Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 400, 2012 г.

С. С. Афанасьева, Б. М. Беккер, С. В. Востоков

СИМВОЛ ГИЛЬБЕРТА В МНОГОМЕРНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ ДЛЯ ФОРМАЛЬНОЙ ГРУППЫ ЛЮБИНА–ТЕЙТА

§1. Введение

Вопросу о нахождении явного выражения символа норменного вычета Гильберта в локальном поле посвящено множество работ. В работе [1] были найдены явные формулы для символа Гильберта через разложение элементов α и β в ряды по локальной униформизирующей. Далее, в работе [2] результаты работы [1] были обобщены на группу точек формальной группы Любина–Тейта. В [3] формулы для спаривания Гильберта были получены для случая многомерного локального поля. В [4] (см. введение) описан общий метод получения явных формул (Куммеровского типа). Формальные группы Любина–Тейта определены также и над кольцом целых многомерного локального поля и изучались в [5]. В настоящей работе получены явные формулы для спаривания с формальным модулем Любина–Тейта для многомерного локального поля, которые являются обобщением формул [2] на многомерное локальное поле. В статье рассмотрен случай нулевой характеристики предпоследнего поля вычетов.

§2. Обозначения

Пусть K – n-мерное локальное поле, т.е. последовательность полных дискретно нормированных полей $K = K_n, K_{n-1}, \ldots, K_0$, где каждое последующее поле является полем вычетов предыдущего, причем K_0 – конечно. Мы будем рассматривать случай, когда K_1 – поле нулевой характеристики, в этом случае поле K имеет вид $K = k((t_2))\ldots((t_n))$, где $k = K_1$ – конечное расширение $\mathbb{Q}_p$.
Введем основные обозначения:

- $q = p^f$ – число элементов поля K_0.

Ключевые слова: формальные группы Любина–Тейта, символ Гильберта, многомерные локальные поля.

Авторы благодарят Санкт-Петербургский государственный университет за поддержку исследования.

- L – конечное расширение n-мерного поля K, в нашем случае L имеет вид $L = L_1((T_2))\dots((T_n))$, где L_1 – конечное расширение K_1, $L_i = L_1((T_2))\dots((T_i))$.
- $\overline{v} = (v_L^{(1)}, \dots, v_L^{(n)}) : L \to \mathbb{Z}^n$ – нормирование ранга n.
- $\mathcal{O}_{K_1}, \mathcal{O}_{L_1}$ кольца целых одномерных локальных полей K_1 и L_1 соответственно, $\mathfrak{M}_{K_1}, \mathfrak{M}_{L_1}$ – их максимальные идеалы.
- T_1, T_0 – подполя инерции в расширениях L_1/K_1 и $L_1/\mathbb{Q}_p$ соответственно. $\mathcal{O}_{T_1}, \mathcal{O}_{T_0}$ – кольца целых полей T_1, T_0.
- $\mathfrak{R}$ – мультипликативная система представителей поля $L_0(= T_0)$ в L_1, $\mathfrak{R} \subset T_1$.
- Frob – автоморфизм Фробениуса в T_1/K_1.
- Tr – оператор следа в T_1/K_1.
- π – простой элемент $\mathcal{O}_{K_1}$, $(\pi, t_2, \dots, t_n)$ – система локальных параметров поля K.
- Π – простой элемент $\mathcal{O}_{L_1}$, $(\Pi, T_2, \dots, T_n)$ – система локальных параметров поля L, $\overline{v}(T_i) = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, для $2 \leqslant i \leqslant n$, $\overline{v}(\Pi) = (1, 0, \dots, 0)$.
- $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K, \mathcal{O}_L$ – кольца целых n-мерных локальных полей K и L относительно n-мерного нормирования.
- $\mathfrak{M}_K, \mathfrak{M}_L$ – максимальные идеалы колец $\mathcal{O}_K$ и $\mathcal{O}_L$. Нетрудно видеть, что

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_{K_1} + t_2K_1[[t_2]] + t_3K_1((t_2))[[t_3]] + \cdots t_{n-1}K_1((t_2)) \\
\dots((t_{n-2}))[[t_{n-1}]] + t_nK_1((t_2))\dots((t_{n-1}))[[t_n]], \\
\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_{L_1} + T_2L_1[[T_2]] + T_3L_1((T_2))[[T_3]] + \cdots T_{n-1}L_1((T_2)) \\
\dots((T_{n-2}))[[T_{n-1}]] + T_nL_1((T_2))\dots((T_{n-1}))[[T_n]], \\
\mathfrak{M}_K = \mathfrak{M}_{K_1} + t_2K_1[[t_2]] + t_3K_1((t_2))[[t_3]] + \cdots t_{n-1}K_1((t_2)) \\
\dots((t_{n-2}))[[t_{n-1}]] + t_nK_1((t_2))\dots((t_{n-1}))[[t_n]], \\
\mathfrak{M}_L = \mathfrak{M}_{L_1} + T_2L_1[[T_2]] + T_3L_1((T_2))[[T_3]] + \cdots T_{n-1}L_1((T_2)) \\
\dots((T_{n-2}))[[T_{n-1}]] + T_nL_1((T_2))\dots((T_{n-1}))[[T_n]].
\end{aligned}
$$

- $\mathfrak{M}_1^{(K)} = \{a \in \mathcal{O}_K : (v_L^{(2)}(a), v_L^{(3)}(a), \dots, v_L^{(n)}(a)) \geqslant (1, 0, \dots, 0)\}$.
- $\overline{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ – индекс ветвления L/K, т.е. для $2 \leqslant i \leqslant n$ $\overline{v}(t_i) = (0, \dots, e_i, \dots, 0)$, $\overline{v}(\pi) = (e_1, 0, \dots, 0)$.
- $F(X, Y) \in \mathcal{O}_K[[X, Y]]$ – формальная группа Любина–Тейта над кольцом $\mathcal{O}_K$ (см. ниже), с логарифмом $\lambda(X)$.
- $F(\mathfrak{M}_L)$ – соответствующий формальный $\mathcal{O}_K$-модуль.

- $\Psi_L\colon K_n^{\mathrm{top}}(L) \longrightarrow \mathrm{Gal}(L^{\mathrm{ab}}/L)$ – отображение взаимности *à* la Паршин–Като из топологической группы Милнора поля L в группу Галуа максимального абелева расширения поля L.
- $W_F^N := \mathrm{Ker}[\pi^N] \subset L$.

§3. Вспомогательные и известные результаты

3.1. Формальные группы Любина–Тейта над кольцом целых многомерного локального поля. Пусть π – элемент кольца $\mathcal{O}_K$ такой, что его вычет в поле K_1 является простым элементом. Рассмотрим множество

$$E_\pi = \{l(X) \in \mathcal{O}[[X]] : l(X) \equiv \pi X \mod \deg 2,\, l(X) \equiv X^q \mod \mathfrak{M}_K\}.$$

Как и в одномерном случае можно получить, что для любого $l(X) \in E_\pi$ существует единственная формальная группа $F_\pi(X,Y)$ над $\mathcal{O}$ такая, что $l(X)$ – ее эндоморфизм. Такие формальные группы называют формальными группами Любина–Тейта, соответствующими эндоморфизму $l(X)$. Пусть $F(X,Y) \in \mathcal{O}_K[[X,Y]]$ – формальная группа Любина–Тейта над кольцом $\mathcal{O}_K$ и $\lambda(X)$ – ее логарифм. Нетрудно убедиться в том, что, как и в одномерном случае, $\mathrm{End}(F) \approxeq \mathcal{O}$. Эндоморфизм группы F, соответствующий элементу $a \in \mathcal{O}$, будем обозначать $[a](X)$, как и в одномерном случае $[a](X) = \lambda^{-1}(a\lambda(X))$. В работе [5] были получены следующие утверждения:

Предложение 1. *Пусть $\lambda(X) - \pi^{-1}\lambda(X^q) \in \mathcal{O}[[X]]$. Тогда для простого элемента π_1 поля K_1 выполнено условие $\lambda(X) - \pi_1^{-1}\lambda(X^q) \in \mathcal{O}[[X]]$ в том и только в том случае, когда $\pi - \pi_1 \in \mathfrak{M}_1^{(K)}$.*

Таким образом, по любой формальной группе Любина–Тейта с точностью до $\mathfrak{M}_1^{(K)}$ определяется простой элемент $\pi(F)$ и однозначно определяется элемент $\overline{\pi}(F) \in \mathcal{O}/\mathfrak{M}_1^{(K)}$. При этом легко видеть, что $\mathcal{O}/\mathfrak{M}_1^{(K)} \approx \mathcal{O}_{K_1}$ (см. [5], предложение 3). В работе [5] также была доказана:

Теорема 1. *Формальные группы Любина–Тейта $F(X,Y)$ и $G(X,Y)$ изоморфны над $\mathcal{O}$ тогда и только тогда, когда $\overline{\pi}(F) = \overline{\pi}(G)$, причем в этом случае они строго изоморфны.*

Отсюда легко видеть, что любая формальная группа Любина–Тейта над кольцом $\mathcal{O}$ строго изоморфна некоторой одномерной формальной группе Любина–Тейта над кольцом $\mathcal{O}_{K_1}$, соответствующей, однозначно определенному, простому элементу π кольца $\mathcal{O}_{K_1}$. В классе изоморфных групп Любина–Тейта содержится формальная группа F_a с логарифмом Артина–Хассе:

$$\lambda_a(X) = X + \frac{X^q}{\pi} + \frac{X^{q^2}}{\pi^2} + \dots$$

Лемма 1. *Пусть F – формальная группа Любина–Тейта над $\mathcal{O}_{K_1}$ с логарифмом λ. Тогда λ можно представить в виде:*

$$\lambda(X) = c_0(X)X + c_1(X)\frac{X^q}{\pi} + c_2(X)\frac{X^{q^2}}{\pi^2} + \cdots,$$

где $c_0 \equiv 1 \mod \deg 1$, $c_i(X) \in \mathcal{O}_{K_1}[[X]]$.

Доказательство. Пусть $\lambda(X) = \sum\limits_{i\geqslant 1} c_i X^i$. Достаточно показать, что $v_{K_1}(c_i) > -k$, при $i < q^k$. Поскольку F – формальная группа Любина–Тейта, то ее логарифм удовлетворяет условию $\lambda(X) - \pi^{-1}\lambda(X^q) \in \mathcal{O}_{K_1}[[X]]$, откуда следует утверждение леммы. $\square$

3.2. Многомерный символ Гильберта. Для формальной группы F над $\mathcal{O}$ символ Гильберта определяется следующим образом:

$$(\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_F = (\cdot,\cdot)^N_{F,L} : K_n^{\mathrm{top}}(L) \times F(\mathfrak{M}_L) \to W_F^N$$
$$(\alpha,\beta)^N_{F,L} = \Psi_L(\alpha)(\widetilde{\beta}) -_F \widetilde{\beta},$$

где $\widetilde{\beta}$ берется из пополнения алгебраического замыкания L и является корнем уравнения $[\pi^N]_F(\widetilde{\beta}) = \beta$. Нетрудно видеть, что символ Гильберта обладает следующими свойствами.

H.1: Аддитивность по первому аргументу и $\mathcal{O}$-линейность по второму, т.е.

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = (\alpha_1,\beta) +_F (\alpha_2,\beta),$$
$$(\alpha, [a](\beta)) = [a](\alpha,\beta),$$
$$(\alpha, \beta_1 +_F \beta_2) = (\alpha,\beta_1) +_F (\alpha,\beta_2),$$

для всех $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in K_n^{\mathrm{top}}(L)$, $\beta, \beta_1, \beta_2 \in F(\mathfrak{M}_L)$ и $a \in \mathcal{O}$.

H.2: $(\alpha,\beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha$ – норма в $K_n^{\mathrm{top}}(L(\widetilde{\beta}))/K_n^{\mathrm{top}}(L)$.

H.3: Если формальная группа G изоморфна F и $G = f(F(f^{-1}(X), f^{-1}(Y))$ для $f \in \mathcal{O}[[X]]_0$, то

$$(\alpha,\beta)_G = f((\alpha, f^{-1}(\beta))_F).$$

3.3. Модуль кривых Картье мультипликативной группы многомерного локального поля. Пусть

$$\mathcal{H} = \langle X\rangle \times \langle T_2\rangle \times \cdots \times \langle T_n\rangle \times \mathfrak{R} \times \mathcal{U}_m,$$

где

$$\mathcal{U}_m = 1 + \mathcal{O}'_M,$$

$$\mathcal{O}'_M = \left\{ \sum_{i\in I, i>0} a_i X^{i_1} T_2^{i_2} \cdots T_n^{i_n} : a_i \in \mathcal{O}_{T_0} \right\}.$$

Имеется следующий (неканонический) эпиморфизм:

$$\eta : \mathcal{H} \longrightarrow L^*,$$
$$\alpha(X) \to \alpha(\Pi).$$

Для каждого $\alpha \in L^*$ выберем прообраз $\underline{\alpha}$ относительно эпиморфизма η:

$$\underline{\alpha} \in \mathcal{H}, \quad \underline{\alpha}(\Pi) = \alpha.$$

Пусть $\mathcal{E}is(X) = \pi + a_1 X + \cdots + a_{e_1} X^{e_1} + \cdots \in \mathcal{O}_{T_1}[[X]]$ – ряд Эйзенштейна для Π, т.е. $a_1, \ldots, a_{e-1}$ делятся на π, a_e – обратим в $\mathcal{O}_{K_1}$ и $\eta(\mathcal{E}is(X)) = \mathcal{E}is(\Pi) = 0$. Обозначим $U_{\mathcal{E}is}$ следующую подгруппу $\mathcal{H}$:

$$U_{\mathcal{E}is} = \{1 + \mathcal{E}is(X)\cdot\varphi(X) : \varphi(X) \in \mathfrak{M}_{X,T}\}.$$

В [7] было доказано:

Предложение 2. 1) *Пусть* $\rho(X) \in \mathcal{O}_{K_1}[[X]]$, $\rho(\Pi) = 0$. *Тогда* $\rho(X)$ *делится на* $\mathcal{E}is(X)$ *в кольце* $\mathcal{O}_{K_1}[[X]]$.
2) *Имеет место точная последовательность групп:*

$$1 \longrightarrow U_{\mathcal{E}is} \longrightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{\eta} L^* \longrightarrow 1.$$

3.4. Функции Артина–Хассе. Множество $\mathbb{Z}^n$ предполагается лексикографически упорядоченным. Напомним, что $\Omega \subset \mathbb{Z}^n$ называется *допустимым набором*, если для любого $1 \leqslant l \leqslant n$ при каждом наборе целых $j_{l+1}, \dots, j_n$ существует целое $i = i(j_{l+1}, \dots, j_n)$ такое, что

$$(i_1, \dots, i_n) \in \Omega,\ i_{l+1} = j_{l+1}, \dots, i_n = j_n \Longrightarrow i_l \geqslant i.$$

Пусть $Y = (Y_2, \dots, Y_n)$. Рассмотрим следующий аддитивный $\mathcal{O}$-модуль:

$$\mathfrak{M}_{X,Y} = \left\{ \alpha(X,Y) = \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_n)\geqslant(1,0,\dots,0)\\ (i_1,\dots,i_n)\in\Omega_\alpha}} a_{i_1,\dots,i_n} X^{i_1} Y_2^{i_2} \cdots Y_n^{i_n} : a_{i_1,\dots,i_n} \in \mathcal{O}_{T_1} \right\},$$

где Ω_α – допустимые. Пусть $F(\mathfrak{M}_{X,Y})$ – $\mathcal{O}$-модуль, в котором сложение происходит по формальному групповому закону F, т.е.

$$\alpha(X,Y) +_F \beta(X,Y) = F(\alpha(X,Y), \beta(X,Y)),$$

а кольцо $\mathcal{O}$ действует следующим образом:

$$a\alpha(X,Y) = [a](\alpha(X,Y)), \quad a \in \mathcal{O},$$

Имеется следующий (неканонический) сюръективный гомоморфизм $\mathcal{O}$-модулей:

$$\begin{aligned} F(\mathfrak{M}_{X,Y}) &\xrightarrow{\eta_F} F(\mathfrak{M}_L), \\ \alpha(X,Y) &\mapsto \alpha(\Pi, T_2, \dots, T_N). \end{aligned}$$

На $\mathfrak{M}_{X,Y}$ определим оператор Фробениуса Δ:

$$\begin{aligned} &\Delta(a) = \operatorname{Frob} a, \ \text{для } a \in \mathcal{O}_{T_1}, \\ &\Delta(X) = X^q, \\ &\Delta(Y_i) = Y_i^q, \quad 2 \leqslant i \leqslant n. \end{aligned}$$

Определим функции Артина–Хассе:

$$E_F : \mathfrak{M}_{X,Y} \longrightarrow F(\mathfrak{M}_{X,Y}),$$

$$E_F(\varphi) = \lambda^{-1}\Big(1 + \frac{\Delta}{\pi} + \frac{\Delta^2}{\pi^2} + \cdots\Big)(\varphi) = \lambda^{-1}\left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\varphi^{\Delta^r}}{\pi^r}\right),$$

$$l_F : F(\mathfrak{M}_{X,Y}) \longrightarrow \mathfrak{M}_{X,Y},$$

$$l_F(\psi) = \left(1 - \frac{\Delta}{\pi}\right)\lambda(\psi).$$

Как и в одномерном случае, легко видеть, что функции E_F и l_F корректно определены и задают взаимно обратные изоморфизмы между соответствующими модулями. Для рядов $\varphi, \psi \in \mathfrak{M}_{X,Y}$ будем говорить, что $\varphi \equiv \psi \mod \deg(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, если $\varphi - \psi \in X^{i_1} Y_2^{i_2} \cdots Y_n^{i_n} \mathfrak{M}_{X,Y}$. Обозначим

$$\mathcal{E}(X) = \lambda^{-1} \circ \lambda_a(X). \tag{1}$$

Лемма 2. (1) *Если* $\theta \in \mathfrak{R}$, $(i_1, i_2, \ldots, i_n) > (0, \ldots, 0)$, *то*

$$E_F(\theta X^{i_1} Y_1^{i_2} \ldots Y_n^{i_n}) = \mathcal{E}(\theta X^{i_1} Y_1^{i_2} \ldots Y_n^{i_n}).$$

(2) *Если* $\varphi, \psi \in \mathfrak{M}_{X,Y}$, *то*

$$E_F(\varphi + \psi) = E_F(\varphi) +_F E_F(\psi),$$
$$l_F(\varphi +_F \psi) = l_F(\varphi) + l_F(\psi).$$

(3) *Если* $a \in \mathcal{O}$, $\varphi \in \mathfrak{M}_{X,Y}$, *то*

$$E_F(a\varphi) = [a] E_F(\varphi),$$
$$l_F([a](\varphi)) = a l_F(\varphi).$$

(4) *Если* $\varphi \equiv a X^{i_1} Y_2^{i_2} \cdots Y_n^{i_n} \mod \deg(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, *то*

$$E_F(\varphi) \equiv a X^{i_1} Y_2^{i_2} \cdots Y_n^{i_n} \mod \deg(i_1, i_2, \ldots, i_n).$$

Доказательство. 1) $\theta^{\Delta} = \theta^{\mathrm{Frob}} = \theta^q$, поэтому

$$\begin{aligned}
&E_F(\theta X^{i_1} Y_1^{i_2} \ldots Y_n^{i_n}) \\
&\quad = \lambda^{-1}\left(\theta X^{i_1} Y_1^{i_2} \ldots Y_n^{i_n} + \frac{\theta^{\mathrm{Frob}} X^{q i_1} Y_1^{q i_2} \ldots Y_n^{q i_n}}{\pi} + \cdots\right) \\
&\quad = \lambda^{-1}\left(\theta X^{i_1} Y_1^{i_2} \ldots Y_n^{i_n} + \frac{(\theta X^{i_1} Y_1^{i_2} \ldots Y_n^{i_n})^q}{\pi} + \cdots\right) \\
&\qquad\qquad = \lambda^{-1} \circ \lambda_a(\theta X^{i_1} Y_1^{i_2} \ldots Y_n^{i_n}).
\end{aligned}$$

2)–4) следуют непосредственно из определения и того, что $[a](X) = \lambda^{-1}(a\lambda(X))$. □

Далее вместо $Y = (Y_2, \ldots, Y_n)$ будем сразу писать $T = (T_2, \ldots, T_n)$.

3.5. Аддитивное разложение.

Определение 1. *Множество допустимых наборов* $\{\Omega_i : i \in I\}$ *будем называть допустимым, если оно обладает следующими свойствами:*

1) $\bigcup\limits_{i\in I} \Omega_i$ *– допустимый набор,*

2) $\bigcap\limits_{j\in J} \Omega_j = \varnothing$, *где* J *– любое бесконечное подмножество* I.

Пусть каждой паре $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\theta \in \mathfrak{R}$ сопоставлен фиксированный ряд

$$a_{r,\theta} = \theta \Pi^{r_1} T_2^{r_2} \cdots T_n^{r_n} + \sum_{s \in \Omega_{r,\theta}, s > r} \theta_s^{r,\theta} \Pi^{s_1} T_2^{s_2} \cdots T_n^{s_n},$$

где $\Omega_{r,\theta}$ – допустимый набор и $\theta_s^{r,\theta} \in \mathfrak{R}$.
Требование $(*)$: требуем, чтобы для любого допустимого набора Ω множество допустимых наборов $\{\Omega_{r,\theta} | r \in \Omega, \theta \in \mathfrak{R}\}$ являлось допустимым.

Замечание 1. *В качестве* $a_{r,\theta}$ *можно взять*

$$a_{r,\theta} = \begin{cases} \theta \Pi^{r_1} T_2^{r_2} \cdots T_n^{r_n} & \text{если } r \leqslant 0 \\ E_F(\theta X^{r_1} T_2^{r_2} \cdots T_n^{r_n}) \mid_{X=\Pi}, & \text{если } r > 0 \end{cases}$$

Требование $(*)$ *при таком выборе выполняется.*

В работе [6] был получен следующий результат.

Теорема 2. *Для любого допустимого набора* Ω *при любом выборе* θ_r *ряд*

$$\sum_{r\in\Omega} a_{r,\theta_r}$$

сходится, причем каждый элемент $\alpha \in L$ *можно единственным образом представить в виде суммы такого ряда.*

3.6. Дополнительные обозначения. Заметим, что если для всех r из допустимого набора Ω выполнено неравенство $r > (0, \dots, 0)$, то суммирование в теореме 2 можно заменить на формальное суммирование $\sum_F$. Как сказано выше, любая формальная группа Любина–Тейта над $\mathcal{O}$ строго изоморфна одномерной формальной группе, т.е. формальной группе Любина–Тейта над кольцом $\mathcal{O}_{K_1}$. Поэтому далее, для простоты будем считать группу F одномерной. Пусть ξ – первообразный корень изогении $[\pi^N]$, т.е. $\xi \in W_F^N \setminus W_F^{N-1}$ (он лежит в $\mathfrak{M}_{L_1}$, т.к. мы предположили, что формальная группа F одномерная, т.е. $F(X,Y) \in \mathcal{O}_{K_1}[[X,Y]]$). И пусть $\xi = c_0\Pi^{r_N} + c_1\Pi^{r_N+1} + \ldots$ – некоторое его разложение в ряд по простому элементу Π с коэффициентами из $\mathcal{O}_{T_1}$. Обозначим

$$z(X) = c_0X^{r_N} + c_1X^{r_N+1} + \cdots, \quad s(X) := [\pi^N](z).$$

Рассмотрим ряды:

$$s_m := [\pi^m](z), \quad s := s_N,$$

$$u = \mathrm{Eis}_F(X) := \frac{s}{s_{N-1}} = \frac{[\pi](s_{N-1})}{s_{N-1}} \in \mathcal{O}_{T_1}[[X]].$$

Нетрудно проверить (см. [2, сравнение (20)]), что

$$\frac{1}{s} \equiv \frac{1}{s_{N-1}^{\Delta}} \mod \pi^N. \tag{2}$$

Лемма 3. $\mathrm{Eis}_F(X)$ – *ряд Эйзенштейна для* Π.

Доказательство. См. [7, 1.8, лемма 5]. □

Для $1 \leqslant k \leqslant n$ обозначим

$$\mathfrak{M}_{X,T,k} := \Big\{ \sum_{i\in I} a_{i_1,\ldots,i_k} X^{i_1}T_2^{i_2}\cdots T_k^{i_k} : a_{i_1,\ldots,i_k} \in \mathcal{O}_{T_1}, \\ I \text{ – допустимый} \quad i_k > 0 \Big\} \subset \mathfrak{M}_{X,T}.$$

Ясно, что $\mathfrak{M}_{X,T,k} \cap \mathfrak{M}_{X,T,l} = \varnothing$, при $l \neq k$.
Вместо $(i_1,\ldots,i_n)$ иногда будем писать просто i, $\overline{0} = (0,\ldots,0)$. $L_k = L_1((T_2))\cdots((T_k))$ – k-мерное поле, $L_n = L$, $\mathcal{O}_{L_k}$ – его кольцо целых относительно одномерного нормирования $v_L^{(k)}$.

Лемма 4. *Любой элемент $\eta \in \mathfrak{M}_{X,T}$ можно представить в виде $\eta = \eta_1 + \ldots + \eta_n$, где $\eta_k \in \mathfrak{M}_{X,T,k}$.*

Доказательство. Пусть $\eta \in \mathfrak{M}_{X,T}$, тогда η имеет вид $\eta = \sum_{i\in I} a_iX^{i_1}T_2^{i_2}\cdots T_n^{i_n}$, где I – допустимый набор, причем $i > 0$ для всех $i \in I$. Рассмотрим следующие множества

$$
\begin{aligned}
&I_1 := \{i \in I \mid (i_2, \ldots, i_n) = \overline{0}\},\\
&I_k := \{i \in I \mid (i_{k+1}, \ldots, i_n) = \overline{0},\ i_k > 0\},\ 2 \leqslant k < n,\\
&I_n := \{i \in I \mid i_n \neq 0\}.
\end{aligned}
$$

Очевидно, что I_k допустимые, $\bigcup\limits_{k=1}^{n} I_k = I$, $I_k \cap I_l = \varnothing$, $k \neq l$. Положим

$$\eta_k = \sum_{i \in I_k} a_i X^{i_1} T_2^{i_2} \ldots T_n^{i_n}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 5. *Пусть* $\eta \in \mathfrak{M}_{X,T}$, $\eta = \eta_1 + \ldots + \eta_n$, $\eta_k \in \mathfrak{M}_{X,T,k}$. *Если* $\eta(\Pi) = 0$, *то* $\eta_k(\Pi) = 0$ *при всех* $1 \leqslant k \leqslant n$.

Доказательство. Пусть $0 = \eta(\Pi) = \sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k(\Pi)$. Очевидно, что $\eta_k(\Pi) \in \mathcal{O}_{L_k}$. Для $0 \leqslant k \leqslant n$ рассмотрим следующие отображения:

$$
\begin{gathered}
R_k : \mathcal{O}_L \longrightarrow \mathcal{O}_{L_k},\\
R_k(\alpha) = \text{вычет элемента } \alpha \text{ в } \mathcal{O}_{L_k}.
\end{gathered}
$$

Тогда для $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$0 = R_k(\eta(\Pi)) - R_{k-1}(\eta(\Pi)) = R_k(\eta_k(\Pi)) = \eta_k(\Pi).$$

□

Предложение 3. *Пусть* $1 \leqslant k \leqslant n$ *и* $\eta \in \mathfrak{M}_{X,T,k}$. *Тогда если* $\eta(\Pi) = 0$, *то существует* $\varphi(X) \in \mathfrak{M}_{X,T,k}$ *такой, что* $\eta = u(X) \cdot \varphi(X)$.

Доказательство. $\mathfrak{M}_{X,T,1} = \mathcal{O}_{T_1}[[X]]$, поэтому для $k = 1$ утверждение леммы было доказано в лемме 6, §3 работы [1]. Далее по индукции: при $k > 1$:

$$\eta = \eta(X, T_2, \ldots, T_k) = \sum_{i \in I} a_i X^{i_1} T_2^{i_2} \cdots T_k^{i_k} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(X, T_2, \ldots, T_{k-1}) T_k^j.$$

здесь $I \in \mathbb{Z}^k$ – допустимый набор,

$$a_j(X, T_2, \ldots, T_{k-1}) = \sum_{i \in I_j} a_j^{(i)} X^{i_1} T_2^{i_2} \cdots T_{k-1}^{i_{k-1}}.$$

$I_j = \{i \in I : i_k = j\}$ – допустимый, т.к. I таковой, поэтому $i \in I_j \Longrightarrow i_{k-1} > i(j)$. Таким образом,

$$a_j(X, T_2, \ldots, T_{k-1}) = T_{k-1}^{i_j} \sum_{i \in I_j} a_j^{(i)} X^{i_1} T_2^{i_2} \cdots T_{k-1}^{i_{k-1}-i_j} \in T_{k-1}^{i_j} \eta',$$

где $\eta' \in \mathfrak{M}_{X,T,k-1}$, причем $\eta'(\Pi) = 0$, т.к. $a_j(\Pi) = 0$. Тогда по индукции получаем нужное разложение. □

Следствие 1. *Если $\eta \in \mathfrak{M}_{X,T}$ и $\eta_F(\eta) = \eta(\Pi) = 0$, то найдется $\psi(X) \in \mathfrak{M}_{X,T}$ такой, что $\eta = u(X) \cdot \psi(X)$.*

Доказательство. В силу леммы 4 $\eta = \eta_1 + \ldots + \eta_n$, где $\eta_k \in \mathfrak{M}_{X,T,k}$. По лемме 5 $\eta_k(\Pi) = 0$ при всех $1 \leqslant k \leqslant n$, поэтому из предложения 3 следует, что существуют $\varphi_k(X) \in \mathfrak{M}_{X,T,k}$ такие, что $\eta_k = u(X) \cdot \varphi_k(X)$. Таким образом, $\eta = \sum_{k=1}^{n} \eta_k = u(x) \cdot \sum \varphi_k(X)$.

Положим $U_F = \{\mathrm{Eis}_F(X) \cdot \varphi(X) : \varphi(X) \in F(\mathfrak{M}_{X,T})\}$. Следствие 1 означает, что $\mathrm{Ker}\, \eta_F = U_F$, поэтому следующая последовательность $\mathcal{O}$-модулей точная:

$$0 \longrightarrow U_F \longrightarrow F(\mathfrak{M}_{X,T}) \xrightarrow{\eta_F} F(\mathfrak{M}_L) \longrightarrow 0.$$

□

§4. Арифметика формального модуля. Базис Шафаревича.

В этом параграфе будет построен базис Шафаревича формального модуля $F(\mathfrak{M}_L)$. Введем следующее обозначение:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} := T_2 L_1[[T_2]] + T_3 L_1((T_2))[[T_3]] + \cdots T_{n-1} L_1((T_2)) \\ \ldots((T_{n-2}))[[T_{n-1}]] + T_n L_1((T_2)) \ldots ((T_{n-1}))[[T_n]] \\ = \Big\{ \sum_{i \in I} a_{(i_1,\ldots i_n)} \Pi^{i_1} T_2^{i_2} \cdots T_n^{i_n} : a_{(i_1,\ldots i_n)} \in \mathcal{O}_{T_1}, \\ (i_2, \ldots, i_n) > (0, \ldots, 0), \quad I \text{ – допустимый набор} \Big\}.\end{aligned}$$

$F(\mathcal{A})$ – соответствующий формальный модуль.

Лемма 6. *В формальном модуле $F(\mathfrak{M}_L)$ идеал $\mathcal{A}$ является $[\pi]$-делимым, т.е. для всякого α из идеала $\mathcal{A}$ найдется $\beta \in \mathcal{A}$, для которого $[\pi](\beta) = \alpha$.*

Доказательство. Среди изоморфных групп Любина–Тейта есть группа, у которой изогения $[\pi]$ имеет вид $[\pi]_{F_0}(X) = \pi X + X^q$. Утверждение леммы достаточно доказать для такой группы F_0. Положим $\beta_1 = \pi^{-1}\alpha_1$, где $\alpha_1 = \alpha$, тогда

$$[\pi]_{F_0}(\beta_1) = \alpha_1 + \pi^{-q}\alpha_1^q \equiv \alpha_1 \mod \pi^{-q}\alpha_1^q,$$

т.е. $\alpha_2 := \alpha_1 -_F [\pi](\beta_1) \equiv 0 \mod \pi^{-q}\alpha_1^q$. Аналогичным образом находим элемент β_2 такой, что $[\pi]_{F_0}(\beta_2) \equiv \alpha_2 \mod \pi^{-q}\alpha_2^q$ и т.д. Теперь положим $\beta = \sum_F \beta_i$. Легко видеть, что $[\pi]_{F_0}(\beta) = \alpha$. □

Следствие 2. *Для любых $\alpha \in K_n^{\mathrm{top}}(L)$ и $\beta \in \mathcal{A}$ имеет место:*

$$(\alpha, \beta) = 0.$$

Доказательство. По лемме найдется такой элемент $\gamma \in \mathcal{A}$, что $[\pi^N](\gamma) = \beta$, поэтому

$$(\alpha, \beta) = (\alpha, [\pi^N](\gamma)) = [\pi^N](\alpha, \gamma) = 0.$$

□

Лемма 7. *Любой элемент β из модуля $F(\mathcal{A})$ представим в виде*

$$\beta = E_F(u(X, T_2, \ldots, T_n))\,|_{X=\Pi},$$

где $u(X, T_2, \ldots, T_n) = \sum\limits_{i>0} \theta_i X^{i_1} T_2^{i_2} \cdots T_n^{i_n}$, $\theta_i \in \mathfrak{R}$, $i = (i_1, \ldots, i_n)$ из некоторого допустимого набора. Причем такое разложение определено однозначно.

Доказательство. Выберем $a_{r,\theta}$ как в замечании 1. Утверждение леммы следует из теоремы 2 и леммы 2. □

4.1. Примарные элементы. Напомним, что элемент ω из группы $F(\mathfrak{M}_L)$ называется π^N-примарным, если расширение поля L, полученное делением точки ω на изогению $[\pi^N]$, неразветвлено (чисто неразветвлено). В работе [2] были построены примарные элементы для одномерного формального модуля Любина–Тейта $F(\mathfrak{M}_{L_1})$. В [2] было доказано следующее предложение (см. [2, предложение 1]).

Предложение 4. *Элемент*

$$\omega(a) = E_F(as)\,|_{X=\Pi},$$

где $a \in \mathcal{O}_{T_1}$, является π^N-примарным.

В силу леммы 6, ясно что любой примарный элемент группы $F(\mathfrak{M}_L)$ отличается от π^N-примарного элемента из $F(\mathfrak{M}_{L_1})$ на элемент, делящийся на изогению $[\pi^N]$.

Предложение 5. *Для любых* $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L^*$ *и* $a \in \mathcal{O}_{T_1}$ *выполнено*

$$((\alpha_1, \dots, \alpha_n), \omega(a)) = [\delta \operatorname{Tr} a](\xi), \tag{3}$$

где $\delta = \det(v_L^{(j)}(\alpha_i))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Доказательство. Покажем сперва, что

$$((\Pi, T_2, \dots, T_n), \omega(a)) = [\operatorname{Tr} a](\xi).$$

Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} K_n^{\mathrm{top}} L_i & \xrightarrow{\Psi_{L_i}} & \operatorname{Gal}(L_i^{\mathrm{ab}}/L_i) \\ {\scriptstyle \partial_{v_L^{(i)}}}\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ K_n^{\mathrm{top}} L_{i-1} & \xrightarrow{\Psi_{L_{i-1}}} & \operatorname{Gal}(L_{i-1}^{\mathrm{ab}}/L_{i-1}) \end{array}$$

является коммутативной (см. [10, 7.2.2]). Поэтому, так как $K_1 L = L^*$, коммутативна будет и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} K_n^{\mathrm{top}} L & \xrightarrow{\Psi_L} & \operatorname{Gal}(L^{\mathrm{ab}}/L) \\ {\scriptstyle \partial_{\overline{v}}}\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ L_1^* & \xrightarrow{\Psi_{L_1}} & \operatorname{Gal}(L_1^{\mathrm{ab}}/L_1), \end{array}$$

где $\partial_{\overline{v}} = \partial_{v_L^{(1)}} \circ \dots \circ \partial_{v_L^{(n)}}$. Можно проверить, что $\partial_{\overline{v}}(\Pi, T_2, \dots, T_n) = \Pi$, поэтому, поскольку $\omega(a) \in L_1$, получаем $((\Pi, T_2, \dots, T_n), \omega(a)) = (\Pi, \omega(a))_F^1 = [\operatorname{Tr} a](\xi)$, здесь $(\cdot,\cdot)_F^1$ – одномерный символ.

Осталось проверить (3) в общем случае. Пусть один из элементов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, например, $\alpha_1 = \varepsilon$ – единица в L^*. Тогда ε является нормой в неразветвленном расширении $L(\widetilde{\omega(a)})/L$, где $[\pi^N](\widetilde{\omega(a)}) = \omega(a)$, из чего следует, что символ $(\alpha_1 = \varepsilon, \dots, \alpha_n)$ является нормой в $K_n^{\mathrm{top}}(L(\widetilde{\omega(a)}))$ и, таким образом, по свойству Н.2 $((\alpha_1, \dots, \alpha_n), \omega(a)) = 0$. Предложение доказано. □

4.2. Базис Шафаревича. Пусть G_ρ, $0 \leqslant \rho \leqslant f-1$ – формальные группы Любина–Тейта, построенные по изогениям $[\pi]_0 = \pi X + X^q$, $[\pi]_\rho = \pi X + \pi X^{p^\rho} + X^q$, $\rho \geqslant 1$, соответственно. Пусть $\mathcal{E}_\rho$, $0 \leqslant \rho \leqslant f-1$, – степенные ряды, задающие изоморфизмы групп G_ρ в группу

F соответственно (т.е. $\mathcal{E}_\rho = \lambda^{-1} \circ \lambda_\rho$, где λ_ρ – логарифм формальной группы G_ρ).

Предложение 6. *Всякий элемент α из формального модуля $F(\mathfrak{M}_L)$ можно представить в виде*

$$\alpha = \omega(a) +_F \sum_{i,\rho,\theta} [a_i](\mathcal{E}_\rho(\theta\Pi^i)) +_F E_F(u(X, T_2, \dots, T_n))|_{X=\Pi},$$

где

$$a \in \mathcal{O}_{T_1}, \quad a_i \in \mathcal{O}_{K_1}, \quad \theta \in \mathfrak{R},$$
$$1 \leqslant i < \frac{qe_1}{q-1}, \quad (i,p) = 1,$$
$$u(X, T_2, \dots, T_n) = \sum_{(j_2,\dots,j_n)>(0,\dots,0)} \theta_{(j_1,\dots,j_n)} X^{j_1} T_2^{j_2} \cdots T_n^{j_n}$$
$$j = (j_1, \dots, j_n) \quad \text{\textit{пробегает допустимый набор} } J.$$

Доказательство. Легко видеть, что $F(\mathfrak{M}_L) = F(\mathfrak{M}_{L_1}) \oplus_F F(\mathcal{A})$. В работе [11](предложение 5.2.2) было показано, что набор элементов $\{\mathcal{E}_\rho(\theta\Pi^i), \omega(a)\}$ составляет систему образующих $\mathcal{O}$-модуля $F(\mathfrak{M}_{L_1})$. Для завершения доказательства остается применить лемму 7. □

§5. Спаривание на рядах.

Определим спаривание

$$[\cdot,\cdot] : \mathcal{H}^n \times F(\mathfrak{M}_{X,T}) \longrightarrow \mathcal{O}_{T_1} \mod \pi^N$$

следующим образом: для $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{H}^n$ и $\beta \in F(\mathfrak{M}_{X,T})$ положим

$$[\alpha, \beta] = \operatorname{res}_X \Phi(\alpha, \beta) \cdot \frac{1}{s},$$

где

$$\Phi(\alpha,\beta) = l_F(\beta)\alpha_1^{-1} d\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n^{-1} d\alpha_n - \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q^{n-i}} l_m(\alpha_i) \alpha_1^{-1} d\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{i-1}^{-1} d\alpha_{i-1} \wedge \alpha_{i+1}^{-\Delta} d\alpha_{i+1}^{\Delta} \wedge \dots \wedge \alpha_n^{-\Delta} d\alpha_n^{\Delta} \wedge d(\lambda(\beta)^{\Delta}), \quad (4)$$

$$\operatorname{res}_X = \operatorname{res}_{XT_1 \cdots T_n},$$

а функция l_m задана на $\mathcal{H}$ равенством:

$$l_m(\alpha) = \frac{1}{q}\log\frac{\alpha^q}{\alpha^\Delta}.$$

Замечание 2. Ряд $\frac{1}{s}$ можно рассматривать в кольце $\mathcal{O}_{T_1}\{X\}$ (см. [2]), где

$$\mathcal{O}_{T_1}\{X\} = \left\{\sum_{i\in\mathbb{Z}} d_i X^i : d_i \in \mathcal{O}_{T_1},\, d_i \xrightarrow[d_i\to-\infty]{} 0\right\}.$$

Замечание 3. Ряд Φ можно записать в виде:

$$\Phi(\alpha,\beta) = l_F(\beta)D_{n+1} - \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q^{n-i}}l_m(\alpha_i)D_i,$$

где

$$D_{n+1} = \det\left(\alpha_i^{-1}\partial_j\alpha_i\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n},$$

$$D_i = \begin{vmatrix} \alpha_1^{-1}\partial_1\alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{-1}\partial_n\alpha_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i-1}^{-1}\partial_1\alpha_{i-1} & \cdots & \alpha_{i-1}^{-1}\partial_n\alpha_{i-1} \\ \partial_1((\lambda(\beta))^\Delta) & \cdots & \partial_n((\lambda(\beta))^\Delta) \\ \alpha_{i+1}^{-\Delta}\partial_1\alpha_{i+1}^\Delta & \cdots & \alpha_{i+1}^{-\Delta}\partial_n\alpha_{i+1}^\Delta \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n^{-\Delta}\partial_1\alpha_n^\Delta & \cdots & \alpha_n^{-\Delta}\partial_n\alpha_n^\Delta \end{vmatrix}.$$

Здесь

$$\partial_i = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial X}, & i=1 \\ \frac{\partial}{\partial T_i}, & 2\leqslant i\leqslant n \end{cases}.$$

Так же, как и в [7, лемма 8], можно показать, что ряд $\Phi(\alpha,\beta)(X)$ имеет целые коэффициенты (из $\mathcal{O}_{T_1}$).

5.1. Основные свойства спаривания $[\cdot,\cdot]$**.** Точно таким же образом, как и в работе [7] можно получить

Предложение 7. *Спаривание* $[\cdot,\cdot]$ *обладает следующими свойствами.*

1) *Аддитивность*

$$\begin{gathered}[(\alpha_1,\cdots,\alpha_i\alpha_i',\cdots,\alpha_n),\beta]\\ =[(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_n),\beta]+[(\alpha_1,\cdots,\alpha_i',\cdots,\alpha_n),\beta],\\ [\alpha,\beta+_F\beta']=[\alpha,\beta]+[\alpha,\beta'],\\ [\alpha,[a](\beta)]=a[\alpha,\beta], a\in\mathcal{O}.\end{gathered}$$

2) *Гиперболичность*

$$[(\ldots,\alpha,\ldots,-\alpha,\ldots),\beta]=0.$$

3) *Соотношение Стейнберга*

$$[(\ldots,\alpha,\ldots,1-\alpha,\ldots),\beta]=0,$$

если $1-\alpha\in\mathcal{H}$.

4) *Кососимметричность*

$$[(\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_k,\ldots),\beta]=-[(\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_i,\ldots),\beta].$$

5) *Символьное свойство:*
Пусть $\mathcal{E}(X)=\lambda^{-1}\circ\lambda_a(X),\mathcal{E}_\rho=\lambda^{-1}\circ\lambda_\rho$, $0\leqslant\rho\leqslant f-1$ *(см.* (1)*), тогда*

$$\begin{gathered}[(\ldots,\alpha_{i-1},\alpha,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n),\mathcal{E}(\alpha)]=0,\\ [(\ldots,\alpha_{i-1},\alpha,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n),\mathcal{E}_\rho(\alpha)]=0.\end{gathered}$$

Для $\mathcal{H}$ обычным путем (с помощью образующих и соотношений) определим K-группу Милнора $K_n(\mathcal{H})$. Свойства 1) и 3) предложения 7 означают, что спаривание $[\cdot,\cdot]$ индуцирует спаривание

$$[\cdot,\cdot]:K_n(\mathcal{H})\times F(\mathfrak{M}_{X,T})\longrightarrow\mathcal{O}_{T_1}\mod\pi^N.$$

§6. Спаривание $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и его свойства.

Определим спаривание

$$\begin{gathered}\langle\cdot,\cdot\rangle:K_n(\mathcal{H})\times F(\mathfrak{M}_{X,T})\longrightarrow W_F^N,\\ \langle\alpha,\beta\rangle=[\mathrm{Tr}[\alpha,\beta]](\xi).\end{gathered}\tag{5}$$

Пусть $\mathcal{H}_{\mathrm{Eis}}$ – подгруппа в $K_n(\mathcal{H})$, порожденная символами $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$, для которых хотя бы один из элементов α_i лежит в $U_{\mathcal{E}is}$.

Теорема 3. *Спаривание $\langle\cdot,\cdot\rangle$ индуцирует спаривание:*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \frac{K_n(\mathcal{H})}{(\mathcal{H}_{\mathcal{E}is} + \pi^N K_n(\mathcal{H}))} \times \frac{F(\mathfrak{M}_{X,T})}{(U_F +_F [\pi^N](F(\mathfrak{M}_{X,T})))} \longrightarrow W_F^N.$$

Следствие 3. *$\langle\cdot,\cdot\rangle$ независимо, т.е: если естественным образом определить спаривание $\langle\cdot,\cdot\rangle : K_n^{\mathrm{top}}(L) \times F(\mathfrak{M}_L) \to W_F^N$, а именно: для $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K_n^{\mathrm{top}}(L)$ и $\beta \in F(\mathfrak{M}_L)$ положим $\langle\alpha,\beta\rangle := \langle\underline{\alpha},\underline{\beta}\rangle$, (где $\underline{\alpha} = (\underline{\alpha_1}, \ldots, \underline{\alpha_n}) \in \mathcal{H}^n$ и $\underline{\beta} \in F(\mathfrak{M}_{X,T})$ – прообразы α и β соответственно), то полученное спаривание не будет зависеть от выбора прообразов.*

6.1. Доказательство теоремы 3.

6.1.1. *Независимость спаривания $\langle\cdot,\cdot\rangle$ по второму аргументу.* В этом пункте мы проверим, что спаривание $\langle\cdot,\cdot\rangle$ независимо по второму аргументу, для этого, в силу следствия 1 достаточно проверить, что модуль $U_F +_F [\pi^N](F(\mathfrak{M}_{X,T}))$ лежит в правой части ядра спаривания $\langle\cdot,\cdot\rangle$. $[\pi^N](F(\mathfrak{M}_{X,T}))$ очевидно там лежит.

Предложение 8. *Пусть $\beta \in U_F$, $\alpha \in K_n(\mathcal{H})$. Тогда*

$$\langle\alpha,\beta\rangle = 0$$

для всех $\alpha \in K_n(\mathcal{H})$.

Введем следующие обозначения:

$$Q(X) = \frac{[\pi](X)}{X} = \pi + \ldots \in \mathcal{O}_{K_1}[[X]],$$
$$Q_1(X) := \frac{Q(X) - \pi}{X},\ R(X) = Q_1(s_{N-1}(X)) \in \mathcal{O}_{T_1}[[X]].$$

Тогда

$$u = \frac{s}{s_{N-1}} = \frac{[\pi](s_{N-1})}{s_{N-1}} = Q(s_{N-1}) = \pi + s_{N-1}R(X). \tag{6}$$

Легко видеть, что $Q(X) \equiv X^{q-1} \mod \pi$, $s_{N-1} \equiv z^{q^{N-1}} \mod \pi$, откуда $Q_1(X) \equiv \frac{Q(X)}{X} \equiv X^{q-2} \mod \pi$, поэтому

$$R \equiv z^{q^{N-1}(q-2)} \mod \pi. \tag{7}$$

Лемма 8. 1) *Для* $\alpha \in \mathcal{H}$ *выполнено*

$$\partial_k(\alpha^{\Delta^i}) = \begin{cases} q^i T_k^{-1} \Delta^i (T_k \partial_k \alpha), & 2 \leqslant k \leqslant n \\ q^i X^{-1} \Delta^i (X \partial_1 \alpha), & k = 1 \end{cases}. \tag{8}$$

2)

$$\partial_1([\pi^m](X)) \equiv 0 \mod \pi^m. \tag{9}$$

Доказательство. 1) следует непосредственно из определения, 2) легко проверяется индукцией. □

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathcal{H}$, $\beta \in U_F$. По определению U_F, $\beta = u(X) \cdot \varphi(X)$, $\varphi \in \mathfrak{M}_{X,T}$.

Лемма 9. *Пусть* $\alpha \in \mathcal{H}$, *тогда*

$$\operatorname{res} l_m(\alpha) \partial_k \left(\frac{\Delta}{\pi} \lambda(\beta) \right) \frac{1}{s} \equiv - \operatorname{res} \partial_k (l_m(\alpha)) \left(\frac{\Delta}{\pi} \lambda(\beta) \right) \frac{1}{s} \mod \pi^N.$$

Доказательство. Из (2) следует, что $\frac{1}{s}$ можно заменить на $\frac{1}{s_{N-1}^{\Delta}}$. Очевидно, что $\operatorname{res} \partial_k \left(l_m(\alpha) \left(\frac{\Delta}{\pi} \lambda(\beta) \right) \frac{1}{s_{N-1}^{\Delta}} \right) = 0$, поэтому достаточно показать, что

$$\operatorname{res} \left(\frac{\Delta}{\pi} \lambda(\beta) \right) \cdot l_m(\alpha) \cdot \partial_k \frac{1}{s_{N-1}^{\Delta}} \equiv 0 \mod \pi^N. \tag{10}$$

Поскольку $s_{N-1} \in \mathcal{O}_{T_1}[[X]]$, то $\partial_k \frac{1}{s_{N-1}} = 0$ при $k \neq 1$, поэтому остается проверить (10) для $k = 1$. Далее $\partial = \partial_1$. Из (8) получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta}{\pi} \lambda(\beta) \right) \cdot l_m(\alpha) \cdot \partial \frac{1}{s_{N-1}^{\Delta}} &= \left(\frac{\Delta}{\pi} \lambda(\beta) \right) \cdot l_m(\alpha) q X^{-1} \left(X \partial \frac{1}{s_{N-1}} \right)^{\Delta} \\ &= X^{-1} \left(\frac{q}{p} l_m(\alpha) \right) \frac{p}{\pi} \left(\frac{\Delta}{\pi} \lambda(\beta) \right) \left(\pi X \partial \frac{1}{s_{N-1}} \right)^{\Delta} \\ &= X^{-1} \left(\frac{q}{p} l_m(\alpha) \right) \frac{p}{\pi} \left(\frac{\lambda(\beta)}{\pi} \cdot \pi X \partial \frac{1}{s_{N-1}} \right)^{\Delta}. \end{aligned}$$

Ряд $\frac{q}{p} l_m(\alpha)$ имеет целые коэффициенты (из $\mathcal{O}_{T_1}$) (см. [7, 2.3, лемма 8]). Покажем, что

$$\left(\frac{\lambda(\beta)}{\pi} \cdot \pi X \partial \frac{1}{s_{N-1}} \right) \equiv 0 \mod (\pi^N, \deg \overline{0}). \tag{11}$$

По лемме 1

$$\lambda(X) = c_0(X)X + c_1(X)\frac{X^q}{\pi} + c_2(X)\frac{X^{q^2}}{\pi^2} + \cdots + c_k(X)\frac{X^{q^k}}{\pi^k} + \cdots .$$

Откуда, учитывая (6), получаем:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\lambda(\beta)}{\pi}\cdot \pi X\partial\frac{1}{s_{N-1}}\right) &= -\frac{1}{\pi}\left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i(u\varphi)\frac{(u\varphi)^{q^i}}{\pi^i}\right)\pi X\frac{\partial s_{N-1}}{s_{N-1}^2}\\
&= -\left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i(u\varphi)\frac{(\pi + s_{N-1}R)^{q^i}\varphi^{q^i}}{\pi^i}\right)\cdot X\frac{\partial s_{N-1}}{s_{N-1}^2} \qquad (12)\\
&\equiv -\sum_{i=0}^{\infty} c_i(u\varphi)\frac{\pi^{q^i} + q^i\pi^{q^i-1}s_{N-1}R}{\pi^i}\varphi^{q^i}\cdot\frac{X\partial s_{N-1}}{s_{N-1}^2} \mod \deg\overline{0}.
\end{aligned}$$

Из (9) следует, что $X\partial s_{N-1} \equiv 0 \mod \pi^{N-1}$. Далее, поскольку $q^i - i > 1$ при $i \geqslant 1$, то $\frac{\pi^{q^i}+q^i\pi^{q^i-1}s_{N-1}R}{\pi^i} \equiv 0 \mod \pi$, поэтому (12) означает

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\lambda(\beta)}{\pi}\cdot \pi X\partial\frac{1}{s_{N-1}}\right) &\equiv -c_0(u\varphi)(\pi + s_{N-1}R)\varphi\cdot\frac{X\partial s_{N-1}}{s_{N-1}^2}\\
&\equiv -c_0(u\varphi)s_{N-1}R\varphi\frac{X\partial s_{N-1}}{s_{N-1}^2} \mod (\pi^N, \deg\overline{0}).
\end{aligned}$$

Легко видеть, что $c_0(u\varphi) = c_0(\pi\varphi + s_{N-1}R\varphi) \equiv c_0(s_{N-1}R\varphi) \mod \pi$ и $c_0 \equiv 1 \mod \deg 1$. Поэтому, учитывая (7) и то, что $q \geqslant p \geqslant 3$, имеем

$$\begin{aligned}
c_0(u\varphi)s_{N-1}R\varphi\frac{X\partial s_{N-1}}{s_{N-1}^2} &\equiv R\varphi\frac{X\partial s_{N-1}}{s_{N-1}}\\
&\equiv z^{q^{N-1}(q-3)}\varphi X\partial s_{N-1} \equiv 0 \mod (\pi^N, \deg\overline{0}),
\end{aligned}$$

что завершает доказательство (11), из которого следует утверждение леммы. □

Лемма 10. *Имеет место сравнение*

$$\operatorname{res}\frac{1}{\pi q^{n-i}}l_m(\alpha_i)D_i\frac{1}{s} \equiv -\operatorname{res}\left(\frac{\Delta}{\pi}\lambda(\beta)\right)D_i'\frac{1}{s} \mod \pi^N,$$

где

$$D_i' = \begin{vmatrix} \alpha_1^{-1}\partial_1\alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{-1}\partial_n\alpha_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{i-1}^{-1}\partial_1\alpha_{i-1} & \cdots & \alpha_{i-1}^{-1}\partial_n\alpha_{i-1} \\ \partial_1(l_m(\alpha_i)) & \cdots & \partial_n(l_m(\alpha_i)) \\ X^{q-1}(\alpha_{i+1}^{-1}\partial_1\alpha_{i+1})^\Delta & \cdots & T_n^{q-1}(\alpha_{i+1}^{-1}\partial_n\alpha_{i+1})^\Delta \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ X^{q-1}(\alpha_n^{-1}\partial_1\alpha_n)^\Delta & \cdots & T_n^{q-1}(\alpha_n^{-1}\partial_n\alpha_n)^\Delta \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Заметим, что $\frac{1}{q^{n-i}}D_i = \widetilde{D_i}$, где

$$\widetilde{D_i} = \det(\widetilde{d_{kj}})_{1\leqslant k,j\leqslant n},$$

а

$$\widetilde{d_{kj}} = \begin{cases} \alpha_k^{-1}\partial_j\alpha_k, & k<i, \\ \partial_j(\lambda(\beta)^\Delta), & i=k, \\ \frac{1}{q}\alpha_k^{-\Delta}\partial_j\alpha_k^\Delta, & k>i. \end{cases}$$

Разложим $\widetilde{D_i}$ по i-й строке

$$\widetilde{D_i} = \sum_{k=1}^n \partial_k(\lambda(\beta))\Delta_k,$$

где Δ_k – алгебраическое дополнение элемента $\widetilde{d_{ik}}$. Получаем

$$\operatorname{res}\frac{1}{\pi q^{n-i}}l_m(\alpha_i)D_i\frac{1}{s} = \operatorname{res}\frac{1}{\pi}l_m(\alpha_i)\widetilde{D_i}\frac{1}{s} = \operatorname{res}\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^n\partial_k(\lambda(\beta)^\Delta)\Delta_k l_m(\alpha_i)\frac{1}{s}. \quad (13)$$

Из (8) очевидно, что

$$\frac{1}{q}\alpha^{-\Delta}\partial_k\alpha^\Delta = \begin{cases} T_k^{-1}(T_k\alpha^{-1}\partial_k\alpha)^\Delta, & 1<k\leqslant n, \\ X^{-1}(X\alpha^{-1}\partial_k\alpha)^\Delta, & k=1. \end{cases}$$

поэтому $\Delta_k \in \mathfrak{M}_{X,T}$. Из (13) и леммы 9 получаем

$$\operatorname{res}\frac{1}{\pi q^{n-i}}l_m(\alpha_i)D_i\frac{1}{s} \equiv -\operatorname{res}\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^n\Delta_k(\lambda(\beta)^\Delta)(\partial_k(l_m(\alpha_i)))\frac{1}{s} = -\operatorname{res}\left(\frac{\Delta}{\pi}\lambda(\beta)\right)D_i'\frac{1}{s} \mod \pi^N,$$

т.к. у $\widetilde{D_i}$ и D'_i совпадают соответствующие миноры. Лемма доказана. □

Доказательство предложения 8. Достаточно показать, что

$$\operatorname{Tr}[\alpha,\beta] \equiv 0 \mod \pi^N. \tag{14}$$

Обозначим $D := \det \overline{d}_{ij}$, где

$$\overline{d}_{ij} = \begin{cases} X\alpha_i^{-1}\partial_1\alpha_i, & i = 1, \\ T_j\alpha_i^{-1}\partial_j\alpha_i, & 1 < i \leqslant n. \end{cases}$$

Тогда можно записать

$$\begin{aligned} l_F(\beta)D_{n+1}\frac{1}{s} &= \lambda(\beta)D_{n+1}\frac{1}{s} - \left(\frac{\Delta}{\pi}\lambda(\beta)\right)D_{n+1}\frac{1}{s} \\ &= X^{-1}T_2^{-1}\cdots T_n^{-1}D\lambda(\beta)\frac{1}{s} - \left(\frac{\Delta}{\pi}\lambda(\beta)\right)D_{n+1}\frac{1}{s}. \end{aligned} \tag{15}$$

По лемме 10

$$\operatorname{res}\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q^{n-i}}l_m(\alpha_i)D_i\frac{1}{s} \equiv -\operatorname{res}\left(\frac{\Delta}{\pi}\lambda(\beta)\right)\sum_{i=1}^{n}D'_i\frac{1}{s} \mod \pi^N. \tag{16}$$

Обозначим $D_{n+1}^{(n)} := D_{n+1}$, $D_{n+1}^{(r)} = \det(\beta_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, где

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \alpha_i^{-1}\partial_j\alpha_i, & 1 \leqslant i \leqslant r, \\ X^{q-1}(\alpha_i^{-1}\partial_1\alpha_i)^{\Delta}, & j = 1, \quad i > r, \\ T_j^{q-1}(\alpha_i^{-1}\partial_j\alpha_i)^{\Delta}, & j > 1, \quad i > r. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $\alpha^{-1}\partial_k\alpha - \partial_k(l_m(\alpha)) = T_k^{q-1}(\alpha^{-1}\partial_k\alpha)^{\Delta}$ (при $k = 1$ вместо T_k подразумевается X), откуда следует, что $D_{n+1}^{(r)} - D'_r = D_{n+1}^{(r-1)}$. Таким образом

$$\left(\frac{\Delta}{\pi}\lambda(\beta)\right)D_{n+1}^{(r)}\frac{1}{s} - \left(\frac{\Delta}{\pi}\lambda(\beta)\right)D'_r\frac{1}{s} = \left(\frac{\Delta}{\pi}\lambda(\beta)\right)D_{n+1}^{(r-1)}\frac{1}{s}.$$

Тогда можно написать

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\Delta}{\pi}\lambda(\beta)\right) D_{n+1}\frac{1}{s} - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\Delta}{\pi}\lambda(\beta)\right) D_i'\frac{1}{s} \\
&\quad = \left(\frac{\Delta}{\pi}\lambda(\beta)\right) D_{n+1}^{(n)}\frac{1}{s} - \left(\frac{\Delta}{\pi}\lambda(\beta)\right) D_n'\frac{1}{s} - \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\Delta}{\pi}\lambda(\beta)\right) D_i'\frac{1}{s} \\
&\quad = \left(\frac{\Delta}{\pi}\lambda(\beta)\right) D_{n+1}^{(n-1)}\frac{1}{s} - \left(\frac{\Delta}{\pi}\lambda(\beta)\right) D_{n-1}'\frac{1}{s} - \sum_{i=1}^{n-2}\left(\frac{\Delta}{\pi}\lambda(\beta)\right) D_i'\frac{1}{s} \\
&\quad = \ldots = \left(\frac{\Delta}{\pi}\lambda(\beta)\right) D_{n+1}^{(0)}\frac{1}{s} = X^{-1}T_2^{-1}\cdots T_n^{-1}D^{\Delta}. \qquad (17)
\end{aligned}$$

Так же, как и в [9, предложение 6.3], можно получить сравнение

$$\left(\frac{\Delta}{\pi}\lambda(\beta)\right)\frac{1}{s} \equiv \left(\lambda(\beta)\frac{1}{s}\right)^{\Delta} \mod (\pi^N, \deg\overline{0}). \qquad (18)$$

Таким образом, из (15), (16), (17) и (18) получаем

$$\begin{aligned}
&\operatorname{res}\Phi\frac{1}{s} = \operatorname{res}\left(l_F(\beta)D_{n+1}\frac{1}{s} - \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q^{n-i}}l_m(\alpha_i)D_i\right) \\
&= \operatorname{res}\left(X^{-1}T_2^{-1}\cdots T_n^{-1}D\lambda(\beta)\frac{1}{s} - \left(\frac{\Delta}{\pi}\lambda(\beta)\right)D_{n+1}\frac{1}{s} - \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q^{n-i}}l_m(\alpha_i)D_i\frac{1}{s}\right) \\
&\equiv \operatorname{res}\left(X^{-1}T_2^{-1}\cdots T_n^{-1}D\lambda(\beta)\frac{1}{s} - \left(\frac{\Delta}{\pi}\lambda(\beta)\right)D_{n+1}\frac{1}{s} + \left(\frac{\Delta}{\pi}\lambda(\beta)\right)\sum_{i=1}^{n}D_i'\frac{1}{s}\right) \\
&= \operatorname{res}\left(X^{-1}T_2^{-1}\cdots T_n^{-1}D\lambda(\beta)\frac{1}{s} - X^{-1}T_2^{-1}\cdots T_n^{-1}\left(\frac{\lambda(\beta)}{\pi}D\right)^{\Delta}\frac{1}{s}\right) \\
&\equiv \operatorname{res}X^{-1}T_2^{-1}\cdots T_n^{-1}\left(D\lambda(\beta)\frac{1}{s} - \left(\lambda(\beta)D\frac{1}{s}\right)^{\Delta}\right) \mod \pi^N.
\end{aligned}$$

Но для любого $a \in \mathcal{O}_{T_1}$, $\operatorname{Tr} a = \operatorname{Tr} a^{\Delta}$, поэтому

$$\operatorname{Tr}\operatorname{res}X^{-1}T_2^{-1}\cdots T_n^{-1}\left(D\lambda(\beta)\frac{1}{s} - \left(\lambda(\beta)D\frac{1}{s}\right)^{\Delta}\right) \equiv 0 \mod \pi^N. \qquad (19)$$

Откуда следует (14). Предложение доказано. □

6.1.2. *Значения спаривания $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на базисе Шафаревича.* Рассмотрим нормирование $\overline{v}_X = (v_1, \dots, v_n) : \mathcal{H} \to \mathbb{Z}^n$:

$$\overline{v}_X(T_i) = (0, \dots, 1, \dots, 0), \quad \overline{v}_X(X) = (1, 0, \dots, 0),$$

$$\overline{v}_X(\alpha) = (0, \dots, 0) \quad \text{для} \quad \alpha \in \mathcal{U}_m.$$

Для $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathcal{H}^n$ обозначим

$$\delta(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} v_1(\alpha_1) & \dots & v_n(\alpha_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ v_1(\alpha_n) & \dots & v_n(\alpha_n) \end{vmatrix}.$$

Замечание 4. $\delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ можно корректно задать на $K_n(\mathcal{H})$.

Пусть $\omega(a)(X) = E_F(as)$ – ряд, с помощью которого строился примарный элемент $\omega(a)$.

Лемма 11. *Для всех $\alpha \in K_n(\mathcal{H})$ имеет место:*

$$\langle \alpha, \omega(a)(X) \rangle = [\delta(\alpha) \operatorname{Tr} a](\xi).$$

Доказательство. Покажем сперва, что

$$\langle (X, T_2, \dots, T_n), \omega(a)(X) \rangle = [\operatorname{Tr} a](\xi). \tag{20}$$

Из (4) получаем, что $\Phi((X, T_2, \dots, T_n), \omega(a)(X)) = l_F(\omega(a)(X))D_{n+1} = (X \cdot T_2 \cdots T_n)^{-1} as$, откуда $[(X, T_2, \dots, T_n), \omega(a)(X)] = \operatorname{res} \Phi \cdot \frac{1}{s} = a$, из чего следует (20).

Также легко проверить, что

$$\langle (\theta, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \omega(a)(X) \rangle = 0, \tag{21}$$

где $\theta \in \mathfrak{R}$. Пусть теперь один из рядов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, например, $\alpha_1 = \varepsilon$, является единицей в $\mathcal{H}$, т.е. $\varepsilon \in \mathcal{U}_m$. Проверим, что

$$\langle (\varepsilon, \dots \alpha_n), \omega(a)(X) \rangle = 0. \tag{22}$$

Снова из (4) получаем $\Phi = asD_{n+1} - \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n} l_m(\alpha_i) D_i$. В первой строке определителя D_{n+1} стоят $\varepsilon^{-1}\partial_j \varepsilon = \partial_j \log \varepsilon$, поэтому у D_{n+1} не будет слагаемого с $X^{-1}T_2^{-1} \cdots T_n^{-1}$ и $\operatorname{res} aD_{n+1} = 0$. Ясно, что

$$\partial_k \left((\lambda(\omega(a)(X)))^{\Delta} \right) = 0$$

при $2 \leqslant k \leqslant n$, т.к. $\omega(a)(X)$ не содержит никаких $T_2, \dots, T_n$. Поэтому

$$D_i = (-1)^{n+1}\partial_1((\lambda(\omega(a)(X)))^{\Delta}) \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1\partial_2\alpha_1 & \cdots & \alpha_1\partial_n\alpha_1 \\ \hdotsfor{3} \\ \alpha_{i-1}^{-1}\partial_2\alpha_{i-1} & \cdots & \alpha_{i-1}^{-1}\partial_n\alpha_{i-1} \\ \alpha_{i+1}^{-\Delta}\partial_2\alpha_{i+1}^{\Delta} & \cdots & \alpha_{i+1}^{-\Delta}\partial_n\alpha_{i+1}^{\Delta} \\ \hdotsfor{3} \\ \alpha_n^{-\Delta}\partial_2\alpha_n^{\Delta} & \cdots & \alpha_n^{-\Delta}\partial_n\alpha_n^{\Delta} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1}\partial_1((\lambda(\omega(a)(X)))^{\Delta}) \cdot D_i'.$$

Из (8) имеем

$$\begin{aligned} \partial_1((\lambda(\omega(a)(X)))^{\Delta}) &= qX^{q-1}\left(\partial_1\left(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(as)^{\Delta^r}}{\pi^r}\right)\right)^{\Delta} \\ &= qX^{q-1}\left(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{a^{\Delta^r}\partial_1(s^{\Delta^r})}{\pi^r}\right)^{\Delta} \\ &= qX^{q-1}\left(\sum_{r=0}^{\infty}a^{\Delta^r}\left(\frac{q}{\pi}\right)^r X^{q-1}(\partial_1 s)^{\Delta^r}\right)^{\Delta}. \end{aligned}$$

Из (9) следует, что все коэффициенты ряда $\partial_1 s$ делятся на π^N, поэтому коэффициенты $\partial_1((\lambda(\omega(a)(X)))^{\Delta})$ делятся на $q\pi^N$. Таким образом,

$$\frac{1}{\pi}l_m(\alpha_i)D_i = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi} \cdot \frac{1}{q}\log\frac{\alpha^q}{\alpha^{\Delta}} \cdot \partial_1((\lambda(\omega(a)(X)))^{\Delta}) \cdot D_i' \equiv 0 \mod \pi^N.$$

Поэтому $\operatorname{res}\Phi \cdot \frac{1}{s} \equiv 0 \mod \pi^N$, из чего следует (22).
Утверждение леммы теперь следует из предложения 7, определения $\mathcal{H}$ и (20), (21), (22). □

Лемма 12. *Пусть* $i = (i_1, \dots, i_n)$ *и пусть* $(i_2, \dots, i_n) > (0, \dots, 0)$, *тогда*

$$\langle (X, T_2, \dots, T_n), E_F(\theta X^{i_1}T_2^{i_2}\dots T_n^{i_n})\rangle = 0.$$

Доказательство. Достаточно показать, что

$$[(X, T_2, \dots, T_n), E_F(\theta X^{i_1}T_2^{i_2}\dots T_n^{i_n})] \equiv 0 \mod \pi^N. \tag{23}$$

По определению $[\cdot,\cdot]$ (см. §5)

$$[(X,T_2,\dots,T_n),E_F(\theta X^{i_1}T_2^{i_2}\dots T_n^{i_n})] \\ = \operatorname{res}\frac{1}{XT_2\dots T_n}\theta X^{i_1}T_2^{i_2}\cdots T_n^{i_n}\cdot\frac{1}{s}=0,$$

поскольку ряд s не содержит переменных $T_2,\dots,T_n$. Лемма доказана. □

Из символьного свойства спаривания $[\cdot,\cdot]$ (см. предложение 7) легко выводится

Лемма 13. *Пусть* $(i,p)=1$, $\theta\in\mathfrak{R}$, $\mathcal{E}_\rho=\lambda^{-1}\circ\lambda_\rho$, $0\leqslant\rho\leqslant f-1$, *тогда*

$$\langle(X,T_2,\dots,T_n),\mathcal{E}_\rho(\theta X^i)\rangle=0.$$

6.1.3. *Инвариантность спаривания* $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Лемма 14. *Пусть* $V_1,\dots,V_n$ *– локальные параметры поля* L, *и пусть* $\beta(Y_1,\dots,Y_n)\in F(\mathfrak{M}_Y)$, *причем* $\eta_F(\beta)=\beta(V_1,\dots,V_n)\in\mathcal{A}$, *тогда*

$$\langle\alpha,\beta\rangle_Y=0.$$

для всех $\alpha\in\mathcal{H}_Y^n$.

Доказательство. Используя лемму 6, имеем

$$\eta_F(\beta)=[\pi^N](\gamma)=\eta_F([\pi^N](\underline{\gamma})),$$

где $\eta_F(\underline{\gamma})=\gamma$, $\underline{\gamma}\in F(\mathfrak{M}_Y)$. Откуда по инвариантности спаривания $\langle\cdot,\cdot\rangle$ по второму аргументу получаем

$$\langle\alpha,\beta\rangle_Y=\langle\alpha,[\pi^N](\underline{\gamma})\rangle_Y=[\pi^N]\langle\alpha,\underline{\gamma}\rangle_Y=0.$$

□

Предложение 9. *Пусть* $Y=(Y_1,\dots,Y_n)$ *– некоторый набор переменных, и пусть* $X=g_1(Y_1,\dots,Y_n),T_2=g_2(Y_1,\dots,Y_n),\dots,T_n=g_n(Y_1,\dots,Y_n)$. *Тогда*

$$\langle\alpha,\beta\rangle_X=\langle\alpha,\beta\rangle_Y$$

для $\alpha\in\mathcal{H}^n,\beta\in F(\mathfrak{M}_{X,T})$.

Доказательство. Покажем, что

$$[(X, T_2, \dots, T_n), \beta]_{X,T} = [(g_1(Y), \dots, g_n(Y)), \beta]_Y. \tag{24}$$

Учитывая независимость спаривания по второму аргументу, достаточно проверить (24) на элементах базиса Шафаревича. Пусть $b \in \mathcal{O}_{T_1}$ и $\omega(b)(X) = E_F(bs)$, $\omega(b)(Y) = \omega(b)(X)\mid_{X=g_1(Y)}$. Ясно, что

$$\delta_Y(g_1, \dots, g_n) = \delta(X, T_2, \dots, T_n) = 1,$$

где δ_Y – нормирование на $\mathcal{H}$ такое, что $\delta_Y(Y_i) = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, $\delta_Y|_{U_m} = 0$. Поэтому

$$[(X, T_2, \dots, T_n), \omega(b)(X, T)]_{X,T} \\ = [\operatorname{Tr} b](\xi) = [(g_1(Y), \dots, g_n(Y)), \omega(b)(Y)]_Y.$$

Далее из лемм 12 и 13 для $(i, p) = 1$, $\theta \in \mathfrak{R}$, $\mathcal{E}_\rho = \lambda^{-1} \circ \lambda_\rho$, $0 \leqslant \rho \leqslant f - 1$, $j = (j_1, \dots, j_n)$, где $(j_2, \dots, j_n) > (0, \dots, 0)$, получаем

$$\langle (X, T_2, \dots, T_n), \mathcal{E}_\rho(\theta X^i) \rangle_X \\ = \langle (X, T_2, \dots, T_n), \mathcal{E}(\theta X^{j_1} T_2^{j_2} \dots T_n^{j_n}) \rangle_X = 0.$$

Пусть $i = (i_1, \dots, i_n)$, $(i_2, \dots, i_n) > (0, \dots, 0)$, тогда по лемме 14

$$[(g_1(Y), \dots, g_n(Y)), \mathcal{E}(\theta g_1^{i_1} g_2^{i_2} \cdots g_n^{i_n})]_Y = 0 \\ = [(X, T_2, \dots, T_n), \mathcal{E}(\theta X^{i_1} T_2^{i_2} \cdots T_n^{i_n})]_{X,T}.$$

Пусть теперь $(i, p) = 1$, по символьному свойству (см. 7)

$$0 = \langle \theta g_1^i, g_2, \dots, g_n, \mathcal{E}_\rho(\theta g_1^i) \rangle_Y = [i](\langle g_1, g_2, \dots, g_n, \mathcal{E}_\rho(\theta g_1^i) \rangle_Y),$$

поэтому

$$\langle g_1, g_2, \dots, g_n, \mathcal{E}_\rho(\theta g_1^i) \rangle_Y = 0.$$

Общий случай доказывается так же, как и в предложении 9 работы [8]. □

6.1.4. *Независимость спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle$ по первому аргументу.* Проверим, что группа $\mathcal{H}_{\mathcal{E}is} + \pi^N K_n(\mathcal{H})$ содержится в левой части ядра спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Лемма 15. *Пусть $\alpha \in \mathcal{H}_{\mathcal{E}is}$. Тогда*

$$\langle \alpha, \beta \rangle = 0$$

для всех $\beta \in F(\mathfrak{M}_{X,T})$.

Доказательство. В силу независимости спаривания по второму аргументу, в качестве β достаточно рассмотреть элементы системы образующих. Если $(i_2,\dots,i_n) > (0,\dots,0)$, то из леммы 14 получаем

$$\langle \alpha, \mathcal{E}(\theta X^{i_1} T_2^{i_2} \dots T_n^{i_n}) \rangle = 0.$$

Для остальных образующих элементов утверждение леммы доказывается точно так же, как в [8, Предложение 10]. □

6.2. Независимость от выбора группы. В начале работы (см. 3.2) для простоты вычислений мы предположили, что F – одномерная группа, в том смысле, что $F \in \mathcal{O}_{K_1}[[X,Y]]$. Однако справедливо ожидать, что всеми показанными выше свойствами обладает спаривание $\langle\cdot,\cdot\rangle_G$ для любой формальной группы Любина–Тейта $G \in \mathcal{O}_K[[X,Y]]$. Хорошо известно, что символ Гильберта обладает свойством H.3 (см. 3.2). Покажем, что таким же свойством обладает спаривание $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Лемма 16. *Пусть формальные группы F и G изоморфны (строго) и $f \in \mathcal{O}_K[[X]]_0$ – изоморфизм между ними. Тогда*

$$\langle \alpha, \beta \rangle_G = f(\langle \alpha, f^{-1}(\beta) \rangle_F)$$

для всех $\alpha \in K_n(\mathcal{H})$, $\beta \in G(\mathfrak{M}_{X,T})$.

Доказательство. Достаточно проверить, что

$$\operatorname{res}\left(\Phi_G(\alpha,\beta)\frac{1}{s_G} - \Phi_F(\alpha, f^{-1}(\beta))\frac{1}{s_F}\right) \equiv 0 \mod \pi^N.$$

Пусть λ_F, λ_G – логарифмы групп F и G соответственно, $f = \lambda_G^{-1} \circ \lambda_F$. Заметим, что

$$l_G(\beta) = \left(1 - \frac{\Delta}{\pi}\right)\lambda_G(\beta) = \left(1 - \frac{\Delta}{\pi}\right)\lambda_F(\lambda_F^{-1} \circ \lambda_G(\beta)) = l_F(f^{-1}(\beta)),$$

$$D_{n+1}^G(\alpha,\beta) = \det(\alpha_i^{-1}\partial_j\alpha_i) = D_{n+1}^F(\alpha, f^{-1}(\beta)),$$

$$\partial_k(\lambda_G(\beta)^\Delta) = \partial_k(\lambda_F(f^{-1}(\beta))^\Delta),$$

поэтому

$$\Phi_G(\alpha,\beta) = \Phi_F(\alpha, f^{-1}(\beta)).$$

Пусть ξ – первообразный корень изогении $[\pi^N]_F$, $\underline{\xi}$ – его разложение в ряд, т.е. $\underline{\xi} \in F(\mathfrak{M}_{X,T}) : \eta_F(\underline{\xi}) = \xi$. Ряд s_F определялся следующим образом (см. 3.6) $s_F = [\pi^N]_F(\underline{\xi})$, тогда в качестве s_G можно брать $s_G = [\pi^N]_G(f(\underline{\xi})) = \lambda_G^{-1}(\pi^N \lambda_F(\underline{\xi})) = f(s_F)$. Положим $g(X) = \frac{f(X)}{X} =$

$1 + \ldots$, $h(X) := \frac{1-g(X)}{Xg(X)} \in \mathcal{O}_K[[X]]$, тогда $\frac{1}{s_G} - \frac{1}{s_F} = h(s_F)$. Таким образом,

$$\operatorname{res}\left(\Phi_G(\alpha,\beta)\frac{1}{s_G} - \Phi_F(\alpha, f^{-1}(\beta))\frac{1}{s_F}\right) = \operatorname{res}\Phi_G(\alpha,\beta)h(s_F) = 0.$$

Лемма доказана. □

Из леммы, в частности, следует инвариантность и независимость спаривания $\langle\cdot,\cdot\rangle_G$ для любой формальной группы Любина–Тейта G над $\mathcal{O}_K$ (не обязательно одномерной).

§7. Основной результат.

7.1. Спаривание на формальном модуле $F(\mathfrak{M}_L)$. Определим спаривание:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : K_n^{\mathrm{top}}(L) \times F(\mathfrak{M}_L) \to W_F^N,$$

следующим образом: пусть $\alpha \in K_n^{\mathrm{top}}(L)$, $\beta \in F(\mathfrak{M}_L)$, и пусть $\underline{\alpha} \in K_n(\mathcal{H})$, $\underline{\beta} \in F(\mathfrak{M}_{X,T})$ – их прообразы. Положим

$$\langle\alpha,\beta\rangle := \langle\underline{\alpha},\underline{\beta}\rangle.$$

Из теоремы 3, независимости и инвариантности спаривания $\langle\cdot,\cdot\rangle$ следует, что спаривание $\langle\cdot,\cdot\rangle : K_n^{\mathrm{top}}(L) \times F(\mathfrak{M}_L) \to W_F^N$ определено корректно, инвариантно относительно выбора системы локальных параметров и не зависит от разложения элементов в ряды по локальным параметрам.

7.2. Явная формула для спаривания Гильберта $(\cdot,\cdot)$.

Теорема 4. *Символ Гильберта*

$$(\cdot,\cdot) : K_n^{\mathrm{top}}(L) \times F(\mathfrak{M}_L) \to W_F^N$$

совпадает со спариванием $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и тем самым выражается в явном виде с помощью формулы (5).

Доказательство. В 6.1.2 было показано, что для $\alpha = (\Pi, T_2, \ldots, T_n)$ символ Гильберта (α,β) совпадает со спариванием $\langle\alpha,\beta\rangle$ на элементах базиса Шафаревича. Откуда, в силу независимости от разложения по второму аргументу и линейности обоих спариваний следует, что $(\alpha,\beta) = \langle\alpha,\beta\rangle$ для всех $\beta \in F(\mathfrak{M}_L)$. Далее любой элемент α из K_nL

можно представить в виде суммы символов, состоящих из некоторых локальных параметров, т.е.

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{\overline{T'}} (X', T'_2, \dots, T'_n).$$

В силу инвариантности спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle$ утверждение теоремы уже доказано для каждого слогаемого суммы. Для произвольных $\alpha \in K_n^{\mathrm{top}}(L)$ и $\beta \in F(\mathfrak{M}_L)$ утверждение теоремы следует из аддитивности обоих спариваний по первому аргументу. $\square$

Литература

1. С. В. Востоков, *Явная форма закона взаимности.* — Изв. АН СССР. Сер. матем. **42**, No. 6 (1978), 1288–1321.
2. С. В. Востоков, *Норменное спаривание в формальных модулях.* — Изв. АН СССР. Сер. матем. **43**, No. 4 (1979), 765–794.
3. С. В. Востоков, *Явная конструкция теории полей классов многомерного локального поля.* — Изв. АН СССР. Сер. матем. **49**, No. 2 (1985), 283–308.
4. С. В. Востоков, О. В. Демченко, *Явная формула спаривания Гильберта для формальных групп Хонды.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **272** (2000), 86–128.
5. А. И. Мадунц, *Формальные группы Любина–Тейта над кольцом целых многомерного локального поля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **281** (2001), 221–226.
6. И. Б. Жуков, А. И. Мадунц, *Аддитивные и мультипликативные разложения в многомерных локальных полях.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **272** (2000), 186–196.
7. F. Lorenz, S. Vostokov, *Honda Groups and Explicit Pairings on the Modules of Cartier Curves.* — Contemp. Math. **300** (2002), 143–170.
8. С. В. Востоков, Ф. Лоренц, *Явная формула символа Гильберта для групп Хонды в многомерном локальном поле.* — Матем. сб. **194:2** (2003), 3–36.
9. G. Henniart, *Sur les lois de réciprocité.* I. — J. reine angew. Math. **329** (1981), 172–203.
10. И. Б. Фесенко, *Теория локальных полей. Локальная теория полей классов. Многомерная локальная теория полей классов.* — Алгебра и анализ **4**, No. 3 (1992), 1–41.
11. С. В. Востоков, Р. Перлис, *Норменные ряды для формальных групп Любина–Тейта.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **281** (2001), 105–127.

Afanas'eva S. S., Bekker B. M., Vostokov S. V. The Hilbert symbol in multi-dimensional local fields for Lubin–Tate formal groups.

In this paper an explicit formula for the Hilbert pairing between the Milnor K-group of a multi-dimensional local field and the multi-dimensional Lubin–Tate formal module is derived. This formula is a generalization of

such a formula in one-dimensional case. Here we consider the case, where the penultimate residue field is of characteristic zero.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: cheery_sonya@mail.ru
bekker.boris@gmail.com
sergei.vostokov@gmail.com

Поступило 28 ноября 2011 г.