Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 400, 2012 г.

К. О. Баталкин, Н. А. Вавилов

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ПОДГРУППЫ SO_{2l} НАД ДЕДЕКИНДОВЫМ КОЛЬЦОМ АРИФМЕТИЧЕСКОГО ТИПА

В настоящей работе, являющейся непосредственным продолжением работы Алексея Александрова и второго автора [1], мы даем описание подгрупп в четных расщепимых ортогональных группах над дедекиндовым кольцом арифметического типа R, содержащих борелевскую подгруппу $B = B(\Phi, R)$. Напомним, что четные расщепимые ортогональные группы являются группами Шевалле $G = G(\Phi, R)$ типа $\Phi = \mathrm{D}_l$. Основным новым результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть R – коммутативное кольцо, все собственные фактор-кольца которого конечны и в котором существует единица бесконечного порядка. Предположим, кроме того, что $2 \in R^*$. Пусть, далее, $G = \mathrm{SO}(2l, R)$, $l \geqslant 3$. Тогда для любой подгруппы H в G, содержащей B, имеет место следующая альтернатива:*

• *либо H содержит относительную элементарную подгруппу E_I для идеала $I \neq 0$,*

• *либо H содержится в собственной стандартной параболической подгруппе.*

Напомним, что в статье [1] аналогичный результат был получен для специальной линейной и симплектической групп, или, что то же самое, для [односвязных] групп Шевалле типов $\Phi = \mathrm{A}_l, \mathrm{C}_l$. Как и в [8], [1] основная идея в доказательстве этой теоремы восходит к решению

Ключевые слова: ортогональная группа, ортогональные трансвекции, параболические подгруппы, относительная элементарная группа, дедекиндово кольцо арифметического типа.

Настоящая работа выполнялась в рамках проекта РФФИ 09-01-00878 “Надгруппы редуктивных групп в алгебраических группах над кольцами”. На заключительном этапе работа второго автора была поддержана проектами РФФИ 10-01-90016, 10-01-92651, 11-01-00756, 12-01-00947. Кроме того, работа обоих авторов поддержана НИР 6.38.74.2011 Санкт-Петербургского государственного Университета, “Структурная теория и геометрия алгебраических групп и их приложения в теории представлений и алгебраической K-теории”.

конгруэнц-проблемы для SL_2 в работе Жана-Пьера Серра [21]. Эта идея уже несколько раз применялась для улучшения оценок в нескольких важных результатах о порождении и стабилизации классических групп [17, 24], в частности, и при описании подгрупп, [13] и [14].

Эта теорема полностью сводит описание рассматриваемого класса подгрупп к подгруппам конечного индекса в группах меньшего ранга. В свою очередь, [почти] положительное решение конгруэнц-проблемы сразу сводит описание подгрупп конечного индекса к описанию подгрупп в полулокальных кольцах, это проделано в [12]. А для полулокальных колец описание содержащих B подгрупп хорошо известно из работ Николая Романовского, Зенона Боревича, Елизаветы Дыбковой, Кадзуо Судзуки и второго автора [20, 3, 4, 19, 29, 30, 7, 10, 11].

Таким образом, при незначительных дополнительных предположениях на единицы кольца R результаты работ [29, 30, 10, 12], позволяют дать исчерпывающее описание всех подгрупп в G, содержащих B, это описание сформулировано в следующем параграфе.

§1. Формулировка основного результата

Настоящая статья является курсовой работой первого автора, выполненной под руководством второго автора. Поскольку она *непосредственно* примыкает к статье [1], мы не будем воспроизводить оттуда обзорную часть, посвященную обсуждению общего контекста и предшествующих результатов по описанию параболических подгрупп. В частности, мы рекомендуем читателю хотя бы просмотреть §§ 1–2 работы [1], чтобы понять место результатов настоящей работы в общей картине. Ограничимся поэтому ссылкой на классическую работу Жака Титса [31] (см. также [6]), в которой – ровно 50 лет назад! – впервые описаны параболические подгруппы в редуктивных группах над полями/телами.

Пусть K – глобальное поле, т.е. либо конечное алгебраическое расширение поля $\mathbb{Q}$, либо поле алгебраических функций от одной переменной над конечным полем констант, и пусть S – конечное множество (неэквивалентных) нормирований поля K, непустое в функциональном случае и содержащее все архимедовы нормирования в числовом случае. Для неархимедова нормирования $\mathfrak{p}$ поля K обозначим через $v_{\mathfrak{p}}$ соответствующий показатель. Как обычно, $R = R_S$ обозначает кольцо, состоящее из всех тех $x \in K$, для которых $v_{\mathfrak{p}}(x) \geqslant 0$ для всех нормирований $\mathfrak{p}$ поля K, не принадлежащих S. Кольцо R называется дедекиндовым кольцом арифметического типа, определенным множеством нормирований S поля K, или областью Хассе, см., например, [2]. Мы будем интересоваться случаем, когда $|S| \geqslant 2$, т.е. когда в R есть *единица бесконечного порядка.*

При этом мы будем накладывать на кольцо R следующие технические предположения (заметим, что без этих предположений заключение теоремы не имеет места!):

• $R = \mathbb{Z}[R^*]$.

• Идеал в R, порожденный элементами $\varepsilon^2 - 1$, где $\varepsilon \in R^*$, совпадает с R.

Теперь у нас все готово, чтобы сформулировать описание параболических подгрупп ортогональной группы над дедекиндовым кольцом арифметического типа. Детальное обсуждение того, как этот результат вытекает из теоремы 1, можно найти в работах второго автора [8] и [12].

Теорема 2. *Пусть $R = R_S$ – дедекиндово кольцо арифметического типа, причем $|S| \geqslant 2$, $2 \in R^*$, удовлетворяющее сформулированным выше условиям на единицы. Тогда для любой подгруппы H в $G = \mathrm{SO}(2l, R)$, $l \geqslant 3$, содержащей борелевскую подгруппу B, имеем*

$$T\langle x_\alpha(\xi),\ x_\alpha(\xi) \in H\rangle \trianglelefteq H.$$

В обозначениях работ [29, 30, 10–12] группа $T\langle x_\alpha(\xi), x_\alpha(\xi) \in H\rangle$ представляет собой $G_0(\sigma)$ для некоторой [ортогональной] сети идеалов σ. Так как с учетом [2], [21], [17], [25], [26] фактор-группа

$$N_G(T\langle x_\alpha(\xi), x_\alpha(\xi) \in P\rangle)/T\langle x_\alpha(\xi), x_\alpha(\xi) \in P\rangle$$

может быть явно вычислена в терминах определителя и функтора $K_1(R, I)$, то эта теорема действительно дает *исчерпывающее* описание (абстрактных) подгрупп G, содержащих B. См., в частности, [5, 8, 13], где это фактически проделано для случая SL_n, и § 5 настоящей работы, где сформулирован гипотетический ответ в общем случае.

§2. Основные обозначения

Используемые в настоящей работе обозначения совершенно стандартны, и мы ограничимся абсолютным минимумом. В обзорах [33, 16] можно найти обсуждение более широкого контекста и много дальнейших ссылок. В более широком аспекте классические группы обсуждаются в [22, 23], где можно найти большое количество дальнейших ссылок.

Пусть R – коммутативное кольцо с 1, R^* – его мультипликативная группа, $G = \mathrm{GL}(n, R)$ – полная линейная группа степени n над R. Как обычно, для матрицы $a \in G$ через a_{ij} обозначается ее коэффициент, стоящий на месте (i, j), т.е. $a = (a_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Через $a = (a'_{ij})$ обозначается обратная к a матрица, а через a^t – транспонированная. Через e обозначается единичная матрица, а через e_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, – стандартная матричная единица. Для $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ и $\xi \in R$ через $t_{ij}(\xi) = e + \xi e_{ij}$ обозначается элементарная трансвекция. Для $\varepsilon \in R^*$ через $d_i(\varepsilon) = e + (\varepsilon - 1)e_{ii}$ обозначается элементарное псевдоотражение. Для двух элементов группы G через $[x, y]$ обозначается их левонормированный коммутатор $xyx^{-1}y^{-1}$.

При рассмотрении ортогональных групп нам будет удобно положить $l = [n/2]$ и занумеровать строки и столбцы матриц из G следующим образом: $1, \ldots, l, -l, \ldots, -1$, если $n = 2l$ четно, и $1, \ldots, l, 0, -l, \ldots, -1$, если $n = 2l + 1$ нечетно. При этом через ε_i обозначается знак i, равный $+1$ или -1.

Обозначим через $\mathrm{sdiag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ матрицу, у которой на побочной диагонали стоят $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ и нули во всех остальных местах, и положим $f = f_n = \mathrm{sdiag}(1, \ldots, 1)$, где число 1 равняется n. Иначе говоря, элементы матрицы $f = (f_{ij})$ определяются условием $f_{ij} = \delta_{i,-j}$. Определим теперь для нечетного $n = 2l + 1$ матрицу $F = F_n$ следующим образом: $F = \mathrm{sdiag}(1, \ldots, 1, 2, 1, \ldots, 1)$, где каждая серия 1 состоит из l членов. Иначе говоря, F_{2l+1} это клеточная матрица, у которой по побочной диагонали идут клетки $f_l, 2, f_l$, а все остальные клетки нулевые.

В настоящей работе мы предполагаем, что $2 \in R^*$. Строго говоря, это не является необходимым, так как результаты, аналогичные доказанным в настоящей работе, могут быть получены и без этого предположения. Однако, если 2 не является обратимой, то, во-первых, ортогональные группы следовало бы определять иначе, чем это сделаем мы, и, во-вторых, для нечетномерного случая заметно усложнились бы не только доказательства, но и формулировка основного результата.

В этом случае расщепимые ортогональные группы $\Gamma = \mathrm{SO}(n,R)$ состоят из тех матриц a из специальной линейной группы $\mathrm{SL}(n,R)$, которые сохраняют билинейную форму с матрицей Грама g, совпадающей с f_{2l} или F_{2l+1}, в зависимости от четности n. Иными словами, $\mathrm{SO}(2l,R)$ и $\mathrm{SO}(2l+1,R)$ состоят из тех матриц $a \in G$, для которых $\det a = 1$ и $aga^t = g$, где $g = f_{2l}$ или F_{2l+1} соответственно. Таким образом, группа $\mathrm{SO}(n,R)$ сохраняет квадратичную форму $x_1x_{-1} + \ldots + x_lx_{-l}$, если n четно, и форму $x_0^2 + x_1x_{-1} + \ldots + x_lx_{-l}$, если n нечетно.

Таким образом, для матричных элементов матриц $g = (g_{ij})$ из группы $\mathrm{GO}(n,R)$ выполняется следующее условие:

$$g'_{ij} = g_{-j,-i} \quad \text{для всех } i,j = 1,\ldots,-1.$$

Мы будем пользоваться следующими изоморфизмами

$$\mathrm{SO}(5,R) \cong \mathrm{GSp}(4,R)/\{\pm e\}, \quad \mathrm{SO}(6,R) \cong \mathrm{GL}(4,R)/\{\pm e\},$$

которые показывают, что на самом деле ортогональные группы отвечают не обычным, а расширенным группам других серий.

Как обычно, (элементарной) ортогональной трансвекцией называется одна из матриц $T_{ij}(\xi)$, $\xi \in R$, $i \neq \pm j$, вида

$$T_{ij}(\xi) = T_{-j,-i}(-\xi) = e + \xi e_{ij} - \xi e_{-j,-i},$$

если $i,j \neq 0$ (с точки зрения теории групп Шевалле это “длинный корневой элемент”), или

$$T_{i0}(\xi) = T_{0,-i}(-2\xi) = e + \xi e_{i0} - 2\xi e_{0,-i} - \xi^2 e_{i,-i},$$

в противном случае (“короткий корневой элемент”). Разумеется, элементы второго типа могут возникать только если n нечетно. Соотношения между ортогональными трансвекциями являются частными случаями коммутационной формулы Шевалле. Напомним совсем коротко, как конкретно они выглядят. Если все шесть индексов $\pm i$, $\pm j$, $\pm h$ попарно различны, то

$$\big[T_{ij}(\xi), T_{jh}(\zeta)\big] = T_{ih}(\xi\zeta),$$

$$\big[T_{i0}(\xi), T_{0j}(\zeta)\big] = T_{ij}(2\xi\zeta),$$

$$\big[T_{ij}(\xi), T_{j0}(\zeta)\big] = T_{i0}(\xi\zeta)T_{i,-j}(\xi\zeta^2).$$

Перечисленные выше формулы – это просто коммутационная формула Шевалле для следующих случаев: два длинных корня, сумма которых длинный корень; два коротких корня, сумма которых длинный корень; длинный и короткий корни, сумма которых корень. Во всех же остальных случаях, кроме перечисленных выше (а также, разумеется, тех, которые получаются из них заменой $T_{ij}(\xi)$ на $T_{-j,-i}(\xi)$), ортогональные трансвекции $T_{ij}(\xi)$ и $T_{hk}(\zeta)$ коммутируют.

В дальнейшем нам понадобятся также относительные элементарные группы $\mathrm{EO}(n, R, I)$, отвечающие идеалу $I \trianglelefteq R$. Напомним, что [абсолютная] элементарная ортогональная группа $\mathrm{EO}(n, R)$ порождена всеми элементарными ортогональными трансвекциями вида $T_{ij}(\xi)$, $\xi \in R$, $i \neq j$. С точки зрения теории алгебраических групп это есть элементарная группа Шевалле $E(\Phi, R)$, где Φ – система корней группы Г. Для полей и, более общо, для полулокальных и близких к ним колец группа $\mathrm{EO}(n, K)$ в точности совпадает с коммутантом ортогональной группы, обозначаемым обычно через $\Gamma^0 = \Omega(n, K)$ и называемым также **ядром спинорной нормы** (группа $\Omega(n, K)$ состоит из всех матриц со спинорной нормой 1).

Пусть теперь $I \trianglelefteq R$ – идеал кольца R. Ему отвечает группа $\mathrm{EO}(n, I)$, порожденная всеми элементарными ортогональными трансвекциями уровня I:

$$\mathrm{EO}(n, I) = \langle T_{ij}(\xi), \xi \in I, i \neq j \rangle.$$

Нормальное замыкание группы $\mathrm{EO}(n, I)$ в абсолютной элементарной группе $\mathrm{EO}(n, R)$ обозначается $\mathrm{EO}(n, R, I)$ и называется относительной элементарной группой уровня I:

$$\mathrm{EO}(n, R, I) = \mathrm{EO}(n, I)^{\mathrm{EO}(n,R)}.$$

При извлечении ортогональных трансвекций нам придется явно воспользоваться содержащимися в $\mathrm{EO}(n, R)$ полупростыми элементами. А именно, для любых $i = 1, \ldots, -1$, $\varepsilon \in R^*$, мы обозначаем через $D_i(\varepsilon)$ **длинный полупростой корневой элемент**

$$D_i(\varepsilon) = e - (\varepsilon - 1)e_{ii} - (\varepsilon^{-1} - 1)e_{-i,-i}.$$

Если, кроме того, $i \neq \pm j$, то $D_{ij}(\varepsilon)$ обозначает **короткий полупростой корневой элемент**

$$D_{ij}(\varepsilon) = e - (\varepsilon - 1)e_{ii} - (\varepsilon^{-1} - 1)e_{jj} - (\varepsilon^{-1} - 1)e_{-i,-i} - (\varepsilon - 1)e_{-j,-j}.$$

Как очень хорошо известно, матрицы $D_i(\varepsilon)$ и $D_{ij}(\varepsilon)$ выражаются как произведения элементарных ортогональных трансвекций, т.е. принадлежат $\mathrm{EO}(n, R)$.

§ 3. Извлечение ортогональных трансвекций

В настоящем параграфе мы сделаем один из ключевых шагов в направлении доказательства теоремы 1. А именно, мы рассматриваем подгруппу $H \leqslant \mathrm{SO}(n, R)$, содержащую борелевскую подгруппу B. Мы хотим научиться извлекать один нетривиальный корневой элемент $T_{ij}(\xi)$, $\xi \neq 0$, $i > j$, из матрицы $a \in H$, для которой $a_{ij} \neq 0$. В следующем параграфе мы покажем, что этого уже достаточно, чтобы завершить доказательство теоремы 1.

Предложение 1. *Пусть R – коммутативное кольцо, в котором существует единица. θ бесконечного порядка. Пусть далее H – подгруппа в четной ортогональной группе $G = \mathrm{SO}(2l, R)$, содержащая группу B. Тогда если в матрице $a = (a_{ij}) \in H$ имеем $a_{-1,1} \neq 0$, то существует $\alpha \in R, \alpha \neq 0$, такое что $T_{-2,1}(\alpha) \in H$.*

Разобьем доказательство этого предложения на последовательность лемм.

Лемма 1. *Пусть $a \in H$, $a_{-1,1} \neq 0$. Тогда существует матрица $b \in BaB$, такая что $b_{ij} \neq 0$ при всех $1 \leqslant i, j \leqslant -1$.*

Доказательство. Так как $a_{-1,1} \neq 0$, то найдутся $\alpha_1, \ldots, \alpha_{-2} \in R \setminus \{0\}$ такие, что в матрице

$$c = aT_{1,2}(\alpha_1)T_{1,3}(\alpha_1)\ldots T_{1,-2}(\alpha_{-2})$$

все элементы нижней строки, кроме последнего, отличны от нуля:

$$c_{-1,1}, c_{-1,2}, \ldots, c_{-1,-3}, c_{-1,-2} \neq 0.$$

Ненулевое вхождение на последней позиции получим рассмотрением матрицы

$$c' = cT_{l,-1}(\gamma),$$

где $\gamma \neq 0$ и такая, что $c'_{-1,-1}c'_{-l,-1} \neq 0$. Мы смотрим на два элемента, потому что происходит два прибавления.

Далее, существуют $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{-2} \neq 0$ такие, что в матрице

$$d = T_{2,-1}(\beta_2)T_{3,-1}(\beta_3)\ldots T_{-3,-1}(\beta_{-3})T_{-2,-1}(\beta_{-2})c'$$

имеем $d_{i,j} \neq 0$ при всех $2 \leqslant i \leqslant -1, 1 \leqslant j \leqslant -1$.

Наконец, существует $\delta \neq 0$ такое, что в матрице $b = T_{1,l}(\delta)d$ элементы $b_{1,1}, b_{-l,1} \neq 0$. Таким образом, матрица b удовлетворяет условию

$$b_{ij} \neq 0, \ 1 \leqslant i, j \leqslant -1. \qquad \square$$

Лемма 2. *Пусть $a \in H$, тогда найдутся такое натуральное m и такие $\delta_2, \dots, \delta_l \in R$, что s-й столбец a_{*s} матрицы a является собственным столбцом матрицы*

$$z = D_1(\theta^m) D_2(\theta^m) \dots D_l(\theta^m) T_{1,-2}(\theta^{-m}\delta_2) \dots T_{1,-l}(\theta^{-m}\delta_l)$$

$$= \begin{pmatrix} \theta^m & 0 & \dots & 0 & \delta_l & \dots & \delta_2 & 0 \\ 0 & \theta^m & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -\delta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \theta^m & 0 & \dots & 0 & -\delta_l \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \theta^{-m} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \theta^{-m} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \theta^{-m} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

отвечающим собственному числу θ^{-m}.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $b = za$. Мы хотим показать, что найдутся m и $\delta_2, \dots, \delta_l$ такие, что $b_{*s} = \theta^{-m} a_{*s}$. По определению

$$b_{*s} = \begin{pmatrix} \theta^m a_{1,s} + \sum\limits_{k=2}^{l} \delta_k a_{-k,s} \\ \theta^m a_{2,s} - \delta_2 a_{-1,s} \\ \vdots \\ \theta^m a_{l,s} - \delta_l a_{-1,s} \\ \theta^{-m} a_{-l,s} \\ \vdots \\ \theta^{-m} a_{-1,s} \end{pmatrix}$$

Займемся подбором таких m и $\delta_2, \dots, \delta_l$, что $b_{js} = \theta^{-m} a_{js}$ при всех $j \neq 1$. Это сводится к выполнению следующих уравнений:

$$\theta^m a_{ks} - \delta_k a_{-1,s} = \theta^{-m} a_{k,s}.$$

Иными словами, мы хотим, чтобы

$$(\theta^m - \theta^{-m}) a_{ks} = \delta_k a_{-1,s}.$$

Так как все фактор-кольцо $R/(a_{-1,s})$ конечно, а порядок θ бесконечен, то существует такое m, что

$$\theta^m \equiv \theta^{-m} \pmod{a_{-1,s}}.$$

В частности, $(\theta^m - \theta^{-m})a_{ks} = \delta_k a_{-1,s}$ при подходящих $\delta_2, \dots, \delta_l \in R$.

Нам остается еще убедиться в том, что при этом автоматически выполняется еще и равенство $b_{1s} = \theta^{-m}a_{1s}$. Это вытекает из ортогональности матриц a и z. В самом деле, по определению столбец x ортогональной матрицы лежит на квадрике

$$x_1x_{-1} + \ldots + x_lx_{-l} = 0.$$

Применяя это уравнение к столбцу b_{*s} получим

$$\begin{aligned}0 &= b_{1,s}b_{-1,s} + \ldots + b_{l,s}b_{-l,s}\\ &= b_{1,s}\theta^{-m}a_{-1,s} + \theta^{-2m}a_{2,s}a_{-2,s} + \ldots + \theta^{-2m}a_{l,s}a_{-l,s}\\ &= b_{1,s}\theta^{-m}a_{-1,s} + \theta^{-2m}\sum_{k=2}^{l} a_{k,s}a_{-k,s}\\ &= b_{1,s}\theta^{-m}a_{-1,s} - \theta^{-2m}a_{-1,s}a_{1,s}. \qquad (2)\end{aligned}$$

Тем самым,

$$b_{1,s}\theta^{-m}a_{-1,s} = \theta^{-2m}a_{-1,s}a_{1,s}.$$

Воспользовавшись тем, что R – область целостности, и произведя необходимые сокращения, мы видим, что $b_{1s} = \theta^{-m}a_{1s}$, как и утверждалось. □

Лемма 3. *Пусть $a \in H$, $a_{-1,1} \neq 0$. Тогда существует $b \in H$, такая что*

1) *последний столбец b совпадает с последним столбцом единичной матрицы, $b_{i,-1} = \delta_{i,-1}$, $1 \leqslant i \leqslant -1$;*

2) *$b_{-2,1} \neq 0$;*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $b = a^{-1}zaD_1(\theta^{-m})$, где z – матрица, построенная в лемме 2, для $s = -1$. Иными словами,

$$\begin{aligned}b = a^{-1}&D_1(\theta^m)D_2(\theta^m)\ldots D_l(\theta^m)\\ &T_{1,-2}(\theta^{-m}\delta_2)T_{1,-3}(\theta^{-m}\delta_3)\ldots T_{1,-l}(\theta^{-m}\delta_l)aD_1(\theta^{-m}),\end{aligned}$$

где $\delta_k = (\theta^m - \theta^{-m})a_{k,-1}/a_{-1,-1}$, $k = 2, \dots, l$. Лемма 2 гарантирует нам выполнение условия 1).

Непосредственное вычисление, использующее ортогональность матрицы b, показывет, что при этом

$$\begin{aligned} b_{-h,1} &= \left(\theta^m - \theta^{-m}\right)\sum_{k=1}^{l} a_{k,1}a'_{-h,k} + \sum_{k=2}^{l}\delta_k a_{-k,1}a'_{-h,1} - \sum_{k=2}^{l}\delta_k a_{-1,1}a'_{-h,k} \\ &= \left(\theta^m - \theta^{-m}\right)\sum_{k=1}^{l} a_{k,1}a_{-k,h} + \sum_{k=2}^{l}\delta_k a_{-k,1}a_{-1,h} - \sum_{k=2}^{l}\delta_k a_{-1,1}a_{-k,h} \\ &= \frac{\left(\theta^m - \theta^{-m}\right)}{a_{-1,-1}}\left(\sum_{k=1}^{l} a_{-1,-1}a_{k,1}a_{-k,h} + \sum_{k=2}^{l} a_{k,-1}\left(a_{-k,1}a_{-1,h} - a_{-1,1}a_{-k,h}\right)\right), \end{aligned}$$

для всех $-\lambda \leqslant h \leqslant -1$.

Если при этом $b_{-2,1} \neq 0$, лемма доказана. Если же $b_{-2,1} = 0$, то мы можем воспользоваться той же идеей, которая используется в доказательстве леммы 2 работы [1]. А именно, в этом случае мы предварительно заменим матрицу a на матрицу $c = aD_1(\varepsilon)a^{-1} \in H$. В этом случае

$$c_{ij} = \delta_{ij} + a_{i1}\epsilon - 1a'_{1j} + a_{i,-1}\epsilon^{-1} - 1a'_{-1,j}.$$

Положим теперь $b = c^{-1}zcD_1(\theta^{-m})$ и подставим эту формулу в полученное выше выражение для $b_{-h,1}$. Рассматривая $b_{-h,1}$ как многочлен от ε мы видим, что все слагаемые во второй сумме имеют нечетную степень, в то время как в первую сумму входят слагаемые степеней $-2, 0, 2$ по ε, коэффициенты при которых не могут одновременно быть равны 0. Тем самым, для почти всех ε, имеем $b_{-2,1} \neq 0$, как и утверждалось. □

Лемма 4. *Пусть $a \in H$, $a_{-2,1} \neq 0$. Тогда существует $\xi \in R$, $\xi \neq 0$, такое что $T_{-2,1}(\xi) \in H$.*

Доказательство. Заменяя, если нужно, матрицу a на матрицу $b = a^{-1}za$, построенную в леммах 2, 3, можно не теряя общности считать, что последний столбец матрицы a пропорционален последнему столбцу единичной матрицы, при этом по-прежнему $b_{-2,1} \neq 0$. [В силу ортогональности тогда то же самое верно и для первых строк].

Рассмотрим коммутатор $b = [a, D_1(\theta)]$, в силу нашего предположения он выглядит следующим образом

$$c = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ * & \ddots & & 0 & \\ \vdots & & \ddots & & \\ * & 0 & & \ddots & \\ * & * & \cdots & * & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу $c = [b, D_2(\theta)]$. Непосредственное вычисление показывает, что матрица c имеет вид

$$c = T_{21}(\xi a_{21}) T_{-2,1}(\zeta a_{-2,1}),$$

для некоторых ненулевых коэффициентов $\xi, \zeta \neq 0$. Теперь еще одно коммутирование дает нам

$$d = [c, D_1(\theta) D_2(\theta)] = T_{-2,1}(\eta a_{-2,1}) \in H,$$

для некоторого $\eta \neq 0$, как и утверждалось. □

Предложение 1 сразу вытекает из доказанных лемм 1–4.

§ 4. Доказательство теоремы 1

Предложение 1 позволяет извлекать элементарную ортогональную трансвекцию только в позиции $(-2, 1)$. Легко видеть, что любая подгруппа $H \leqslant \mathrm{SO}(n, R)$ такая, что $a_{-2,1} = 0$ для всех $a \in H$, приводима. В этом легко убедиться и в общем случае, однако для некоторого сокращения доказательства мы проверим это только для подгрупп, содержащих B. В действительности мы докажем следующий результат.

Предложение 2. *Предположим, что R – область целостности такая, что $|R^*| \geqslant 3$. Пусть $H \leqslant \mathrm{SO}(2l, R)$ – подгруппа, содержащая борелевскую подгруппу B. Если H не содержится в собственной стандартной параболической подгруппе, то найдется матрица $a \in H$, для которой $a_{-1,1} \neq 0$.*

Если теперь $a_{-2,1} = 0$, то в матрице $b = T_{-2,-1}(1)a \in H$ имеем $b_{-2,1} = a_{-1,1} \neq 0$, как и утверждалось.

Доказательство предложения 2 основано на следующей очевидной лемме.

Лемма 5. *Пусть $H \leqslant \mathrm{SO}(2l, R)$ – подгруппа, содержащая борелевскую подгруппу B. Если $a, b \in H$, такие что $a_{rq} \neq 0$ и $b_{qs} \neq 0$ для некоторых $1 \leqslant r, q, s \leqslant -1$, то найдется такая матрица $c \in H$, что $c_{rs} \neq 0$.*

Доказательство. Положим $c = aD_q(\theta^m)b$. Тогда

$$c_{rs} = \sum_{i=1}^{-1} a_{ri} b_{i,s} + a_{rq}(\theta^m - 1) b_{qs} + a_{r,-q}(\theta^{-m} - 1) b_{-q,s}.$$

Так как θ – единица бесконечного порядка, то выбором m можно добиться, чтобы этот элемент был отличен от нуля. □

Напомним, что при $r \neq l-1, l$ максимальная стандартная параболическая подгруппа P_r выглядит следующим образом:

$$P_r = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccccc} & & r & & & & -r & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ r \\ \\ \\ \\ -r \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} * & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} \end{array},$$

С другой стороны, параболические подгруппы P_{l-1} и P_l, отвечающие двум последним простым корням, выглядят следующим образом:

$$
P_{l-1} = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc} & & & l & -l & & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \\ l \\ -l \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
* & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
* & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & * & 0 & * & \cdots & * \\
* & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & * & 0 & * & \cdots & * \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & * & 0 & * & \cdots & *
\end{pmatrix}
\end{array},
$$

$$
P_l = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} & & l & & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ l \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
* & \cdots & * & * & \cdots & * \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
* & \cdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & * & \cdots & *
\end{pmatrix}
\end{array}. \qquad (3)
$$

Лемма 6. *В условиях предложения 2 для любого $1 \leqslant r \leqslant l-1$ найдется такая матрица $a \in H$, что $a_{r+1,r} \neq 0$.*

Доказательство. Пусть вначале $1 \leqslant r \leqslant l-2$. Так как подгруппа H не содержится в P_r, то найдется такая матрица $a \in H$, что $a_{st} \neq 0$, для некоторых $s > r$ и $t \leqslant r$. Если $s \leqslant l$, то переходя, если нужно, от матрицы a к одной из матриц

$$b = T_{r+1,s}(\xi)a,\ aT_{tr}(\zeta),\ T_{t+1,s}(\xi)aT_{tr}(\zeta),$$

где $\xi, \zeta \in R$, мы можем найти в H матрицу b, в которой $b_{r+1,r} \neq 0$. С другой стороны, если $s > l$, то в матрице $b = T_{-l,s}a$ имеем $b_{-l,t} \neq 0$. Переходя от b к одной из матриц вида

$$c = T_{r+1,-l}(\xi)a,\ aT_{tr}(\zeta),\ T_{r+1,s}(\xi)aT_{tr}(\zeta),$$

где $\xi, \zeta \in R$, мы снова найдем в H матрицу c, в которой $c_{r+1,r} \neq 0$.

Осталось показать, что в H есть матрица a, такая что $a_{l,l-1} \neq 0$. Так как H не содержится в P_l, то найдется матрица $a \in H$ такая, что $a_{st} \neq 0$, при некоторых $s > l$ и $t \leqslant l$.

Если $s \neq -l$, то рассмотрим $d = T_{-l,s}(\xi)a$, где $\xi \in R$. Заметим, что $d_{-l,t} \neq 0$.

Так как подгруппа H не содержится в P_l, то найдется $a \in H$, такая что $a_{st} \neq 0$, для некоторых $s \geqslant l$ и $t \leqslant -l$, и $s \neq -l$, $t \neq l$. Переходя, если нужно, к одной из матриц

$$b = T_{l,r}(\xi)a,\ aT_{s,-l}(\zeta),\ T_{lr}(\xi)aT_{s,-l}(\zeta),$$

где $\xi, \zeta \in R$, мы получим матрицу $c \in H$, такую что $c_{l,-l} \neq 0$.

Так как мы нашли две матрицы c и d из H такие, что $c_{l,-l} \neq 0$ и $d_{-l,t} \neq 0$, то по лемме 5 в H найдется и матрица x такая, что $x_{lt} \neq 0$. Если $t \neq l-1$, то рассмотрим матрицу $y = xT_{t,l-1}(\xi)$, где $\xi \in R$. Матрица y принадлежит H и $y_{l,l-1} \neq 0$. □

Теперь у нас все готово, чтобы завершить доказательство предложения 2.

Доказательство предложения 2. Покажем, прежде всего, что в H, есть матрица a, такая что $a_{l,1} \neq 0$. Проведем доказательство по индукции. По доказанной выше лемме существует $a \in H$, такое что $a_{21} \neq 0$. Предположим, что для некоторого $2 \leqslant k \leqslant l-1$ мы уже доказали, что найдется матрица $a \in H$ такая, что $a_{k1} \neq 0$. По лемме 6 мы знаем, что в H есть матрица $b \in H$ такая, что $b_{k+1,k} \neq 0$. Но тогда по лемме 5 в H найдется и матрица c такая, что $c_{k+1,1} \neq 0$.

С другой стороны, так как H не содержится в P_l, то найдется матрица $f \in H$ такая, что $f_{rs} \neq 0$, для некоторых $r > l$ и $s \leqslant l$. Переходя, если нужно, к одной из матриц вида

$$g = T_{-l,r}(\xi)f,\ fT_{sl}(\zeta),\ T_{-l,r}(\xi)fT_{sl}(\zeta),$$

где $\xi, \zeta \in R$, мы получим матрицу g для которой $g_{-l,l} \neq 0$.

Применяя теперь лемму 5 к матрицам $a, g \in H$, мы видим, что в H есть матрица h такая, что $h_{-l,1} \neq 0$. Еще раз применяя лемму 5, теперь к матрицам $a, h^{-1} \in H$, мы видим, что в H найдется матрица, элемент которой в позиции $(-1,1)$ отличен от 0, как и утверждалось в предложении 2. □

Комбинируя предложения 1 и 2, мы видим, что если содержащая борелевскую подгруппу B подгруппа $H \leqslant \mathrm{SO}(n,R)$ не содержится в собственной стандартной параболической подгруппе, то она содержит нетривиальный корневой элемент $T_{-2,1}(\xi)$ для некоторого $\xi \neq 0$. После этого завершение доказательства теоремы 1 представляет собой стандартное упражнение на применение коммутационной формулы Шевалле. Для полноты мы проделаем это упражнение.

А именно, для доказательства теоремы 1 нам остается показать, что любая такая подгруппа H содержит относительную элементарную подгруппу

$$\mathrm{EO}(2l, R, I) = \langle T_{ij}(\zeta),\ i \neq \pm j,\ \zeta \in I\rangle^{\mathrm{EO}(2l,R)}$$

для некоторого ненулевого идеала $I \neq 0$. Докажем, прежде всего, что H содержит элементарную подгруппу

$$\mathrm{EO}(2l, I) = \langle T_{ij}(\zeta),\ i \neq \pm j,\ \zeta \in I\rangle$$

для некоторого идеала $I \neq 0$.

Мы уже знаем, что H содержит некоторый нетривиальный корневой элемент $T_{-2,1}(\xi)$. Теперь ясно, что для любого $\eta \in R$ и любого $3 \leqslant k \leqslant -3$ имеем

$$T_{k,1}(\eta\xi) = [T_{k,-2}(\eta), T_{-2,1}(\xi)] \in H.$$

Коммутируя теперь $T_{k1}(\eta\xi)$ со всевозможными $T_{ij}(1)$, $1 \leqslant i < j \leqslant l$, мы видим, что $T_{hk}(R\xi) \leqslant H$ для всех $1 \leqslant k < h \leqslant -1$, $(h,k) \neq (-2,1)$. Но тогда, конечно,

$$T_{-2,1}(R\xi^2) = [T_{-2,-3}(R\xi), T_{-3,1}(\xi)] \subseteq H.$$

Суммируя сказанное выше, мы видим, что H содержит элементарную группу $\mathrm{EO}(2l, R\xi^2)$. Для завершения доказательства нам остается лишь сослаться на следующий факт:

$$\mathrm{EO}(2l, I) \leqslant \mathrm{EO}(2l, R, I^2),$$

см., например, [27, 32]. Таким образом, $\mathrm{EO}(2l, R, R\xi^4) \leqslant H$, как и утверждалось. Теорема 1 полностью доказана.

§ 5. Заключительные замечания

Естественно возникает задача обобщения наших результатов на группы Шевалле исключительных типов. Она сформулирована, например, в последнем параграфе статьи [28].

Проблема 1. *Доказать аналог теоремы* 1 *для групп Шевалле* $G(\Phi, R)$ *всех типов над коммутативным кольцом* R*, все собственные фактор-кольца которого конечны и в котором существует единица бесконечного порядка.*

Мы уверены, что описанная в [28], вариация 11, стратегия должна сработать и в общем случае, хотя даже для нечетной ортогональной группы, не говоря уже про исключительные группы, детали вычислений будут заметно сложнее, чем для рассмотренных нами в [1] и в настоящей работе случаев.

Для дедекиндовых колец арифметического типа теорема 2 может быть доведена до совершенно явного описания. Для этого нужно явно вычислить некоторые фактор-группы. А именно, как и в [8, 1] и настоящей работе, описание надгрупп B в группах Шевалле дается в терминах следующего класса подгрупп. Пусть Φ – приведенная неприводимая система корней. Набор $\sigma = (\sigma_\alpha)$, $\alpha \in \Phi$, идеалов кольца R называется сетью идеалов в R типа Φ, если $\sigma_\alpha \sigma_\beta \leqslant \sigma_{\alpha+\beta}$ каждый раз как $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Phi$. С каждой такой сетью связывается элементарная подгруппа

$$E(\sigma) = \big\langle x_\alpha(\xi),\ \alpha \in \Phi,\ \xi \in \sigma_a \big\rangle$$

– в классических случаях это в точности подгруппы, в терминах которых дается ответ в теореме 2 работы [1] и в теореме 2 настоящей работы. Чуть сложнее определить группу $G(\sigma)$, определенную сравнениями по модулю σ, это проделано в работах второго автора и Евгения Плоткина [15].

При описании надгрупп B можно ограничиться параболическими сетями, для которых $\sigma_\alpha = R$ для всех $\alpha \in \Phi^+$. Стандартное описание надгрупп B состоит в том, что для каждой такой подгруппы $H \leqslant G(\Phi, R)$ существует единственнная параболическая сеть идеалов σ типа Φ в R такая, что $E(\sigma) \leqslant H \leqslant G(\sigma)$. Таким образом, полное описание таких подгрупп сводится к вычислению фактор-группы $G(\sigma)/E(\sigma)$.

Стоит отметить также связь наших результатов с работой Кристиана Венцеля [34], в которой получено описание параболических *подсхем* в редуктивных группах. Там аналогичные явления возникают уже на уровне *поля* положительной характеристики.

В свою очередь, вычисление этой факторгруппы сводится к вычислению двух фактор-групп совершенно разной природы. А именно, общий случай легко сводится к случаю, когда все идеалы σ_α ненулевые, или, что то же самое, подгруппа $E(\sigma)$ имеет конечный индекс в $G(\Phi, R)$. Пусть теперь $F(\sigma)$ – наименьшая конгруэнц-подгруппа в $G(\Phi, R)$, содержащая $E(\sigma)$. Тогда $G(\sigma)/F(\sigma)$ легко вычисляется в терминах мультипликативных групп $(R/I)^*$ для подходящих идеалов I в R. Гораздо интереснее устроена фактор-группа $F(\sigma)/E(\sigma)$, которая теснейшим образом связана со значениями K_1-функтора.

Сформулируем, как с нашей точки зрения должен выглядеть ответ, по крайней мере в несимплектическом случае. Фигурирующий в следующей задаче функтор SK_1 это обычный линейный функтор.

Проблема 2. *Пусть R – дедекиндово кольцо арифметического типа с бесконечной мультипликативной группой, а σ – сеть идеалов в R типа Φ без нулевых идеалов. Тогда $E(\sigma) \trianglelefteq F(\sigma)$, причем*

$$F(\sigma)/E(\sigma) = \mathrm{SK}_1\left(R, \sum_{\alpha\in\Phi^+} \sigma_\alpha\sigma_{-\alpha}\right).$$

Как нам кажется, при помощи теорем о стабилизации решение этой задачи должно сводиться к рассмотренному Леонидом Васерштейном [17] случаю SL_2, примерно в том же духе, как это сделано в [5, 8, 13] для группы SL_n.

В заключение сформулируем еще одну задачу, решение которой в настоящее время представляется вполне реальным. А именно, в работах второго автора и Игоря Голубчика [9, 18, 12] аналогичные результаты получены для классических групп над конечномерными и произвольными коммутативными кольцами. В такой общности нельзя, разумеется, надеяться на описание всех надгрупп B, но можно описать надгруппы [групп точек] не слишком маленьких параболических подгрупп.

Проблема 3. *Пусть R – произвольное коммутативное кольцо, а P – параболическая подгруппа в группе Шевалле $G(\Phi, R)$. Обозначим через Δ тип подгруппы Леви подгруппы P. Предположим, что $\Delta^\perp = \emptyset$. Тогда в $G(\Phi, R)$ имеет место стандартное описание подгрупп, содержащих P.*

Мы уверены, что в настоящее время имеются все инструменты, необходимые для полного решения этой задачи для исключительных групп, хотя технически это, вероятно, будет совсем непросто.

Литература

1. А. В. Александров, Н. А. Вавилов, *Параболические подгруппы* SL_n *и* Sp_{2l} *над дедекиндовым кольцом арифметического типа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **375** (2010), 5–21.
2. Х. Басс, Дж. Милнор, Ж.-П. Серр, *Решение конгруэнц-проблемы для* SL_n *(*$n \geqslant 3$*) и* Sp_{2n} *(*$n \geqslant 2$). — Математика (период. сб. перев. ин. статей) **14**, No. 6 (1970), 64–128; **15**, No. 1 (1971), 44–60.
3. З. И. Боревич, *О параболических подгруппах в линейных группах над полулокальным кольцом.* — Вестн. Ленингр. ун-та **13** (1976), 16–24.
4. З. И. Боревич, *О параболических подгруппах в специальной линейной группе над полулокальным кольцом.* — Вестн. Ленингр. ун-та **19** (1976), 29–34.
5. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, В. Наркевич, *О подгруппах полной линейной группы над дедекиндовым кольцом.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **94** (1979), 13–20.
6. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли.* Гл. IV–VI. Мир, М. (1972). Гл. VII, VIII (1978).
7. Н. А. Вавилов, *О параболических конгруэнц-подгруппах в линейных группах.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **64** (1976), 55–63.
8. Н. А. Вавилов, *Параболические подгруппы полной линейной группы над дедекиндовым кольцом арифметического типа.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **71** (1977), 66–79.
9. Н. А. Вавилов, *Подгруппы полной линейной группы над кольцом, содержащие группу клеточно треугольных матриц.* I, II. — Вестн. Ленингр. ун-та **19** (1977), 139–140; **13** (1982), 5–10.
10. Н. А. Вавилов, *О параболических подгруппах групп Шевалле над полулокальным кольцом.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **75** (1978), 43–58.
11. Н. А. Вавилов, *О параболических подгруппах групп Шевалле скрещенного типа над полулокальным кольцом.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **94** (1979), 21–36.
12. Н. А. Вавилов, *Параболические подгруппы групп Шевалле над коммутативным кольцом.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **116** (1982), 20–43.
13. Н. А. Вавилов, *О группе* SL_n *над дедекиндовым кольцом арифметического типа.* — Вестн. Ленингр. ун-та **7** (1983), 5–10.
14. Н. А. Вавилов, *О подгруппах полной линейной группы над дедекиндовым кольцом арифметического типа.* — Изв. ВУЗ'ов **12** (1987), 14–20.
15. Н. А. Вавилов, Е. Б. Плоткин, *Сетевые подгруппы групп Шевалле.* I, II. – Зап. науч. семин. ЛОМИ **94** (1979), 40–49; **114** (1982), 62–76.
16. Н. А. Вавилов, А. В. Степанов, *Надгруппы полупростых групп.* — Вестн. Самарского ун-та, Естественнонаучная сер. **3** (2008), 51–95.
17. Л. Н. Васерштейн, *О группе* SL_2 *над дедекиндовыми кольцами арифметического типа.* — Мат. Сб. **89**, No. 2 (1972), 313–322.
18. И. З. Голубчик, *О подгруппах полной линейной группы над ассоциативным кольцом.* — Всесоюзн. Алгебр. конф., тез. докл. **1** (1981), 39–40.
19. Е. В. Дыбкова, *О некоторых конгруэнц-подгруппах симплектической группы.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **64** (1976), 80–91.

20. Н. С. Романовский, *О подгруппах общей и специальной линейных группах над кольцом.* — Мат. Заметки **9** No. 6 (1971), 699–708.
21. Ж.-П. Серр, *Проблема конгруэнц-подгрупп для* SL_2. — Математика (период. сб. перев. ин. статей) **15**, No. 6 (1971), 12–45.
22. A. Bak, N. Vavilov, *Structure of hyperbolic unitary groups.* I. *Elementary subgroups.* — Algebra Colloq. **7**, 2 (2000), 159–196.
23. R. Hazrat, N. Vavilov, *Bak's work on* K*-theory of rings* (*with an appendix by Max Karoubi*) — J. K-Theory **4** 1 (2009), 1–65.
24. W. van der Kallen, *Stability for* K_2 *of Dedekind rings of arithmetic type.* — Lecture Notes Math. **854** (1981), 217–248.
25. B. Liehl, *On the group* SL_2 *over orders of arithmetic type.* — J. reine angew. Math. **323**, No. 1 (1981), 153–171.
26. H. Matsumoto, *Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples deployés.* — Ann. Sci.École Norm. Sup., 4$^{\text{ème}}$ sér. **2** (1969), 1–62.
27. M. R. Stein, *Generators, relations and coverings of Chevalley groups over commutative rings.* — Amer. J. Math. **93**, 4 (1971), 965–1004.
28. A. Stepanov, N. Vavilov, *Decomposition of transvections: a theme with variations.* — K-Theory **19** (2000), 109–153.
29. K. Suzuki, *On parabolic subgroups of Chevalley groups over local rings.* — Tôhoku Math. J. **28**, No. 1 (1976), 57–66.
30. K. Suzuki, *On parabolic subgroups of Chevalley groups over commutative rings.* — Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku **13**, No. 366-382 (1977), 86–97.
31. J. Tits, *Théorème de Bruhat et sous-groupes paraboliques.* — C. R. Acad. Sci Paris **254** (1962), 2910–2912.
32. J. Tits, *Systèmes générateurs de groupes de congruences.* — C. R. Acad. Sci. Paris, Sér A **283** (1976), 693–695.
33. N. Vavilov, *Intermediate subgroups in Chevalley groups.* — Proc. Conf. Groups of Lie Type and their Geometries (Como – 1993), Cambridge Univ. Press (1995), 233–280.
34. C. Wenzel, *Classification of all parabolic subgroup-schemes of a reductive linear algebraic group over an algebraically closed field.* — Trans. Amer. Math. Soc. **337**, No. 1 (1993), 211–218.

Batalkin K. O., Vavilov N. A. Parabolic subgroups of SO_{2l} over a Dedekind ring of arithmetic type.

Let R be a commutative ring all of whose proper factor rings are finite and such that there exists a unit of infinite order. We show that for a subgroup P in $G = \mathrm{SO}(2l, R)$, $l \geqslant 3$, containing Borel subgroup B, the following alternative holds. Either P contains a relative elementary subgroup E_I for some ideal $I \neq 0$, or H is contained in a proper standard parabolic subgroup. For Dedekind rings of arithmetic type this allows, under some mild additional assumptions on units, to completely describe overgroups of B in G. Earlier, similar results for the special linear and symplectic groups were obtained by A. V. Alexandrov and the second author. The proofs in the present paper follow the same general strategy, but are noticeably harder, from a technical viewpoint.

С.-Петербургский государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: batalkin@gmail.com,
nikolai-vavilov@yandex.ru

Поступило 16 мая 2012 г.