Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 400, 2012 г.

С. С. Афанасьева

НОРМЕННЫЕ РЯДЫ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ФОРМАЛЬНЫХ ГРУПП ХОНДЫ

§1. Введение

Настоящая работа является прямым продолжением работ [1, 2] и [3]. В работе [1] изучались норменные ряды для формальных групп Любина–Тейта, а именно, были получены необходимые и достаточные условия норменности заданного ряда. В [2] аналогичный результат получен для формальных групп Хонды. В [3] результат работы [1] обобщается на случай мультипликативной группы многомерного локального поля. В настоящей работе сформулированы и доказаны аналогичные результаты для многомерного формального модуля Хонды. Впервые норменные ряды были рассмотрены в работе [4]. Исследование норменных рядов основано на явных формулах спаривания Гильберта. Здесь используются явные формулы, полученные в [5].

§2. Обозначения

В этой работе K обозначает n-мерное локальное поле нулевой характеристики с полем вычетов характеристики $p > 2$. Мы принимаем обозначения и терминологию работы [5].

2.1. $K^{(0)} \cong \mathbb{F}_{q_0}$, $q_0 = p^f$ – последнее поле вычетов поля K,

$v : K^* \to \mathbb{Z}$ – дискретное нормирование ранга 1,

$\bar{v} = (v_1, \dots, v_{n-1}, v_n = v) : K^* \to \mathbb{Z}^n$ – дискретное нормирование ранга n,

$\mathfrak{o} := W(\mathbb{F}_{q_0})$ – кольцо векторов Витта,

$k := \operatorname{Quot} \mathfrak{o}$ – поле отношений кольца $\mathfrak{o}$,

$t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = \Pi$ – система локальных параметров в K относительно нормирования $\bar{v}$,

$\mathcal{R}_0$ – система представителей Тейхмюллера поля $\mathbb{F}_{q_0}$ в кольце $\mathfrak{o}$,

Ключевые слова: формальные группы Хонды, норменные ряды, многомерные локальные поля.

Автор благодарит Санкт-Петербургский государственный университет за поддержку исследования.

$T = k\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_{n-1}\}\}$ – n-мерное абсолютно неразветвленное подполе в K,

$v_T : T^* \to \mathbb{Z}$ – дискретное нормирование ранга 1,

F – формальная группа высоты h над $\mathfrak{o}_T$, $q = p^h$,

$u(\Delta) = p - \sum_{i=1}^h a_i \Delta^i$ – канонический специальный элемент группы F, определенный в [5],

$\mathcal{R}$ – система представителей Тейхмюллера поля $\mathbb{F}_q$ в кольце $W(\mathbb{F}_q)$,

σ – автоморфизм поля T, который действует на поле k как автоморфизм Фробениуса и, кроме того, $\sigma(t_i) = t_i^p, \quad 1 \le i < n$,

$\mathfrak{M}$ – максимальный идеал в K относительно нормирования v ранга 1,

$\mathfrak{o}_K$ – кольцо целых поля K относительно v,

$\mathfrak{o}_T$ – кольцо целых поля T относительно v_T,

Tr – оператор следа в $k/\mathbb{Q}_p$,

$W_F^N := \mathrm{Ker}[p^N]_F \subset K$,

$e := [K : T]$ – абсолютный индекс ветвления поля K, относительно v,

$e_m := e/(p^h - 1)p^{(m-1)h}$, $1 \le m \le N$,

$e_* := \frac{p^h e}{p^h - 1} = \frac{qe}{q-1}$,

$\mathcal{L}_\mu$ – p-адическое пополнение кольца

$$\left\{ f = \sum d_r X^r; d_r \in T; v(d_r X^r) \ge 0, \lim_{r\to+\infty} v(d_r X^r) = \infty \right\},$$

где $\mu > 0$ – рациональное число, $v(d_r X^r) := v_T(d_r) + \mu r$ – μ-нормирование. Подробнее про μ-кольца см. [5].

$L_\mu := \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} X^m \mathcal{L}_\mu$,

$\Psi_K : K_n^{\mathrm{top}}(K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ – отображение взаимности *à* la Паршин–Като из топологической группы Милнора поля K в группу Галуа максимального абелева расширения поля K.

$M := k\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_{n-1}\}\}((X)) = T((X))$ – $(n+1)$-мерное локальное поле,

$\mathfrak{o}_M := \left\{ \sum a_{\bar r} t_1^{t_1} \dots t_{n-1}^{n-1} X^{r_n} \mid a_{\bar r} \in \mathfrak{o}, \bar r \ge \bar 0 \right\}$, где $\bar r = (r_1, \dots, r_n)$ пробегает допустимый набор индексов из $\mathbb{Z}^n$.

$\mathfrak{o}'_M \subset \mathfrak{o}_M$ – то же самое для $\bar r > \bar 0$,

$A := \mathfrak{o}\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_{n-1}\}\}$,

$\mathfrak{o}_{(p)} := A((X))$,

$\mathcal{U}_m := 1 + \mathfrak{o}'_M$,

$H_m = \langle t_1\rangle \times \ldots \times \langle t_{n-1}\rangle \times \langle X\rangle \times \mathcal{R}^* \times \mathcal{U}_m \subset \mathfrak{o}^*_{(p)}$ – модуль кривых Картье для мультипликативной группы K^*. Имеем следующий (неканонический) сюрьективный гомоморфизм

$$\eta_m : \mathfrak{o}_{(p)} \longrightarrow K,$$
$$\alpha(X) \mapsto \alpha(\Pi),$$

который индуцирует гомоморфизм групп

$$\eta_m : H_m \to K^*.$$

Прообраз элемента $\alpha \in K^*$ при гомоморфизме η_m обозначаем $\underline{\alpha}$.

$H_\mu := \mathfrak{o}_T[[X]]_0 + X^{e_*}\mathcal{L}_\mu \cap T[[X]]_0$ для $\mu \in [\frac{1}{p^h e}, \frac{1}{e}]$. На $\mathfrak{o}_T[[X]]$-модуле H_μ определена структура формального $\mathbb{Z}_p$-модуля группы $F : F(f,g) \in H_\mu$ для $f, g \in H_\mu$. Полученный $\mathbb{Z}_p$-модуль обозначим $F(H_\mu)$. При подстановке $X \mapsto \Pi$ получаем сюръективный (неканонический) гомоморфизм $\mathbb{Z}_p$-модулей:

$$\eta_F : F(H_\mu) \longrightarrow F(\mathfrak{M}),$$
$$\alpha(X) \mapsto \alpha(\Pi),$$

$\underline{\alpha} \in F(H_\mu)$ – прообраз элемента α, т.е. $\underline{\alpha}(\Pi) = \alpha$,

res обозначает $\mathrm{res}_{t_1 \cdots t_{n-1} X}$.

§3. Вспомогательные и известные результаты

3.1. Теория Хонды для формальных групп в σ-полях. В этом пункте T обозначает полное дискретно нормированное поле характеристики 0 с полем вычетов характеристики p. Абсолютный индекс ветвления поля T равен 1. Пусть σ – автоморфизм поля T, который удовлетворяет условию:

$$\sigma(\alpha) \equiv \alpha^p \mod p$$

для любого α из кольца $\mathfrak{o}_T$. Пару (T, σ) будем называть σ-полем.

Пусть Δ – оператор, действующий на кольце рядов Лорана $T((X))$ по формуле:

$$\Delta\left(\sum c_i X^i\right) = \sum \sigma(c_i) X^{pi},$$

D_Δ – некоммутативное кольцо операторов

$$D_\Delta = \left\{\sum_{i \ge 0} a_i \Delta_i,\ a_i \in \mathfrak{o}_T\right\}$$

с умножением $\Delta a = \sigma(a)\Delta$ для $a \in \mathfrak{o}_T$. D'_Δ – аналогичное кольцо с коэффициентами из поля T.

Напомним, что любая формальная группа F над $\mathfrak{o}_T$ с логарифмом $\lambda(X)$ строго изоморфна p-типической группе F_p, логарифм которой имеет вид:

$$\lambda_p(X) = \Lambda(\Delta)(X) = \sum_{i\geq 0} c_i X^{pi},$$

где $\Lambda(\Delta) = 1 + c_1\Delta + c_2\Delta^2 + \ldots \in D'_\Delta$. Далее (см. [5]), для p-типической группы F_p найдется единственный элемент $u_p(\Delta) \in p + \Delta D_\Delta$ (специальный элемент группы F) такой, что

$$\Lambda(\Delta) = pu_p^{-1}(\Delta).$$

Несложно проверить следующий аналог подготовительной леммы Вейерштрасса.

Лемма 1. *Любой элемент $u \in p + \Delta D_\Delta$, $p \nmid u$, можно единственным образом представить в виде: $u = \varepsilon \circ u_c$, где $\varepsilon \in 1 + \Delta D_\Delta$, а $u_c(\Delta) = p - \sum_{i=1}^h a_i\Delta^i$, причем $a_i \in p\mathfrak{o}_T$ для $i < h$ и $a_h \in \mathfrak{o}_T^*$.*

Элемент u_c будем называть каноническим специальным элементом группы F и в дальнейшем обозначать просто u. В работе [5] был доказан аналог классификационных теорем Демченко. А именно, было построено отображение

$$\mathcal{A} : F \longrightarrow F_1$$

и последовательность гомоморфизмов f_m групп Хонды $F_m := \mathcal{A}^m F$

$$F \xrightarrow{f} F_1 \xrightarrow{f_1} F_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} F_N,$$

причем $f_i(X) \equiv X^{p^h} \mod p$. Пусть $u_m = p - a_1^{(m)}\Delta - \cdots - a_h^{(m)}\Delta^h$ – канонический специальный элемент группы F_m.

$$\begin{aligned}
&u_N = p - b_1\Delta - \cdots - b_h\Delta^h,\\
&p_1^{(m)} = p_1p_2\ldots p_m = p^m/a_h^{1+\sigma^h+\cdots+\sigma^{h(m-1)}},\\
&f^{(m)} = f_{m-1} \circ f_{m-1} \circ \cdots \circ f_1 \circ f.
\end{aligned}$$

Нетрудно проверить (см. [5, лемма 1.2.12]), что

$$\begin{aligned}
u_m \circ p_1^{(m)} &= p_1^{(m)}u,\\
f^{(m)} &= \lambda_m^{-1} \circ p_1^{(m)} \circ \lambda.
\end{aligned} \tag{1}$$

3.2. Функции Артина–Хассе. Рассмотрим кольцо $T[[X]]_0$ (соответственно $\mathfrak{o}_T[[X]]_0$) и определим формальный $\mathbb{Z}_p$-модуль $F(T[[X]]_0)$ (соответственно $F(\mathfrak{o}_T[[X]]_0)$), положив $f +_F g = F(f,g)$ для $f, g \in T[[X]]_0$ (соответственно $f, g \in \mathfrak{o}_T[[X]]_0$). Можно определить функции

$$\begin{aligned} &E_F \,:\, T[[X]]_0 \to F(T[[X]]_0) \\ &E_F(\varphi) := \lambda^{-1}(pu^{-1} \circ \varphi), \\ &l_F \,:\, F(T[[X]]_0) \to T[[X]]_0 \\ &l_F(\psi) := \frac{u}{p} \circ \lambda(\psi). \end{aligned}$$

Эти функции задают биективные взаимно однозначные изоморфизмы между соответствующими модулями, а при $\mu \geq \frac{1}{p^h e}$ определяют взаимно-обратные изоморфизмы $\mathbb{Z}_p$-модулей H_μ и $F(H_\mu)$ (см. [5]).

Аналогичным образом вводятся функции E_N и l_N для формальной группы $F_N = \mathcal{A}^N F$ с логарифмом λ_N:

$$E_N(\varphi) = \lambda_N^{-1}\left(\frac{p}{u_N} \circ \varphi\right),$$

$$l_N(\psi) = \left(\frac{u_N}{p} \circ \lambda_N\right) = \left(1 - \frac{b_1}{p}\Delta - \dots - \frac{b_h}{p}\Delta^h\right)(\lambda_N(\psi)).$$

3.3. Примарные ряды. Зафиксируем для всех последующих рассмотрений

$$\mu = \frac{1}{p^h e}$$

(приведенные ниже утверждения, полученные в [5], верны, в частности, для данного μ).

Определение 1. *Ряд $\mathcal{P}$ из модуля $X^{-m}\mathcal{L}_\mu, m \in \mathbb{N}$, будем называть примарным, если существует последовательность рядов*

$$\mathcal{P}^{(0)}, \mathcal{P}^{(1)}, \dots, \mathcal{P}^{(N)} = \mathcal{P},$$

которая при всех $0 \leq s \leq N$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} &\text{а) } \mathcal{P}^{(s)} \in X^{-m/p^{(N-s)h}}\mathcal{L}_{\mu p^{(N-s)h}}; \\ &\text{б) } X\frac{\partial}{\partial X}\mathcal{P}^{(s)}, t_i\frac{\partial}{\partial t_i}\mathcal{P}^{(s)},\ 1 \leq i \leq n-1, \\ &\quad \textit{принадлежат модулю } p^s X^{-m(1+p^{h-1})/p^{(N-s)h}}\mathcal{L}_{\mu p^{(N-s)h}}; \\ &\text{в) } \Delta^h\mathcal{P}^{(s-1)} - \mathcal{P}^{(s)} \in p^s X^{-m(1+p^{h-1})/p^{(N-s)h}}\mathcal{L}_{\mu p^{(N-s)h}}. \end{aligned} \tag{2}$$

Пусть

$$\begin{aligned}
&W_i := p_1^{(N)}\lambda \circ \underline{z}_i = \lambda \circ f^{(N)} \circ \underline{z}_i,\\
&A := (\Delta^{i-1}W_j)_{1\le i,j\le h}, \qquad\qquad (3)\\
&\Gamma_j,\ 1 \leqslant j \leqslant h,\text{– решения системы } A(X_1,\dots,X_h)^T = (1,0,\dots,0)^T.
\end{aligned}$$

В работе [5] было показано, что матрица A определена над кольцом L_μ, и ряды Γ_j являются примарными в модуле $X^{-e_*}\mathcal{L}_\mu$.

3.4. Многомерный символ Гильберта. Для формальной группы F над $\mathfrak{o}_T$ символ Гильберта определяется следующим образом:

$$(\cdot,\cdot)_F = (\cdot,\cdot)^N_{F,K} : K_n^{\mathrm{top}}(K) \times F(\mathfrak{M}) \to W_F^N,$$
$$(\alpha,\beta)^N_{F,K} = \Psi_K(\alpha)(\widetilde{\beta}) -_F \widetilde{\beta},$$

где $\widetilde{\beta}$ берется из пополнения алгебраического замыкания K и является корнем уравнения $[p^N]_F(\widetilde{\beta}) = \beta$.

Кроме того, определен многомерный символ Гильберта для F по изогении $f^{(N)}$ и формальной группе F_N

$$\{\cdot,\cdot\}_F = \{\cdot,\cdot\}^N_{F,K} : K_n^{\mathrm{top}}(K) \times F_N(\mathfrak{M}) \to W_F^N,$$
$$\{\alpha,\beta\}^N_{F,K} = \psi_K(\alpha)(\bar{\beta}) -_F \bar{\beta},$$

где $f^{(N)}(\bar{\beta}) = \beta$.

Несложно проверить:

$$(\alpha,\beta)_F = \{\alpha, [p_1^{(N)}/p^N]_{F,F_n}(\beta)\}_F; \qquad (4)$$

напомним, что $[a]_{F,F_n} = \lambda_N^{-1} \circ a \circ \lambda$, $a \in \mathbb{Z}_p$, $f^{(N)} = \lambda_N^{(-1)} \circ p_1^{(N)} \circ \lambda$.

3.5. Явные формулы, спаривание на рядах.

Замечание 1. Все ряды из $X^{-e_*}\mathcal{L}_\mu$ и $X^{-e_*(1+p^{h-1})}\mathcal{L}_\mu$ имеют целые коэффициенты при неположительных степенях.

В работе [5] были доказаны следующие леммы.

Лемма 2. *Для любого $z \in W_F^N \setminus W_F^{N-1}$ имеем*

$$v_K(z) = e/(p^h - 1)p^{(N-1)h}.$$

Лемма 3. *$\mathbb{Z}_p$-модуль W_F^N изоморфен модулю $(\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z})^h$ и имеет, тем самым, h образующих.*

Далее был построен базис W_F^N $z_1, \dots, z_h$, для которого $z_i/z_j \equiv \theta_{ij}$ mod Π, где элементы $\theta_{ij}, 1 \le i \le h$, образуют базис $W(\mathbb{F}_q)$ над $\mathbb{Z}_p$ при фиксированном j, при этом была доказана:

Лемма 4. *Матрица* $\Theta := (\Delta^{i-1}(\theta_j)) = (\theta_j^{p^{i-1}})_{1 \le i,j \leqslant h}$ *обратима в кольце* $\mathfrak{o} = W(\mathbb{F}_q)$.

Для примарного ряда $\mathcal{P} \in X^{-e_*}\mathcal{L}_\mu$ определено спаривание

$$[\cdot,\cdot] = [\cdot,\cdot]_{F,\mathcal{P}} : H_m^n \times F_N(H_\mu) \longrightarrow \mathfrak{o} \mod p^N$$

следующим образом: для $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in H_m \times \dots \times H_m = H_m^n$ и $\beta \in F_N(H_\mu)$

$$[\alpha,\beta] = \operatorname{res} \Phi_N(X) \cdot \mathcal{P}(X) \mod p^N,$$

где

$$\Phi_N = l_N(\beta) D_{n+1} - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{h} \frac{(-1)^{n-i} b_j}{p^{j(n-i)}} \cdot l_j(\alpha_i) D_{ij}, \tag{5}$$

$$l_j(\alpha) = \frac{1}{p^j} \log(\alpha^{p^j}/\alpha^{\Delta^j}) \text{ для } \alpha \in H_m,$$

$$D_{n+1} = \det(\alpha_i^{-1}\partial_k \alpha_i)_{1 \le i,k \le n},$$

$$D_{ij} = \begin{vmatrix} \alpha_1^{-1}\partial_1\alpha_1 & \dots & \alpha_1^{-1}\partial_n\alpha_1 \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ \alpha_{i-1}^{-1}\partial_1\alpha_{i-1} & \dots & \alpha_{i-1}^{-1}\partial_n\alpha_{i-1} \\ \alpha_{i+1}^{-\Delta^j}\partial_1\alpha_{i+1}^{\Delta^j} & \dots & \alpha_{i+1}^{-\Delta^j}\partial_n\alpha_{i+1}^{\Delta^j} \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ \alpha_n^{-\Delta^j}\partial_1\alpha_n^{\Delta^j} & \dots & \alpha_n^{-\Delta^j}\partial_n\alpha_n^{\Delta^j} \\ \partial_1(\lambda_N \circ \beta)^{\Delta^j} & \dots & \partial_n(\lambda_N \circ \beta)^{\Delta^j} \end{vmatrix} \tag{6}$$

Здесь и далее

$$\partial_i \alpha = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t_i}\alpha, & 1 \le i \le n-1 \\ \frac{\partial}{\partial X}\alpha, & i = n. \end{cases}$$

Спаривание $[\cdot,\cdot]_{F,\mathcal{P}}$ определено корректно (см [5]) и индуцирует спаривание

$$[\cdot,\cdot]_{F,\mathcal{P}} : K_n(H_m) \times F_N(H_\mu) \to W_F^N.$$

Далее была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Символ Гильберта*

$$\{\cdot,\cdot\}^N_{F,K} : K_n^{\mathrm{top}}(K) \times F_N(\mathfrak{M}) \to W_F^N$$

имеет следующую явную формулу

$$\{\alpha,\beta\} = \langle \underline{\alpha}, \underline{\beta} \rangle = \sum_{j=1,(F)}^{h} [\mathrm{Tr}[\underline{\alpha}, \underline{\beta}]_{F,\Gamma_j}]_F(z_j).$$

3.6. Вспомогательные утверждения.

Замечание 2. Легко проверить, что для любого ряда $g \in \mathfrak{o}\{\{t_1\}\}\ldots\{\{t_{n-1}\}\}((X))$ и любого $i \in \mathbb{N}$ выполнено равенство

$$\frac{\partial}{\partial t_k}\Delta^i g = p^i t_k^{-1} \Delta^i \left(t_k \frac{\partial g}{\partial t_k} \right) \tag{7}$$

(здесь $t_n := X$).

Замечание 3. Если $f \in \mathcal{L}_\mu$, то $\Delta f \in \mathcal{L}_{\mu/p}$.

Обозначение 1. *Если ряд $\varphi = \varphi(t_1,\ldots,t_{n-1},X) \in M$ представим в виде*

$$\varphi = \partial_1\varphi_1 + \cdots + \partial_n\varphi_n,$$

где $\partial_i = \frac{\partial}{\partial t_i}$, $1 \le i \le n$, $t_n := X$, и каждый ряд $p^{h-1}\varphi_i$ лежит в модуле $\mathcal{H}_{\mu p^{(N-s)h}}$, то будем писать

$$\varphi \equiv 0 \mod \partial(s).$$

Для $s = N$ пишем $\partial := \partial(N)$.

Пусть $\mathcal{P} \in X^{-e_*}\mathcal{L}_\mu$ – примарный ряд. В [5] были доказаны следующие утверждения.

Лемма 5. *Предположим, что $\varphi \equiv 0 \mod \partial(s)$, и пусть ψ – ряд с целыми коэффициентами из $\mathfrak{o}$, $\psi(0) = 0$. Тогда*

$$\mathrm{res}_{t_1,\ldots,t_n}\, \varphi \cdot \mathcal{P}^{(s)}(\psi) \equiv 0 \mod p^s, \quad 0 \le s \le N.$$

В частности, $\mathrm{res}_{t_1,\ldots,t_n}\, \varphi \cdot \mathcal{P}(\psi) \equiv 0 \mod p^N$.

Лемма 6. *Пусть $f_{k,l}(t_1,\ldots,t_n)$, $1 \le k,l \le n$ – заданные ряды поля $M = M(K)$ (здесь $t_n := X$). Предположим, что для всех $1 \le k,l,m \le n$ выполнены следующие условия:*

$$\partial_m f_{k,l} = \partial_l f_{k,m}.$$

Пусть Δ_i, $1 \le i \le n$, обозначает определитель матрицы, полученной из матрицы $(f_{k,l})_{1\leqslant k,l\leqslant n}$ вычеркиванием i-го столбца и n-ой строки. Тогда для любого $\varphi \in M$ выполнено равенство:

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\Delta_i\partial_i\varphi = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\partial_i(\Delta_i\varphi).$$

Лемма 7. *Пусть $g \in \mathcal{H}_\mu$. Тогда для любого натурального m выполнено сравнение*

$$g^{mp^i} - g^{m\Delta^i} \equiv mp^i l_i(g) g^{m\Delta^i} \mod (mp)^2\mathcal{H}_\mu.$$

Лемма 8. *Если $m = p^{hr}m_0$, $p^h \nmid m_0$, $0 \le r < N$, $g \in \mathfrak{o}_T[[X]], \psi \in X^{-1}\mathfrak{o}_T[[X]]$, то*

$$\operatorname{res}\partial_k\left(\frac{g^m}{m}\cdot\psi\right)\cdot\mathcal{P} \equiv 0 \mod p^{N-r}$$

при всех $1 \le k \le n$.

Доказательство. Из определения примарного ряда следует, что

$$\Delta^{h(r+1)}(t_k\partial_k\mathcal{P}^{(N-r-1)}) \in p^{(N-r-1)}X^{-e_*(1+p^{h-1})}\mathcal{L}_\mu,$$
$$\Delta^{h(r+1)}\mathcal{P}^{(N-r-1)} - \mathcal{P} \in p^{N-r}X^{-e_*(1+p^{h-1})}\mathcal{L}_\mu.$$

Поэтому, учитывая (7) и замечание 1, по модулю p^{N-r} имеем сравнение:

$$\begin{aligned}\operatorname{res}\partial_k\left(\frac{g^m}{m}\cdot\psi\right)\cdot\mathcal{P} &\equiv \operatorname{res}\partial_k\left(\frac{g^m}{m}\cdot\psi\right)\cdot\Delta^{h(r+1)}\mathcal{P}^{(N-r-1)}\\ &= -\operatorname{res}\frac{g^m}{m}\psi\cdot\partial_k(\Delta^{h(r+1)}\mathcal{P}^{(N-r-1)})\\ &= -\operatorname{res}\frac{g^m}{m}\psi p^{h(r+1)}t_k^{-1}\Delta^{h(r+1)}(t_k\partial_k\mathcal{P}^{(N-r-1)})\\ &\equiv 0 \mod p^{N-r}.\end{aligned}$$

§4. Основной результат

В этом параграфе будет сформулирован и доказан основной результат работы, а именно, будут найдены условия норменности ряда.

4.1. Норменные ряды.

Определение 2. *Ряд $\varphi_N(X) = X\mathfrak{o}_T[[X]]$ назовем норменным степени N для формальной группы F, если для любого многомерного поля K, содержащего W_F^N, выполнено равенство:*

$$(\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha\}, \varphi_N(\alpha))_F^N = 0$$

при всех $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in K^*, \alpha \in F(\mathfrak{M})$.

Определение 3. *Ряд $\varphi(x) \in X\mathfrak{o}_T[[X]]$ назовем абсолютно норменным для формальной группы F, если он является норменным степени N при любом $N \geq 1$.*

Предложение 1. *Пусть для ряда $\varphi(X) \in X\mathfrak{o}_T[[X]]$ ряд*

$$l_F(\varphi(X)) = \sum_{m \geq 1} d_m X^m$$

удовлетворяет условию

$$v_T(d_m) \geq \min(N, v_{p^h}(m)) \tag{8}$$

при всех $m \geq 1$. Тогда ряд $\varphi(X)$ является норменным степени N для F.

Доказательство. 1) Пусть выполнено условие (8). Из (4) и теоремы 1 для всех $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in K^*, \alpha \in \mathfrak{M}$ получаем:

$$\begin{aligned}(\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha\}, \varphi(\alpha)) &= \{\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha\}, [p_1^{(N)}/p^N]_{F,F_N}(\varphi(\alpha))\} \\ &= \{\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha\}, \psi(\alpha)\} = \langle\{\underline{\alpha_1}, \dots, \underline{\alpha_{n-1}}, \underline{\alpha}\}, \psi(\underline{\alpha})\rangle,\end{aligned}$$

где $\psi = [p_1^{(N)}/p^N]_{F,F_N}(\varphi)$.
Пусть $\alpha_i \in H_m, 1 \leq i \leq n$, $\alpha = \alpha_n \in H_m \cap H_\mu$. Достаточно проверить:

$$\langle\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha\}, \psi(\alpha)\rangle = 0.$$

Покажем, что

$$[\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha\}, \psi(\alpha)]_{F,\Gamma_j} \equiv 0 \mod p^N.$$

Докажем сперва, что в ряде Φ_N (см. 5) определители D_{ij} равны 0 при $1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n$. Из равенства (7) получаем:

$$\alpha^{-\Delta^j}\partial_k\alpha^{\Delta^j} = p^j t_k^{-1}\Delta^j(t_k\alpha^{-1}\partial_k\alpha). \tag{9}$$

Пусть

$$\lambda_N \circ \psi(X) = \sum_{m \geq 1} c_m X^m,$$

$mc_m \in \mathfrak{o}_T$, т.к. $\frac{\partial}{\partial X}(\lambda_N \circ \psi) \in \mathfrak{o}_T$. Снова применяя (7), получаем:

$$\begin{aligned}
\partial_k(\Delta^j(\lambda_N \circ \psi(\alpha))) &= p^j t_k^{-1} \Delta^j (t_k \partial_k (\lambda_N \circ \psi(\alpha))) \\
&= p^j t_k^{-1} \Delta^j \left(t_k \partial_k \left(\sum_{m \geq 1} c_m \alpha^m \right) \right) \\
&= p^j t_k^{-1} \Delta^j \left(t_k \sum_{m \geq 1} c_m m \alpha^{m-1} \partial_k \alpha \right) \\
&= p^j t_k^{-1} \Delta^j (t_k \alpha^{-1} \partial_k \alpha) \cdot \left(\sum_{m \geq 1} c_m^{\Delta^j} m \alpha^{m \Delta^j} \right).
\end{aligned} \tag{10}$$

Сравнивая (9) и (10), видим, что в определителе D_{ij} строки с номерами n и $n-1$ пропорциональны, т.е. $D_{ij} = 0$.

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\Phi_N &= l_N(\psi(\alpha)) D_{n+1} - \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{h} b_j l_j(\alpha) D_{nj} \\
&= \begin{vmatrix}
\alpha_1^{-1} \partial_1 \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{-1} \partial_n \alpha_1 \\
\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots \\
\alpha_{n-1}^{-1} \partial_1 \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_{n-1}^{-1} \partial_n \alpha_{n-1} \\
\varphi_1 & \dots & \varphi_n
\end{vmatrix},
\end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\varphi_k = l_N(\psi(\alpha)) \alpha^{-1} \partial_k \alpha - \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{h} b_j l_j(\alpha) \partial_k (\Delta^j (\lambda_N \circ \psi(\alpha))).$$

Разложим определитель по n-й строке:

$$\Phi_N = (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \varphi_k \Delta_k,$$

где Δ_k – соответствующие миноры матрицы.

Пусть

$$l_N \circ \psi = \sum_{m\geq 1} c'_m X^m.$$

Так же, как в предложении 2.1 работы [1], для ряда φ_k получаем выражение:

$$\varphi_k = \sum_{m\geq 1} c'_m \partial_k \frac{\alpha^m}{m} + \partial_k g,$$

где

$$g = \sum_{i=1}^{h} b_i \sum_{m\geq 1} \frac{c_m^{\Delta^i}}{p} \left(\frac{\alpha^{mp^i} - \alpha^{m\Delta^i}}{mp^i} - l_i(\alpha)\alpha^{m\Delta^i} \right).$$

Для коэффициентов матрицы (11) выполняется условие леммы 6, поэтому:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \Delta_k \partial_k g = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \partial_k (\Delta_k g).$$

Таким образом, осталось проверить, что для всех $1 \leq j \leq n$ выполняются сравнения

$$\operatorname{res} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{m\geq 1} c'_m \partial_k \frac{\alpha^m}{m} \Delta_k \Gamma_j \equiv 0 \mod p^N, \tag{12}$$

$$\operatorname{res} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \partial_k (g\Delta_k) \Gamma_j \equiv 0 \mod p^N. \tag{13}$$

Из леммы 7 следует, что $p^{h-1} g \in X\mathcal{H}_\mu$. Ясно, что $X\Delta_k \in \mathfrak{o}_T[[X]]$, поэтому $p^{h-1} g\Delta_k \in \mathcal{H}_\mu$. Отсюда

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \partial_k (g\Delta_k) \equiv 0 \mod \partial$$

и сравнение (13) следует из леммы 5. Докажем сравнение (12):

Так же, как в доказательстве теоремы 5.1 работы [6], можно получить: $l_N(\psi) = l_N([p_1^{(N)}/p^N]_{F,F_N} \circ \varphi) = \frac{p_1^{(N)}}{p^N} l_F(\varphi)$. И, значит $c'_m = \frac{p_1^{(N)}}{p^N} d_m$, следовательно, коэффициенты c'_m тоже удовлетворяют условию (8).

Пусть $m = p^{hr} m_0, p^h \nmid m_0$. Если $r \geq N$, то (12) следует из того, что Γ_j имеет целые коэффициенты при неположительных степенях, а Δ_k имеет целые коэффициенты. Если $r < N$, то (12) вытекает из леммы 8.

Предложение доказано.

Теорема 2. *Ряд $\varphi(X) \in X\mathfrak{o}_T[[X]]$ является абсолютно норменным для F тогда и только тогда, когда ряд*

$$l_F(\varphi) = \sum_{m \geq 1} d_m X^m$$

удовлетворяет условию

$$v_T(d_m) \geq v_{p^h}(m) \tag{14}$$

при всех $m \geq 1$.

Доказательство. 1. Если ряд $\varphi(X) \in X\mathfrak{o}_T[[X]]$ удовлетворяет условию (14), то он удовлетворяет условию (8) предложения 1 при любом $N \geq 1$ и, следовательно, является абсолютно норменным.

2. Обратно. Будем придерживаться обозначений, введенных в доказательстве предложения 1. Пусть $\varphi(X) \in X\mathfrak{o}_T[[X]]$ и ряд $l_F(\varphi) = \sum_{m\geq 1} d_m X^m$ не удовлетворяет условию (14), т.е. для некоторых m : $v_T(d_m) < v_{p^h}(m)$. Выберем среди таких m наименьший индекс r с минимальным значением $v_T(d_r)$. Таким образом, если $r = p^{Nh} r_0$, $p^h \nmid r_0$, то

$$\begin{cases} v_T(d_r) < N, \\ v_T(d_r) < v_T(d_m), \quad m < r, \\ v_T(d_r) \leq v_T(d_m), \quad m \geq r, \end{cases} \tag{15}$$

где m пробегает все индексы, для которых не выполнено условие (14). Пусть K – вполне разветвленное расширение поля $T(W_F^N)$ степени r_0. $K/T(W_F^N)$ вполне разветвлено, поэтому можно выбрать в K простой элемент Π такой, что $z_1 = \Pi^{r_0} + b_1' \Pi^{r_0+1} + \cdots$, $b_i' \in \mathfrak{o}_T$. Соответственно, $z_i \equiv \theta_{i1} \Pi^{r_0} \mod \Pi^{r_0+1}$. $f^{(N)} \equiv X^{p^{Nh}} \mod p$, поэтому

$$W_j = \lambda_N \circ f^{(N)} \circ z_j \equiv \theta_{j1} X^r \mod (p, X^{r+1})$$
$$\Delta^{i-1} W_j \equiv \theta_j^{p^{i-1}} X^{rp^{i-1}} \mod (p, X^{rp^{i-1}+1}).$$

Отсюда

$$\det A \equiv X^{r+rp+\cdots+rp^{h-1}} \det \Theta \mod (p, X^{r+rp+\cdots+rp^{h-1}+1}). \tag{16}$$

По лемме 4 матрица Θ обратима. Из (3) имеем: $\Gamma_j = \frac{(-1)^{j+1}\Delta_{1j}(A)}{\det A}$.Так же, как и (16), можно получить, что

$$\Delta_{1j} \equiv X^{rp+\dots+rp^{h-1}} \det \Theta'_j \mod (p, X^{rp+\dots+rp^{h-1}+1}),$$

где Θ'_j – матрица, полученная из Θ вычеркиванием 1-й строки и j-го столбца.

$$\det \Theta = \sum_{j=1}^{h} (-1)^{j+1} \theta_{j1} \det \Theta'_j,$$

следовательно, т.к. матрица Θ обратима, $\det \Theta'_j$ обратим при некотором $1 \le j \le h$. Пусть $\det \Theta'_1$ обратим. Таким образом:

$$\Gamma_1 \equiv \frac{\det \Theta'_1}{\det \Theta} X^{-r} \mod (p, X^{-r+1}). \tag{17}$$

Вычислим символ Гильберта $(\{t_1, \dots, t_{n-1}, \Pi\}, \varphi(\Pi))_F$. Из явной формулы получаем:

$$\begin{aligned}
(\{t_1, \dots, t_{n-1}, \Pi\}, \varphi(\Pi)) &= \{\{t_1, \dots, t_{n-1}, \Pi\}, [p_1^{(N)}/p^N]_{F,F_N}(\varphi(\Pi))\} \\
&= \{\{t_1, \dots, t_{n-1}, \Pi\}, \psi(\Pi)\} \\
&= \langle \{t_1, \dots, t_{n-1}, X\}, \psi(X) \rangle \\
&= \sum_{j=1,(F)}^{h} [\mathrm{Tr}[\{t_1, \dots, t_{n-1}, X\}, \psi(X)]_{F,\Gamma_j}]_F(z_j),
\end{aligned}$$

где

$$[\{t_1, \dots, t_{n-1}, X\}, \psi(X)]_{F,\Gamma_j} = \operatorname{res} \Phi_N \cdot \Gamma_j,$$

$$\Phi_N = l_N(\psi(X)) D_{n+1} = \sum_{m \ge 1} c'_m X^m D_{n+1} = \sum_{m \ge 1} \frac{p_1^{(N)}}{p^N} d_m X^m D_{n+1},$$

$$D_{n+1} = \det \begin{vmatrix} \frac{1}{t_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{t_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{X} \end{vmatrix} = \frac{1}{t_1 \cdots t_{n-1} X}.$$

Из (17) следует, что

$$\operatorname{res} c'_r X^r \frac{1}{t_1 \cdots t_{n-1} X} \cdot \Gamma_1 \equiv c'_r \frac{\det \Theta'_1}{\det \Theta} \mod p c'_r.$$

А для $m \neq r$:

$$\operatorname{res} c'_m X^m \frac{1}{t_1 \cdots t_{n-1} X} \cdot \Gamma_1 \equiv 0 \mod pc'_r, \tag{18}$$

т.к. если для m не выполнено условие (14), то (18) следует из (15), а если выполнено, то из (15) и леммы 8. Таким образом, $\operatorname{res} \Phi_N \Gamma_1 \equiv c'_r \frac{\det \Theta'_1}{\det \Theta} \mod pc'_r$, откуда $\operatorname{Tr} \operatorname{res} \Phi_N \Gamma_1 \not\equiv 0 \mod p^N$, и значит

$$\big(\{t_1, \ldots, t_{n-1}, \Pi\}, \varphi(\Pi)\big) \neq 0.$$

□

Литература

1. С. В. Востоков, Р. Перлис, *Норменные ряды для формальных групп Любина–Тейта.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **281** (2001), 105–127.
2. С. С. Афанасьева, Г. К. Пак, *Норменные ряды для формальных групп Хонды.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **388** (2011), 5–16.
3. С. В. Востоков, Г. К. Пак, *Норменные ряды в многомерном локальном поле.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **305** (2003), 60–83.
4. В. А. Колывагин, *Формальные группы и символ норменного вычета.* — Изв. АН СССР. Сер. матем. **43:5** (1979), 1054–1120.
5. М. В. Бондарко, С. В. Востоков, Ф. Лоренц, *Спаривание Гильберта для формальных групп над σ-кольцами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **319** (2004), 5–58.
6. С. В. Востоков, О. В. Демченко, *Явная формула спаривания Гильберта для формальных групп Хонды.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **272** (2000), 86–128.

Afanas'eva S. S. Norm series for multi-dimensional Honda formal groups.

In the present paper we study norm series for multi-dimensional Honda formal groups. We consider the norm series satisfying the generalized Steinberg relation with respect to the norm residue symbol for Honda groups over multi-dimensional local fields. The necessary and sufficient conditions for the norm series are obtained.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: cheery_sonya@mail.ru

Поступило 28 ноября 2011 г.