of exceptional groups of Lie type, finite and algebraic.* — Geom. dedic. **36** (1990), 353–387.
43. M. W. Liebeck, G. M. Seitz, *Reductive subgroups of exceptional algebraic groups.* — Mem. Amer. Math. Soc. **580** (1996), 1–111.

44. M. W. Liebeck, G. M. Seitz, *On the subgroup structure of exceptional groups of Lie type.* — Trans. Amer. Math. Soc. **350**, No. 9 (1998), 3409–3482.
45. M. W. Liebeck, G. M. Seitz, *The maximal subgroups of positive dimension in exceptional algebraic groups.* — Mem. Amer. Math. Soc. No. 802 (2004), 1–227.
46. M. W. Liebeck, G. M. Seitz, *Maximal subgroups of large rank in exceptional groups of Lie type.* — J. London Math. Soc. **71**, No. 2 (2005), 345–361.
47. V. A. Petrov, *Overgroups of unitary groups.* — K-Theory **29** (2003), 77–108.
48. E. Plotkin, A. Semenov, N. Vavilov, *Visual basic representations: an atlas.* — Int. J. Algebra and Computations **8** (1998), 61–97.
49. G. M. Seitz, *Maximal subgroups of exceptional algebraic groups.* — Mem. Amer. Math. Soc. **441** (1991), 1–197.
50. G. M. Seitz, *Maximal subgroups of finite exceptional groups.* Groups and geometries (Siena – 1996), Basel et al., Birkhäuser (1998), 155–161.
51. A. Stavrova, *Normal structure of maximal parabolic subgroups in Chevalley groups over commutative rings.* — Algebra Coll. **16**, No. 4 (2009), 631–648.
52. A. Stepanov, *Subring subgroups in Chevalley groups with doubly laced root systems.* — J. Algebra (2012).
53. A. Stepanov, N. Vavilov, *Decomposition of transvections: a theme with variations.* — K-Theory **19** (2000), 109–153.
54. N. Vavilov, *Intermediate subgroups in Chevalley groups.* Proc Conf. Groups of Lie Type and their Geometries (Como – 1993), Cambridge Univ. Press (1995), 233–280.
55. N. Vavilov, *A third look at weight diagrams.* — Rend. Sem. Matem. Univ. Padova **104** (2000), 201–250.
56. N. Vavilov, A. Luzgarev, A. Stepanov, *Calculations in exceptional groups.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **373** (2009), 48–72.
57. Wang Dengyin, *A maximal subgroup in the Chevalley group of type* F_4 *over an arbitrary field.* — Chinese Ann. Math., Ser. A **21**, No. 4 (2000), 409–142, (Chinese).
58. Wang Dengyin, *A new type of pronormal subgroups in Chevalley groups.* — Chinese Ann. Math., Ser. A **22**, No. 1 (2001), 243–248.
59. Wang Dengyin, *Overgroups of* $\mathrm{A}_2(F)$ *in* $\mathrm{G}_2(F)$ *and its pronormality.* — Acta Math. Sinica **45**, No. 3 (2002), 563–566, (Chinese).
60. Wang Dengyin, *Overgroups of Levi subgroups* L_α $(n(\alpha)=1)$ *in Chevalley groups* $G(\Phi, F)$. — Chinese Adv. Math. **31**, No. 4 (2002), 148–152, (Chinese).
61. Wang Dengyin, Li Shangzi, *A study of one class of subgroups in Chevalley groups.* — Chinese Ann. Math., Ser. A **20**, No. 4 (1999), 449–458, (Chinese).
62. Wang Dengyin, Li Shangzi, *Overgroups of Levi subgroups in parabolic subgroups in Chevalley groups.* — Acta Math. Sinica **43**, No. 5 (2000), 931–936, (Chinese).
63. You Hong, *Overgroups of symplectic group in linear group over commutative rings.* — J. Algebra **282**, No. 1 (2004), 23–32.
64. You Hong, *Overgroups of classical groups over commutative group in linear group.* — Sci. China, Ser. A **49**, No. 5 (2006), 626–638.

Vavilov N. A., Shchegolev A. V. Overgroups of subsystem subgroups in exceptional groups: levels.

An embedding of root systems $\Delta \subseteq \Phi$ determines the corresponding regular embedding $G(\Delta, R) \leq G(\Phi, R)$ of Chevalley groups, over an arbitrary commutative ring R. Denote by $E(\Delta, R)$ the elementary subgroup of $G(\Delta, R)$. In the present paper we initiate the study of intermediate subgroups H, $E(\Delta, R) \leq H \leq G(\Phi, R)$, provided that $\Phi = \mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7, \mathrm{E}_8, \mathrm{F}_4$ or G_2, and there are no roots in Φ orthogonal to all of Δ. There are 72 such pairs (Φ, Δ). For F_4 and G_2 we assume, moreover, that $2 \in R^*$ or $6 \in R^*$, respectively. For all such subsystems Δ we construct the levels of intermediate subgroups. We prove that these levels are detemined by certain systems of ideals in R, one for each Δ-equivalence class of roots in $\Phi \setminus \Delta$, and calculate all relations among these ideals, in each case.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: nikolai-vavilov@yandex.ru
E-mail: iryoka@gmail.com

Поступило 10 июня 2011 г.