

А. Г. Пронько

**О ВЕРОЯТНОСТИ ОБРАЗОВАНИЯ ПУСТОТЫ В
СВОБОДНОФЕРМИОННОЙ ШЕСТИВЕРШИННОЙ
МОДЕЛИ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ
ДОМЕННОЙ СТЕНКИ**

1. ВВЕДЕНИЕ

Шестивершинная модель с граничными условиями доменной стенки впервые обсуждалась в работе [1], где рассматривался ее неоднородный вариант для вычисления скалярных произведений векторов Бете в рамках квантового метода обратной задачи. В работе [2] было показано (см. также [3]), что статистическая сумма модели представима в виде некоторого определителя, который для однородной модели является ганкелевым. Это свойство было использовано в работах [4, 5] для исследования термодинамического предела модели, где ганкелев определитель рассматривался как тау-функция полубесконечной цепочки Тоды и как статистическая сумма некоторой матричной модели; привлечение матричной задачи Римана–Гильберта обсуждалось в работах [6, 7].

В настоящей работе обсуждается вероятность образования пустоты — нелокальная корреляционная функция описывающая вероятность ферроэлектрического упорядочивания. В работе [8] Ф. Коломо и автором для вероятности образования пустоты было получено представление в терминах многократного интеграла; в работах [9–11] это представление было использовано для решения задачи о нахождении аналитического выражения для кривой раздела фаз (т.н. арктической кривой). Открытой задачей, однако, остается вычисление асимптотики для вероятности образования пустоты в скейлинговом пределе.

Ключевые слова: шестивершинная модель, корреляционные функции, граничные условия доменной стенки, вероятность образования пустоты, представления многократными интегралами, ганкелевы определители, определители Фредгольма, интегрируемые интегральные операторы, цепочки Тоды.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ 10-01-00600. Автор также благодарит за финансовую поддержку фонд им. А. Гумбольдта (Германия).

Даже в наиболее технически простом случае, когда веса модели удовлетворяют условию свободных фермионов, многократный интеграл оказывается эквивалентен матричной модели с потенциалом содержащим тройную логарифмическую сингулярность (т.н. тройная проблема Пеннера), решение уравнений седловой точки для которой неизвестно (см., например, обсуждение в [9] и ссылки там).

Один из возможных путей в направлении решения этой задачи заключается в поиске эквивалентных, желательнее более простых, представлений для вероятности образования пустоты, нежели представление многократным интегралом. Существование таких представлений естественно ожидать, как минимум, в случае когда веса удовлетворяют условию свободных фермионов. В этой работе предъясняются три тесно связанных между собой эквивалентных способа описания (помимо представлением многократным интегралом) для вероятности образования пустоты в такой модели. А именно, вероятность образования пустоты выражается в терминах ганкелевых определителей, определителей Фредгольма интегрируемых интегральных операторов, а также как решение системы нелинейных дифференциальных (разностных по дискретным переменным) уравнений. В частности, в этой системе содержатся уравнения для тау-функций конечной и полубесконечной цепочек Тоды.

Статья организована следующим образом. В следующем разделе даются определения модели и вероятности образования пустоты, и приводится представление многократным интегралом; здесь также сформулированы основные результаты. Остальные три раздела посвящены доказательству этих результатов, а именно, в разделе 3 обсуждаются представления в терминах ганкелевых определителей, в разделе 4 – в терминах определителей Фредгольма, и, наконец, в разделе 5 выводятся дифференциальные уравнения. В приложении дан вывод некоторых формул используемых в вычислениях в последнем разделе.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Чтобы сформулировать полученные результаты, напомним вначале определение модели и приведем полученное ранее выражение для вероятности образования пустоты. Шестивершинная модель рассматривается на конечной квадратной решетке образованной пересечением N вертикальных и N горизонтальных прямых (т.н. $N \times N$ решетка). Конфигурации модели получаются путем размещения стрелок вдоль

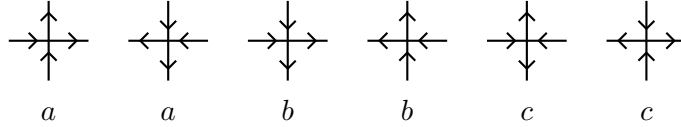


Рис. 1. Шесть допустимых конфигураций стрелок вокруг вершины и их бoльцмановские веса.

ребер решетки, так что каждая вершина содержит равное количество входящих и исходящих стрелок на примыкающих ребрах, см. Рис. 1. Статистическая сумма определяется как

$$Z_N = \sum_{\mathcal{C} \in \Omega_N} a^{n_a(\mathcal{C})} b^{n_b(\mathcal{C})} c^{n_c(\mathcal{C})}, \quad (2.1)$$

где $n_a(\mathcal{C})$, $n_b(\mathcal{C})$, $n_c(\mathcal{C})$ число вершин с весом a , b , c , соответственно, в конфигурации \mathcal{C} , а Ω_N это множество всех конфигураций стрелок на $N \times N$ решетке с граничными условиями доменной стенки. Эти граничные условия означают, что все стрелки на внешних горизонтальных ребрах направлены извне решетки, а на всех внешних вертикальных ребрах — внутрь решетки.

Вероятность образования пустоты (используются определения и обозначения работ [8, 9]) определяется формулой

$$F_N^{(r,s)} = \frac{1}{Z_N} \sum_{\mathcal{C} \in \Omega_N^{(r,s)}} a^{n_a(\mathcal{C})} b^{n_b(\mathcal{C})} c^{n_c(\mathcal{C})}, \quad (2.2)$$

где $\Omega_N^{(r,s)}$ обозначает множество всех конфигураций стрелок на $N \times N$ решетке, таких, что все вершины на $s \times (N-r)$ подрешетке примыкающей к левому верхнему углу $N \times N$ решетки содержат на всех примыкающих горизонтальных ребрах стрелки направленные влево, а на всех вертикальных ребрах — стрелки направленные вниз, см. Рис. 2. Эквивалентно, вероятность образования пустоты есть вероятность конфигурации со всеми вершинами на указанной $s \times (N-r)$ подрешетке являющимися вершинами второго типа (см. Рис. 1).

Вероятность образования пустоты (2.2), в силу граничных условий доменной стенки, не равна тождественно нулю только если $0 \leq s \leq r \leq N$. Кроме того, вероятность образования пустоты удовлетворяет соотношению

$$F_N^{(r,s)} = F_N^{(N-s, N-r)}, \quad (2.3)$$

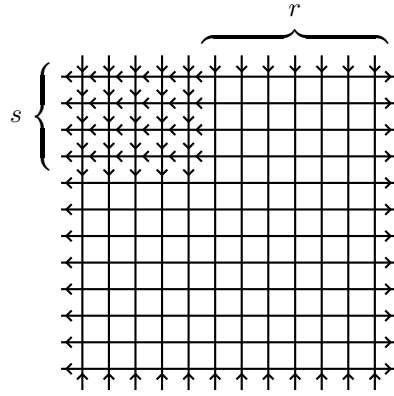


Рис. 2. Конфигурация стрелок на $N \times N$ решетке с граничными условиями доменной стенки, вероятность которой равна $F_N^{(r,s)}$ ($N = 12$, $r = 7$, $s = 4$).

которое есть следствие симметрии весов и $N \times N$ решетки с граничными условиями доменной стенки при отражении относительно “главной” диагонали (см. Рис. 1 и 2).

Условие свободных фермионов означает, что веса ограничены условием $a^2 + b^2 = c^2$. Здесь будет использоваться следующая параметризация весов

$$\frac{a}{c} = \sqrt{1 - \alpha}, \quad \frac{b}{c} = \sqrt{\alpha} \quad (0 < \alpha < 1). \quad (2.4)$$

Специальный случай шестивершинной модели с весами вида (2.4) известен как технически наиболее простой; статистическая сумма модели равна $Z_N = c^{N^2}$. Тем не менее, такая модель является весьма содержательной, в частности, она эквивалентна (при значениях весов $a = b = 1$, $c = \sqrt{2}$) укладкам домино т.н. “алмаза Ацтеков” [12], комбинаторной задаче, в которой впервые была установлена теорема об “арктическом круге” [13, 14]. Эта, а также тесно связанные с ней модели, такие как задача димеров на квадратной решетке, активно обсуждаются в литературе (см., среди других, работы [15–19] и библиографию в них).

Вероятность образования пустоты для произвольных значений весов a , b , c была вычислена, в терминах многократного интеграла, в

работе [8]. В специальном случае, когда веса модели удовлетворяют условию свободных фермионов, это представление имеет вид:

$$F_N^{(r,s)} = \frac{(-1)^{s(s+1)/2}}{s!} \oint_{C_0} \cdots \oint_{C_0} \prod_{1 \leq j < k \leq s} (z_j - z_k)^2 \times \prod_{j=1}^s \frac{(\alpha z_j + 1 - \alpha)^{N-s}}{z_j^r (z_j - 1)^s} \frac{d^s z}{(2\pi i)^s}. \quad (2.5)$$

Здесь C_0 обозначает простой, замкнутый, положительно ориентированный контур содержащий точку $z = 0$ и лежащий в ее малой окрестности. Формула (2.5) справедлива для всех $s, r = 0, 1, \dots, N$ и обсуждалась ранее в работе [9] в связи с воспроизведением результата для кривой разделения фаз в свободнофермионной модели, см. также [11], раздел 5. Используемый здесь параметр α связан с параметрами τ и t , использовавшимися в работах [9] и [11], соответственно, как $\alpha = \tau/(1 + \tau) = t^2/(1 + t^2)$.

Для того чтобы перейти к результатам, сделаем вначале замену дискретных параметров и введем новое обозначение для вероятности образования пустоты. В силу соотношения (2.3) вероятность образования пустоты достаточно рассматривать при $s \leq N - r$. При значениях параметров удовлетворяющих этому условию, вместо набора дискретных параметров r, s, N , удобно использовать набор параметров r, s, q , где $q = N - r - s \geq 0$. Параметр q введен так, что “замороженная” область (см. Рис. 2) имеет размер $s \times (s + q)$, при этом размер всей решетки задается параметром r . Вероятность образования пустоты в терминах нового набора будем обозначать как $f_{r,s,q}$, т.е.

$$f_{r,s,q} := F_{r+s+q}^{(r,s)} \quad (q = 0, 1, \dots). \quad (2.6)$$

Один из основных результатов настоящей работы заключается в том, что величина $f_{r,s,q}$, для модели с весами (2.4), для всех $r, s, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ допускает представление в виде ганкелевого определителя

$$f_{r,s,q} = \prod_{k=0}^{s-1} \frac{q!}{(q+k)!k!} \cdot \frac{(1-\alpha)^{s(s+q)}}{\alpha^{s(s-1)/2}} \times \det_{1 \leq j, k \leq s} \left[\sum_{m=0}^{r-1} m^{j+k-2} \frac{(q+m)!}{q!m!} \alpha^m \right]. \quad (2.7)$$

Эта формула является ключевой для вывода всех других результатов, обсуждаемых ниже.

Используя формулу (2.7) можно показать, что вероятность образования пустоты представима в терминах определителей Фредгольма. Например, имеет место представление в терминах $s \times s$ матрицы

$$f_{r,s,q} = \det_{0 \leq j,l \leq s-1} [\delta_{jl} - (V_{r,q})_{jl}], \quad (2.8)$$

где матрица $V_{r,q}$ симметричная и имеет матричные элементы

$$(V_{r,q})_{jl} = \frac{1}{q!} \sqrt{\frac{(q+j)!(q+l)!}{j!l!}} (1-\alpha)^{q+1} \times \sum_{m=r}^{\infty} \frac{(q+m)!}{q!m!} \alpha^m M_j(m; q+1, \alpha) M_l(m; q+1, \alpha), \quad (2.9)$$

либо интегрального оператора с дискретным ядром

$$f_{r,s,q} = \det \left(I - U_{s,q} \Big|_{\mathbb{Z}_{\geq r}} \right), \quad (2.10)$$

где ядро оператора $U_{s,q}$ имеет вид

$$U_{s,q}(m, n) = \frac{1}{q!} \sqrt{\frac{(m+q)!(n+q)!}{m!n!}} (1-\alpha)^{q+1} \times \sum_{j=0}^{s-1} \frac{(q+j)!}{q!j!} \alpha^j M_j(m; q+1, \alpha) M_j(n; q+1, \alpha) \quad (2.11)$$

и используемые обозначения указывают, что m, n принимают значения на множестве $\mathbb{Z}_{\geq r} := \{r, r+1, \dots\}$, а также использовано стандартное обозначение для полиномов Майкснера. Отметим, что элементы матрицы $V_{r,q}$ зависят от r и q (и не зависят от s), а ядро оператора $U_{s,q}$ зависит от s и q (и не зависит от r).

Представления в терминах определителей Фредгольма, в свою очередь, позволяют вывести дифференциальные уравнения вероятности образования пустоты. А именно, функция $f_{r,s,q} = f_{r,s,q}(\alpha)$, при фиксированном s и переменных r и q (напомним, что $r, s, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $s \leq r$)

удовлетворяет уравнениям

$$\mathcal{D}_\alpha^2 \log f_{r,s,q} = \frac{r(r+q)\alpha}{(1-\alpha)^2} \left(\frac{f_{r+1,s,q} f_{r-1,s,q}}{f_{r,s,q}^2} - 1 \right), \quad (2.12a)$$

$$\mathcal{D}_\alpha \log \frac{f_{r,s,q+1}}{f_{r,s,q}} = \frac{r\alpha}{1-\alpha} \left(\frac{f_{r+1,s,q} f_{r-1,s,q+1}}{f_{r,s,q} f_{r,s,q+1}} - 1 \right), \quad (2.12b)$$

$$\mathcal{D}_\alpha \log \frac{f_{r+1,s,q}}{f_{r,s,q+1}} = \frac{r+q+1}{1-\alpha} \left(\frac{f_{r+1,s,q+1} f_{r,s,q}}{f_{r,s,q+1} f_{r+1,s,q}} - 1 \right), \quad (2.12c)$$

а при фиксированном r и переменных s и q , уравнениям

$$\mathcal{D}_\alpha^2 \log f_{r,s,q} = \frac{s(s+q)\alpha}{(1-\alpha)^2} \left(\frac{f_{r,s+1,q} f_{r,s-1,q}}{f_{r,s,q}^2} - 1 \right), \quad (2.13a)$$

$$\mathcal{D}_\alpha \log \frac{f_{r,s,q+1}}{f_{r,s,q}} = \frac{s\alpha}{1-\alpha} \left(\frac{f_{r,s+1,q} f_{r,s-1,q+1}}{f_{r,s,q} f_{r,s,q+1}} - 1 \right), \quad (2.13b)$$

$$\mathcal{D}_\alpha \log \frac{f_{r,s+1,q}}{f_{r,s,q+1}} = \frac{s+q+1}{1-\alpha} \left(\frac{f_{r,s+1,q+1} f_{r,s,q}}{f_{r,s,q+1} f_{r,s+1,q}} - 1 \right), \quad (2.13c)$$

причем в уравнениях (2.12a) и (2.13a) фиксировано также и q . Здесь и всюду ниже используется обозначение

$$\mathcal{D}_\alpha := \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}. \quad (2.14)$$

Очевидное свойство систем уравнений (2.12) и (2.13) это их формальная симметрия при перестановке дискретных переменных s и r (хотя области их значений различны, $0 \leq s \leq r$); эта симметрия возникает в результате симметрии между собой представлений (2.8) и (2.10).

Уравнения (2.12) и (2.13) можно рассматривать как некоторые эволюционные уравнения, например, вводя время t ($0 < t < \infty$) с помощью параметризации $\alpha = \exp(-t)$, так что $\mathcal{D}_\alpha = -\partial_t$. Тогда уравнение (2.13a) есть не что иное, как переписанное уравнение для тау-функции цепочки Тоды, $\partial_t^2 \log \tau_s = \tau_{s+1} \tau_{s-1} / \tau_s^2$, где $\tau_s = \tau_s(t)$ равна определителю в формуле (2.7), и которое следует из тождества Сильвестра для определителей [20–23]. В этом случае цепочка Тоды конечная ($s = 0, 1, \dots, r$), см., например, [24]. С другой стороны, из уравнения (2.12a) следует, что функция $f_{r,s,q}$ связана также и с тау-функцией некоторой полубесконечной цепочки Тоды, $\tilde{\tau}_n$, где $n = r - s$ ($n = 0, 1, \dots$).

Наконец, отметим, что из трех уравнений в (2.12), и, аналогично, из таковых в (2.13), одно из уравнений может быть выведено из двух

других, при условии, что указано подходящее либо граничное (при $s = 0$), либо одно из асимптотических (при $r \rightarrow \infty$ или при $q \rightarrow \infty$) условий,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f_{r,s,q} = 1, \quad f_{r,s,q}|_{s=0} = 1, \quad \lim_{q \rightarrow \infty} f_{r,s,q} = 0, \quad (2.15)$$

либо указаны начальные данные (по переменной α), в частности, можно использовать одно из двух условий:

$$\lim_{\alpha \searrow 0} f_{r,s,q} = 1 \quad (s \leq r), \quad \lim_{\alpha \nearrow 1} f_{r,s,q} = 0 \quad (s \neq 0). \quad (2.16)$$

Условия (2.15) и (2.16) следуют из определения для вероятности образования пустоты, либо могут быть получены из представления (2.7). Таким образом, из шести уравнений (2.12) и (2.13) только четыре (по два в каждой системе) являются независимыми.

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ТЕРМИНАХ ГАНКЕЛЕВЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Основной целью этого раздела является доказательство формулы (2.7). Также обсуждаются вкратце другие представления.

Чтобы вывести (2.7) начнем с того, что перепишем интеграл (2.5), переходя к переменным $x_j = (\alpha z_j + 1 - \alpha)/z_j$ ($j = 1, \dots, s$), в виде

$$F_N^{(r,s)} = \frac{(-1)^{\frac{s(s-1)}{2}} (1-\alpha)^{(N-r)s}}{s!} \oint_{C_\infty} \cdots \oint_{C_\infty} \prod_{1 \leq j < k \leq s} (x_j - x_k)^2 \times \prod_{j=1}^s \frac{x_j^{N-s}}{(x_j - \alpha)^{N-r} (x_j - 1)^s} \frac{d^s x}{(2\pi i)^s}, \quad (3.1)$$

где C_∞ некоторый большой замкнутый положительно ориентированный контур. Запишем это представление в виде определителя, используя очевидное тождество

$$\text{Sym}_{x_1, \dots, x_s} \prod_{j=1}^s (x_j - \alpha)^{j-1} \det_{1 \leq j, k \leq s} [(x_j - 1)^{k-1}] = \frac{1}{s!} \prod_{1 \leq j < k \leq s} (x_j - x_k)^2 \quad (3.2)$$

где в левой части производится взятие симметричной части функции относительно перестановок переменных x_1, \dots, x_s . Тогда для вероятности образования пустоты получим представление

$$F_N^{(r,s)} = (-1)^{\frac{s(s-1)}{2}} (1-\alpha)^{(N-r)s} \times \det_{1 \leq j, k \leq s} \left[\oint_{C_\infty} \frac{x^{N-s}}{(x-\alpha)^{N-r-j+1} (x-1)^{s-k+1}} \frac{dx}{2\pi i} \right]. \quad (3.3)$$

Рассмотрим теперь величину $f_{r,s,q}$, определяя ее как значение правой части (3.3) при $N = r + s + q$, где $q \geq 0$. Меняя порядок строк и столбцов в определителе, имеем представление

$$F_N^{(r,s)} = (-1)^{\frac{s(s-1)}{2}} (1-\alpha)^{(s+q)s} \det_{1 \leq j, k \leq s} [g_{j,k}(\alpha, \beta)] \Big|_{\beta=1}, \quad (3.4)$$

где для дальнейшего удобства вычислений введена дополнительная переменная β , а функция $g_{j,k}(\alpha, \beta)$ дается формулой

$$g_{j,k}(\alpha, \beta) := \oint_{C_\infty} \frac{x^{r+q}}{(x-\alpha)^{q+j} (x-\beta)^k} \frac{dx}{2\pi i}. \quad (3.5)$$

Нашей целью, таким образом, — показать, что определитель в выражении (3.4), с точностью до множителя, равен ганкелеву определителю.

Поскольку $q \geq 0$, можно написать

$$g_{j,k}(\alpha, \beta) = \frac{q!}{(q+j-1)!(k-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \right)^{j-1} \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \right)^{k-1} g_{1,1}(\alpha, \beta). \quad (3.6)$$

Рассмотрим следующую параметризацию переменных α, β в терминах переменных v, u , соответственно,

$$\alpha = e^v, \quad \beta = e^{-u}. \quad (3.7)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \right)^{j-1} &= \left(e^{-v} \frac{\partial}{\partial v} \right)^{j-1} \\ &= e^{-(j-1)v} \left(\frac{\partial}{\partial v} - j + 2 \right) \left(\frac{\partial}{\partial v} - j + 3 \right) \cdots \frac{\partial}{\partial v} \\ &= e^{-(j-1)v} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)^{j-1} + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где многоточие в скобках обозначает полином (с целыми коэффициентами) степени $j - 2$ по переменной $\partial/\partial v$. Аналогично, имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial \beta}\right)^{k-1} = (-1)^{k-1} e^{(k-1)u} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^{k-1} + \dots \right\}, \quad (3.9)$$

где многоточие в скобках обозначает члены младших степеней, на этот раз по $\partial/\partial u$. Рассматривая линейные комбинации строк и, независимо, столбцов, получим

$$\begin{aligned} \det_{1 \leq j, k \leq s} [g_{j,k}(\alpha, \beta)] &= (q!)^s \prod_{j=1}^s \frac{e^{-(j-1)v}}{(q+j-1)!} \prod_{k=1}^s \frac{(-1)^{k-1} e^{(k-1)u}}{(k-1)!} \\ &\times \det_{1 \leq j, k \leq s} \left[\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^{j-1} \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^{k-1} g_{1,1}(e^v, e^{-u}) \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Чтобы далее преобразовать определитель, воспользуемся следующим простым свойством функции $g_{1,1}(e^v, e^{-u})$. Выполняя в интеграле (3.5) замену переменных $x \mapsto e^{-u}x$, получим

$$g_{1,1}(e^v, e^{-u}) = e^{-(r-1)u} g_{1,1}(e^{v+u}, 1). \quad (3.11)$$

Поскольку $(\partial/\partial u)^{k-1} e^{-(r-1)u} = e^{-(r-1)u} [(\partial/\partial u)^{k-1} + \dots]$, где, как и выше, многоточие обозначает члены младших степеней по $\partial/\partial u$ с целыми коэффициентами, получим

$$\begin{aligned} &\det_{1 \leq j, k \leq s} \left[\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^{j-1} \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^{k-1} g_{1,1}(e^v, e^{-u}) \right] \\ &= e^{-s(r-1)u} \det_{1 \leq j, k \leq s} \left[\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^{j-1} \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^{k-1} g_{1,1}(e^{v+u}, 1) \right] \\ &= e^{-s(r-1)u} \det_{1 \leq j, k \leq s} \left[\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^{j+k-2} g_{1,1}(e^{v+u}, 1) \right]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

В итоге, подставляя (3.12) в (3.10), и возвращаясь к исходным переменным, определитель в (3.4) оказывается выраженным через ганкелев определитель:

$$\det_{1 \leq j, k \leq s} [g_{j,k}(\alpha, \beta)] = \frac{(-1)^{\frac{s(s-1)}{2}} (q!)^s}{\prod_{k=1}^s (q+k-1)!(k-1)!} \frac{\beta^{s(r-1) - \frac{s(s-1)}{2}}}{\alpha^{\frac{s(s-1)}{2}}} \times \det_{1 \leq j, k \leq s} \left[\left(\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right)^{j+k-2} g_{1,1}(\alpha/\beta, 1) \right]. \quad (3.13)$$

Нам осталось получить явное выражение для элементов матрицы в (3.13). Применяя вновь трюк с дифференцированием интеграла, можем написать

$$g_{1,1}(\alpha, 1) = \frac{1}{q!} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \right)^q \oint_{C_\infty} \frac{x^{r+q}}{(x-\alpha)(x-1)} \frac{dx}{2\pi i}. \quad (3.14)$$

Вычисляя интеграл по вычетам, получим

$$\begin{aligned} g_{1,1}(\alpha, 1) &= \frac{1}{q!} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \right)^q \frac{1 - \alpha^{r+q}}{1 - \alpha} \\ &= \frac{1}{q!} \sum_{m=0}^{r-1} \frac{(q+m)!}{m!} \alpha^m. \end{aligned} \quad (3.15)$$

После подстановки этого выражения в (3.13) и дифференцирования, формула (3.4) есть в точности формула (2.7), которая, таким образом, доказана.

Полезно кратко обсудить некоторые свойства только что доказанного представления. Стоит отметить, что это представление, в частности, интересно тем, что связано с матричной моделью которая значительно проще, чем та модель с которой связано исходное представление многократным интегралом. Особенность матричной модели связанной с представлением (2.7) в том, что мера интегрирования дискретная и задана на конечном множестве значений. Этот факт имеет несколько интересных следствий; полезно обсудить одно из них, которое имеет отношение к ганкелевым определителям.

А именно, представление (2.7), которое содержит определитель $s \times s$ матрицы, ранг которой конечен (равен r), позволяет вывести эквивалентное представление, которое содержит определитель $(r-s) \times (r-s)$

матрицы (которая тоже имеет ранг r). Используя стандартные свойства ганкелева определителя, можем написать формулу

$$\det_{1 \leq j, k \leq s} \left[\sum_{m=0}^{r-1} m^{j+k-2} \rho(m) \right] = \sum_{0 \leq m_1 < \dots < m_s \leq r-1} \prod_{1 \leq j < k \leq s} (m_k - m_j)^2 \times \prod_{j=1}^s \rho(m_j), \quad (3.16)$$

где функция $\rho(m)$ произвольна; в нашем случае ее выражение легко извлекается из (2.7). Поскольку суммирование производится по конечному набору значений, это суммирование можно переписать как суммирование по незаполненным значениям (“дыркам”), а именно, по значениям $0 \leq p_1 < \dots < p_{r-s} \leq r-1$, таким, что

$$\{p_1, \dots, p_{r-s}\} := \{0, 1, \dots, r-1\} \setminus \{m_1, \dots, m_s\}. \quad (3.17)$$

Можно доказать, что

$$\prod_{1 \leq j < k \leq s} (m_k - m_j) = \frac{(r-1)!(r-2)! \dots 1!}{\prod_{j=1}^{r-s} (r-1-p_j)! p_j!} \prod_{1 \leq j < k \leq r-s} (p_k - p_j). \quad (3.18)$$

Желаемое преобразование суммирования в результате имеет вид

$$\begin{aligned} & \det_{1 \leq j, k \leq s} \left[\sum_{m=0}^{r-1} m^{j+k-2} \rho(m) \right] \\ &= \prod_{k=0}^{r-1} (k!)^2 \rho(k) \sum_{0 \leq p_1 < \dots < p_{r-s} \leq r-1} \prod_{1 \leq j < k \leq r-s} (p_k - p_j)^2 \\ & \quad \times \prod_{j=1}^{r-s} \frac{1}{(p_j!)^2 [(r-1-p_j)!]^2 \rho(p_j)}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Подставляя сюда явное выражение для функции $\rho(m)$ из (2.7), выполняя замену $p_j = r-1-m_j$ ($j = 1, \dots, r-s$) и переписывая сумму в виде ганкелевого определителя, для функции $f_{r,s,q}$ получим следующее

представление

$$f_{r,s,q} = \prod_{k=s}^{r-1} \frac{(q+k)!k!}{q!} \cdot \frac{(1-\alpha)^{s(s+q)}}{\alpha^{(r-s)(r-s-1)/2}} \times \det_{1 \leq j, k \leq r-s} \left[\sum_{m=0}^{r-1} \frac{m^{j+k-2} q! \alpha^m}{(q+r-m-1)!(r-m-1)!(m!)^2} \right]. \quad (3.20)$$

Это представление, также как и исходное представление (2.7), связано с тау-функцией конечной цепочки Тоды τ_s ($s = 0, 1, \dots, r$) описываемой уравнением (2.13а).

Формула (3.20) позволяет явно вычислить функцию $f_{r,s,q}$ при значениях r , близких к s , например,

$$f_{r,s,q}|_{r=s} = (1-\alpha)^{s(s+q)}. \quad (3.21)$$

Также имеем

$$f_{r,s,q}|_{r=s+1} = (1-\alpha)^{s(s+q)} \sum_{m=0}^s \binom{q+s}{m} \binom{s}{m} \alpha^m. \quad (3.22)$$

Эти специальные значения функции $f_{r,s,q}$ позволяют получить граничные значения $\tilde{\tau}_0$ и $\tilde{\tau}_1$, соответственно, для тау-функции $\tilde{\tau}_n$, где $n = r-s$ ($n = 0, 1, \dots$), полубесконечной цепочки Тоды связанной с уравнением (2.12а). Эти значения фиксируют выражение для $\tilde{\tau}_n$ в виде некоторого ганкелевого определителя, что, в свою очередь, позволяет написать еще одно представление для функции $f_{r,s,q}$, а именно

$$f_{r,s,q} = [s!(s+q)!]^{r-s} \prod_{k=s}^{r-1} \frac{1}{k!(k+q)!} \cdot \frac{(1-\alpha)^{r(s+q)}}{\alpha^{\frac{(r-s)(r-s-1)}{2}}} \times \det_{1 \leq j, k \leq r-s} \left[\mathcal{D}_\alpha^{j+k-2} \frac{1}{(1-\alpha)^{2s+q+1}} \sum_{m=0}^s \binom{q+s}{m} \binom{s}{m} \alpha^m \right]. \quad (3.23)$$

Доказательство того, что функция $f_{r,s,q}$ задаваемая формулой (2.7) удовлетворяет, в частности, уравнению (2.12а), является одной из наших целей ниже (детали вывода (2.12а) см. в последнем разделе).

4. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ТЕРМИНАХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ФРЕДГОЛЬМА

Представим сумму в выражении для элементов матрицы в определителе в (2.7) как разность двух бесконечных сумм

$$\sum_{m=0}^{r-1} = \sum_{m=0}^{\infty} - \sum_{m=r}^{\infty} \quad (4.1)$$

и обозначим через A_0 и A_r матрицы, соответствующие первой и второй суммам, соответственно. В частности

$$(A_r)_{jk} = \sum_{m=r}^{\infty} m^{j+k-2} \rho(m), \quad (4.2)$$

где функция $\rho(m) = \rho(m; q, \alpha)$ определена формулой

$$\rho(m) = \frac{(q+m)!}{q!m!} \alpha^m. \quad (4.3)$$

Определитель в (2.7) перепишем в виде

$$\det(A_0 - A_r) = \det A_0 \cdot \det(I - A_0^{-1} A_r). \quad (4.4)$$

Определитель матрицы A_0 и элементы обратной матрицы, A_0^{-1} , явно вычисляются. Действительно, согласно общей теории ганкелевых матриц (см., например, [25]) матрица (4.2) при $r = 0$ естественно связана с ансамблем полиномов Майкснера $\{M_n(x; q+1, \alpha)\}_{n=0}^{\infty}$, условие ортогональности которых для $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ имеет вид

$$\sum_{m=0}^{\infty} \rho(m) M_j(m; q+1, \alpha) M_k(m; q+1, \alpha) = h_j \delta_{jk}, \quad (4.5)$$

где нормировочный коэффициент равен

$$h_j = \frac{j!q!}{(q+j)!} \frac{1}{\alpha^j (1-\alpha)^{q+1}}. \quad (4.6)$$

Полиномы Майкснера имеют явный вид (см., например, [26])

$$M_j(m; q+1, \alpha) = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -j, -m \\ q+1 \end{matrix} \middle| 1 - \frac{1}{\alpha} \right). \quad (4.7)$$

Обозначая через \varkappa_j старший коэффициент полинома $M_j(m; q + 1, \alpha)$, и извлекая из (4.7) явное выражение

$$\varkappa_j = (-1)^j \frac{q!}{(q+j)!} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^j, \quad (4.8)$$

стандартное вычисление определителя ганкелевой матрицы для матрицы A_0 дает

$$\begin{aligned} \det A_0 &= \prod_{j=0}^{s-1} \frac{h_j}{\varkappa_j^2} = \prod_{j=0}^{s-1} \frac{j!(q+j)! \alpha^j}{q! (1-\alpha)^{2j+q+1}} \\ &= \prod_{j=0}^{s-1} \frac{j!(q+j)!}{q!} \cdot \frac{\alpha^{s(s-1)/2}}{(1-\alpha)^{s(s+q)}}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Полученное выражение в точности сокращает множитель стоящий перед определителем в формуле (2.7) и величина $f_{r,s,q}$, в результате, равна второму сомножителю в (4.4).

Преобразуем этот множитель, используя формулу

$$\det (I - A_0^{-1} A_r) = \exp \left\{ - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \operatorname{Tr} (A_0^{-1} A_r)^p \right\}. \quad (4.10)$$

Согласно общей теории (см., например, [25]), элементы матрицы A_0^{-1} могут быть найдены из ядра Кристоффеля-Дарбу полиномов Майксона, которое является их производящей функцией,

$$\begin{aligned} (A_0^{-1})_{jk} &= \frac{1}{(j-1)!(k-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{j-1} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^{k-1} \sum_{l=0}^{s-1} h_l^{-1} \\ &\quad \times M_l(x; q+1, \alpha) M_l(y; q+1, \alpha) \Big|_{x=y=0}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Учитывая, что из выражения (4.6) следует, что $h_j^{-1} = (1 - \alpha)^{q+1} \rho(j)$, где функция $\rho(j)$ определена в (4.3), для матричных элементов произведения матриц A_0^{-1} и A_r получим выражение:

$$(A_0^{-1}A_r)_{jk} = \frac{(1 - \alpha)^{q+1}}{(j - 1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{j-1} \sum_{l=0}^{s-1} \rho(l) M_l(x; q + 1, \alpha) \times \sum_{m=r}^{\infty} m^{k-1} \rho(m) M_l(m; q + 1, \alpha) \Big|_{x=0}. \quad (4.12)$$

При выводе этой формулы промежуточное суммирование было интерпретировано как разложение в ряд оператора $\exp\{m\partial/\partial y\}$.

Используя (4.12), и применяя аналогичную процедуру для выполнения промежуточных суммирований, нетрудно получить общую формулу для следа p -ой ($p = 1, 2, \dots$) степени матрицы $A_0^{-1}A_r$. Справедлива формула

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A_0^{-1}A_r)^p &= (1 - \alpha)^{p(q+1)} \sum_{l_1, \dots, l_p=0}^{s-1} \sum_{m_1, \dots, m_p=r}^{\infty} \prod_{i=1}^p \rho(l_i) \rho(m_i) \\ &\times M_{l_i}(m_i; q + 1, \alpha) M_{l_{i+1}}(m_{i+1}; q + 1, \alpha), \quad (4.13) \end{aligned}$$

где $l_{p+1} := l_1$. Различным образом группируя суммирования в этой формуле, нетрудно видеть, что полученное выражение может быть записано как след p -ой степени $s \times s$ матрицы $V_{r,q}$, с матричными элементами (2.9), либо интегрального оператора $U_{s,q}$, с дискретным ядром (2.11),

$$\text{Tr}(A_0^{-1}A_r)^p = \text{Tr}(V_{r,q})^p = \text{Tr}(U_{s,q})^p, \quad (4.14)$$

что и доказывает, в силу (4.10), формулы (2.8) и (2.10).

Используя тот факт, что полиномы Майкснера могут быть построены с помощью рекуррентного соотношения

$$\begin{aligned} xp_l(x) &= -\frac{(l + q + 1)\alpha}{1 - \alpha} p_{l+1}(x) \\ &+ \frac{(l + q + 1)\alpha + l}{1 - \alpha} p_l(x) - \frac{l}{1 - \alpha} p_{l-1}(x), \quad (4.15) \end{aligned}$$

где $p_l(x) = M_l(x; q+1, \alpha)$, с начальными условиями $p_{-1}(x) = 0$ и $p_0(x) = 1$, для ядра $U_{s,q}(m, n)$ справедливо также представление

$$U_{s,q}(m, n) = \sqrt{\rho(m)\rho(n)}(1-\alpha)^q s \rho(s) \frac{p_s(m)p_{s-1}(n) - p_{s-1}(m)p_s(n)}{m-n}. \quad (4.16)$$

Диагональные элементы ядра следует понимать в смысле правила Лопиталя. Это формула означает (что, впрочем, верно для любого оператора с ядром типа Кристоффеля-Дарбу), что оператор $U_{s,q}$ является т.н. интегрируемым интегральным оператором, в смысле терминологии работы [27].

Аналогичное наблюдение, в определенном смысле, оказывается верным также и в случае матрицы $V_{r,q}$. Воспользуемся разностным уравнением, которому удовлетворяют полиномы Майкснера (см., например, [26]),

$$lp_l(x) = -\frac{(x+q+1)\alpha}{1-\alpha} p_l(x+1) + \frac{(x+q+1)\alpha+x}{1-\alpha} p_l(x) - \frac{x}{1-\alpha} p_l(x-1). \quad (4.17)$$

Рассматривая недиагональные элементы матрицы $V_{r,q}$, для членов под знаком суммы по m можем написать

$$p_j(m)p_l(m) = \frac{(jp_j(m))p_l(m) - p_j(m)(lp_l(m))}{j-l} \quad (j \neq l), \quad (4.18)$$

и применяя (4.17), получим

$$(V_{r,q})_{jl} = -\frac{\sqrt{\rho(j)\rho(l)}(1-\alpha)^q}{j-l} \sum_{m=r}^{\infty} \rho(m) \times \{ [(m+q+1)\alpha p_j(m+1) + mp_j(m-1)] p_l(m) - p_j(m) [(m+q+1)\alpha p_l(m+1) + mp_l(m-1)] \}. \quad (4.19)$$

Используя соотношение

$$(m+q+1)\alpha \rho(m) = (m+1)\rho(m+1), \quad (4.20)$$

легко видеть, что под знаком суммы стоит разность членов с индексами m и $m+1$. Поскольку сходимость суммы по m обеспечивается экспоненциальным убыванием общего члена при $m \rightarrow \infty$, можно утверждать, что все члены в сумме сокращаются, кроме члена с $m = r$, и,

таким образом, для недиагональных членов матрицы $V_{r,q}$ справедливо выражение

$$(V_{r,q})_{jl} = \sqrt{\rho(j)\rho(l)}(1-\alpha)^q r \rho(r) \frac{p_j(r)p_l(r-1) - p_j(r-1)p_l(r)}{j-l}. \quad (4.21)$$

Для диагональных элементов это выражение, однако, неприменимо, и для них необходимо пользоваться общей формулой (2.9).

Формула (4.21) тем не менее показывает, что матрица $V_{r,q}$ может рассматриваться как интегрируемый интегральный оператор с дискретным ядром (с переменными, принимающими значения на конечном множестве $\{0, 1, \dots, s-1\}$). Учитывая также свойство симметрии полиномов Майкснера, см. (4.7),

$$M_l(m; q+1, \alpha) = M_m(l; q+1, \alpha), \quad (4.22)$$

представления (2.8) и (2.10) таким образом, оказываются дуальными друг другу. Это свойство оказывается полезным, например, для вывода дифференциальных уравнений для вероятности образования пустоты. Действительно, дифференцирование определителя Фредгольма интегрируемого интегрального оператора основано на алгебраических свойствах функций входящих в его ядро. Совпадение структур ядер операторов в представлениях (2.8) и (2.10) таким образом означает, что вывод систем уравнений (2.12) и (2.13) из этих представлений, соответственно, одинаков с точностью до переобозначений. По этой причине в следующем разделе детально рассматривается только вывод уравнений (2.12).

Закончим обсуждение в этом разделе выводом еще одного представления для величины $f_{r,s,q}$, в терминах определителя Фредгольма интегрального оператора, действующего на некотором простом замкнутом контуре. Хотя это представление не используется ниже, оно может оказаться полезным, например, для применения метода матричной задачи Римана–Гильберта [28].

Воспользуемся тем, что полиномы Майкснера $M_l(m; q+1, \alpha)$ при всех целых m ($m \geq l$), рассматриваемые как функции параметра α , могут быть выражены двумя разными способами через полиномы Якоби:

$$\begin{aligned} M_l(m; q+1, \alpha) &= \frac{(-1)^l l! q!}{(l+q)!} \alpha^{-l} P_l^{(m-l, q)}(1-2\alpha) \\ &= \frac{(-1)^m m! q!}{(m+q)!} \alpha^{-m} P_m^{(l-m, q)}(1-2\alpha). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Для полиномов Якоби фигурирующих в первом представлении, используя формулу Родрига и применяя теорему Коши, получим

$$\begin{aligned} P_l^{(m-l,q)}(1-2\alpha) &= \frac{(-1)^l}{2^{m+q}\alpha^{m-l}(1-\alpha)^q} \frac{1}{l!} \frac{d^l}{dx^l} (1-x)^m (1+x)^{l+q} \Big|_{x=1-2\alpha} \\ &= \frac{(-1)^l}{2^{m+q}\alpha^{m-l}(1-\alpha)^q} \oint_{C_{1-2\alpha}} \frac{(1-x)^m (1+x)^{l+q}}{(x-1+2\alpha)^{l+1}} \frac{dx}{2\pi i} \\ &= \frac{(-1)^l}{\alpha^{m-l}} \oint_{C_0} \frac{(\alpha-z)^m}{(1-z)^{m+q+1} z^{l+1}} \frac{dz}{2\pi i}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

где была выполнена замена переменных $z = (x-1+2\alpha)/(x+1)$. Аналогично, для полиномов Якоби фигурирующих в втором представлении можно написать

$$P_m^{(l-m,q)}(1-2\alpha) = \frac{(-1)^{q+m}}{\alpha^{l-m}(1-\alpha)^q} \oint_{C_0} \frac{(1-w)^{m+q}}{(1-\alpha w)^{m+1} w^{l+q+1}} \frac{dw}{2\pi i}. \quad (4.25)$$

Подставляя все выражения в (4.13), получим

$$\begin{aligned} \text{Tr} (A_0^{-1} A_r)^p &= (-1)^{pq} (1-\alpha)^p \\ &\times \sum_{l_1, \dots, l_p=0}^{s-1} \sum_{m_1, \dots, m_p=r}^{\infty} \oint_{C_0} \dots \oint_{C_0} \prod_{i=1}^p \frac{(\alpha-z_i)^{m_i}}{(1-z_i)^{m_i+q+1} z_i^{l_i+1}} \\ &\times \frac{(1-w_i)^{m_i+q}}{(1-\alpha w_i)^{m_i+1} w_i^{l_i+q+1}} \frac{d^p w}{(2\pi i)^p} \frac{d^p z}{(2\pi i)^p}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Суммирование, очевидно, элементарно вычисляются, что приводит к выражению

$$\begin{aligned} \text{Tr} (A_0^{-1} A_r)^p &= (-1)^{pq} \oint_{C_0} \dots \oint_{C_0} \prod_{i=1}^p \frac{(\alpha-z_i)^r (1-w_i)^{r+q}}{(1-z_i)^{r+q} (1-\alpha w_i)^r} \\ &\times \frac{1}{z_{i+1}^s w_i^{s+q} (1-z_i w_i) (1-z_{i+1} w_i)} \frac{d^p w}{(2\pi i)^p} \frac{d^p z}{(2\pi i)^p} \end{aligned} \quad (4.27)$$

где $z_{p+1} := z_1$. Выполняя замену переменных $w_i \mapsto 1/w_i$ ($i = 1, \dots, p$) полученный результат приводит к представлению в терминах определителя Фредгольма

$$f_{r,s,q} = \det \left(I - \mathcal{K} \Big|_{C_0} \right), \quad (4.28)$$

где интегральный оператор \mathcal{K} имеет ядро

$$\mathcal{K}(z, z') = \frac{1}{2\pi i} \frac{\mathcal{E}_+(z)\mathcal{E}_-(z') - \mathcal{E}_-(z)\mathcal{E}_+(z')}{z - z'}, \quad (4.29)$$

с функциями $\mathcal{E}_\pm(z) = \mathcal{E}_\pm(z; r, s, q, \alpha)$ определяемыми как

$$\mathcal{E}_-(z) = \left[\frac{(z - \alpha)^r}{(z - 1)^{r+q} z^s} \right]^{1/2}, \quad \mathcal{E}_+(z) = \mathcal{E}_-(z)\mathcal{E}(z), \quad (4.30)$$

причем функция $\mathcal{E}(z)$ имеет вид

$$\mathcal{E}(z) = \oint_{C_\infty} \frac{(w - 1)^{r+q} w^s}{(w - \alpha)^r (w - z)} \frac{dw}{2\pi i}. \quad (4.31)$$

Здесь C_∞ , как и в представлении (3.1), обозначает некоторый большой замкнутый положительно ориентированный контур.

5. ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим вывод уравнений (2.12) используя представление (2.8); уравнения (2.13) могут быть получены по сути повторением этого вычисления в случае представления (2.10).

Прямой способ доказательства уравнений (2.12) заключается в вычислении производных (дифференциальной по α и разностных по r и q) функции $\log f_{r,s,q} = \log \det(I - V_{r,q})$. Поскольку, как было замечено выше, матричные элементы матрицы $V_{r,q}$ имеют структуру ядра интегрируемого интегрального оператора, естественно строить вычисления адаптируя к нашей задаче формализм развитый для этого типа интегральных операторов (см., например, [29]).

В качестве подготовительного шага для применения этой техники необходимо вычислить первые производные матрицы $V_{r,q}$ по интересующим нас переменным. Для упрощения записи выражений будем использовать обозначение

$$E_j(m) = \sqrt{\rho(j)} (1 - \alpha)^{\frac{q+1}{2}} M_j(m; q + 1, \alpha), \quad (5.1)$$

причем $E_j(m) = E_j(m; q, \alpha)$; указание зависимости от q и α (а также r) различных величин в обозначениях ниже часто будет опускаться. Простейший пример первой “производной” это соотношение между матричными элементами матриц $V_{r+1,q}$ и $V_{r,q}$. Справедливо соотношение

$$(V_{r+1,q})_{jl} = (V_{r,q})_{jl} - \rho(r) E_j(r) E_l(r). \quad (5.2)$$

Из этого соотношения видно, что сдвиг по r генерируется матрицей ранга один, что важно для успеха применения техники основанной на использовании интегрируемых интегральных операторов.

Производные по другим переменным имеют похожие свойства. Вычисление производной \mathcal{D}_α (см. (2.14)) матричных элементов матрицы $V_{r,q}$ дает

$$\mathcal{D}_\alpha(V_{r,q})_{jl} = \frac{r\rho(r)}{2(1-\alpha)} [E_j(r)E_l(r-1) + E_j(r-1)E_l(r)]. \quad (5.3)$$

Рассматривая матрицу $V_{r,q+1}$ и выражая ее элементы через таковые матрицы $V_{r,q}$, получим

$$(V_{r,q+1})_{jl} = \sqrt{\frac{j+q+1}{l+q+1}} \left[(V_{r,q})_{jl} + \frac{r\rho(r)}{1-\alpha} \frac{E_j(r-1) - \alpha E_j(r)}{j+q+1} E_l(r) \right]. \quad (5.4)$$

Полезной является также формула описывающая одновременный сдвиг r и q ,

$$(V_{r-1,q+1})_{jl} = \sqrt{\frac{j+q+1}{l+q+1}} \times \left[(V_{r,q})_{jl} + \frac{r\rho(r)}{\alpha(1-\alpha)} \frac{E_j(r-1) - \alpha E_j(r)}{j+q+1} E_l(r-1) \right]. \quad (5.5)$$

Вывод формул (5.3), (5.4) и (5.5) содержится в Приложении А.

Чтобы перейти к стандартным объектам техники интегрируемых интегральных операторов, определим “функции” $e_\pm(j) = e_\pm(j; r, q, \alpha)$ формулами

$$e_+(j) = E_j(r), \quad e_-(j) = E_j(r-1). \quad (5.6)$$

Здесь “переменная” $j = 0, 1, \dots, s-1$ играет роль спектрального параметра. В терминах этих функций недиагональные элементы матрицы $V_{r,q}$ запишутся в виде

$$(V_{r,q})_{jl} = \frac{r\rho(r)}{1-\alpha} \cdot \frac{e_+(j)e_-(l) - e_-(j)e_+(l)}{j-l} \quad (j \neq l). \quad (5.7)$$

Важную роль в конструкции играют функции $f_\pm(j) = f_\pm(j; r, q, \alpha)$, определяемые формулой

$$f_\pm(j) = \sum_{l=0}^{s-1} [(I - V_{r,q})^{-1}]_{jl} e_\pm(l). \quad (5.8)$$

Рассмотрим величины

$$B_{\mu,\nu} = \frac{r\rho(r)}{1-\alpha} \sum_{j=0}^{s-1} e_{\mu}(j)f_{\nu}(j) \quad (\mu, \nu = +, -). \quad (5.9)$$

Заметим, что функции $f_{\pm}(j)$ и величины $B_{\mu,\nu}$ (которые иногда называются потенциалами), зависят также от s как от параметра; эта зависимость всегда в обозначениях будет опускаться. Формула (5.2) означает, что

$$\frac{f_{r+1,s,q}}{f_{r,s,q}} = \frac{\det(I - V_{r+1,q})}{\det(I - V_{r,q})} = 1 + \frac{1-\alpha}{r} B_{++}, \quad (5.10)$$

а также, что

$$\frac{f_{r-1,s,q}}{f_{r,s,q}} = 1 - \frac{1-\alpha}{(r+q)\alpha} B_{--}. \quad (5.11)$$

Используя (5.3), получим

$$\frac{\mathcal{D}_{\alpha} f_{r,s,q}}{f_{r,s,q}} = -\text{Tr} [(I - V_{r,q})^{-1} \mathcal{D}_{\alpha} V_{r,q}] = -\frac{1}{2}(B_{+-} + B_{-+}). \quad (5.12)$$

Эти формулы играют ключевую роль в выводе уравнений (2.12).

Чтобы выразить отношения $f_{r,s,q+1}$ и $f_{r-1,s,q+1}$ с $f_{r,s,q}$ при помощи (5.4) и (5.5), рассмотрим также потенциалы

$$D_{\mu,\nu} = \frac{r\rho(r)}{1-\alpha} \sum_{j=0}^{s-1} \frac{e_{\mu}(j)f_{\nu}(j)}{j+q+1}, \quad (\mu, \nu = +, -). \quad (5.13)$$

Соотношение (5.4) позволяет тогда написать

$$\frac{f_{r,s,q+1}}{f_{r,s,q}} = 1 + \alpha D_{++} - D_{-+}, \quad (5.14)$$

и, аналогично, соотношение (5.5) дает

$$\frac{f_{r-1,s,q+1}}{f_{r,s,q}} = 1 + D_{+-} - \frac{1}{\alpha} D_{--}. \quad (5.15)$$

Эти формулы важны для вывода уравнений (2.12b) и (2.12c), и будут использованы ниже совместно с формулами (5.10) и (5.11).

Для того чтобы вывести желаемые уравнения из имеющихся в нашем распоряжении формул, необходимо уметь вычислять производные \mathcal{D}_{α} от величин $B_{\mu,\nu}$ и $D_{\mu,\nu}$. Для этого необходимо вычислить выражения для производных функций $f_{\pm}(j)$. Стартовыми выражениями

являются производные функций $e_{\pm}(j)$, которые следуют из формул (A.1) и (4.17),

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\alpha}e_{+}(j) &= \left(\frac{j}{2} - \frac{2r + (q+1)\alpha}{2(1-\alpha)}\right)e_{+}(j) + \frac{r}{1-\alpha}e_{-}(j), \\ \mathcal{D}_{\alpha}e_{-}(j) &= \left(-\frac{j}{2} + \frac{(2r+q-1)\alpha}{2(1-\alpha)}\right)e_{-}(j) - \frac{(r+q)\alpha}{1-\alpha}e_{+}(j).\end{aligned}\quad (5.16)$$

Стандартные вычисления (см., например, главу XIV книги [29]) дают

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\alpha}f_{+}(j) &= \left(\frac{j}{2} - \frac{2r + (q+1)\alpha}{2(1-\alpha)}\right)f_{+}(j) + \left(\frac{r}{1-\alpha} + B_{++}\right)f_{-}(j), \\ \mathcal{D}_{\alpha}f_{-}(j) &= \left(-\frac{j}{2} + \frac{(2r+q-1)\alpha}{2(1-\alpha)}\right)f_{-}(j) - \left(\frac{(r+q)\alpha}{1-\alpha} - B_{--}\right)f_{+}(j).\end{aligned}\quad (5.17)$$

При выводе этих формул используется формула (5.7) для недиагональных элементов матрицы $V_{r,q}$.

Имеющиеся формулы позволяют доказать уравнение (2.12a). Рассмотрим выражение в правой части (5.12). Отметим, что в силу того, что матрица $V_{r,q}$ симметрична, имеет место соотношение $B_{-+} = B_{+-}$. Дифференцируя B_{+-} (либо B_{-+}) с использованием формул (5.16) и (5.17), получим

$$\mathcal{D}_{\alpha}B_{\pm\mp} = B_{++}B_{--} + \frac{r}{1-\alpha}B_{--} - \frac{(r+q)\alpha}{1-\alpha}B_{++}. \quad (5.18)$$

Поставляя сюда выражения для величин $B_{\mu,\nu}$ в терминах функции $f_{r,s,q}$ фигурирующие в левых частях формул (5.10), (5.11) и (5.12), получим

$$-\mathcal{D}_{\alpha}\frac{\mathcal{D}_{\alpha}f_{r,s,q}}{f_{r,s,q}} = \frac{r(r+q)\alpha}{(1-\alpha)^2} \left(1 - \frac{f_{r+1,s,q}}{f_{r,s,q}} \cdot \frac{f_{r-1,s,q}}{f_{r,s,q}}\right). \quad (5.19)$$

Очевидно, это равенство и есть уравнение (2.12a).

Рассмотрим теперь вывод уравнений (2.12b) и (2.12c). Используя (5.17), нетрудно получить выражения для $\mathcal{D}_{\alpha}D_{\mu,\nu}$ в терминах величин

$D_{\mu,\nu}$ и $B_{\mu,\nu}$. Получим

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\alpha D_{-+} &= -\frac{(r+q)\alpha}{1-\alpha} D_{++} + \left(\frac{r}{1-\alpha} + B_{++} \right) D_{--}, \\
\mathcal{D}_\alpha D_{++} &= B_{++} - \frac{r+q+1+(r-1)\alpha}{1-\alpha} D_{++} \\
&\quad + \frac{r}{1-\alpha} D_{-+} + \left(\frac{r}{1-\alpha} + B_{++} \right) D_{+-}, \\
\mathcal{D}_\alpha D_{+-} &= \frac{r}{1-\alpha} D_{--} - \left(\frac{(r+q)\alpha}{1-\alpha} - B_{--} \right) D_{++}, \\
\mathcal{D}_\alpha D_{--} &= -B_{--} + \frac{r+q+1+(r-1)\alpha}{1-\alpha} D_{--} \\
&\quad - \frac{(r+q)\alpha}{1-\alpha} D_{+-} - \left(\frac{(r+q)\alpha}{1-\alpha} - B_{--} \right) D_{-+}.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Эти выражения могут быть использованы для дифференцирования выражений стоящих в правых частях формул (5.14) и (5.15).

Рассмотрим выражение в (5.14). Полученные формулы дают

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\alpha (\alpha D_{++} - D_{-+}) &= \alpha B_{++} - \frac{r\alpha}{1-\alpha} (\alpha D_{++} - D_{-+}) \\
&\quad + \left(\frac{r\alpha}{1-\alpha} + \alpha B_{++} \right) \left(D_{+-} - \frac{1}{\alpha} D_{--} \right).
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Поставляя линейные комбинации величин $D_{\mu,\nu}$ фигурирующие в (5.14) и (5.15) их выражениями стоящими в левых частях, и также используя (5.10), предыдущее выражение переписется в виде

$$\mathcal{D}_\alpha \frac{f_{r,s,q+1}}{f_{r,s,q}} = -\frac{r\alpha}{1-\alpha} \left(\frac{f_{r,s,q+1}}{f_{r,s,q}} - \frac{f_{r+1,s,q}}{f_{r,s,q}} \frac{f_{r-1,s,q+1}}{f_{r,s,q}} \right). \tag{5.22}$$

Полученное соотношение есть, очевидно, уравнение (2.12b).

Рассмотрим теперь выражение в правой части формулы (5.14). Получим

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\alpha \left(D_{+-} - \frac{1}{\alpha} D_{--} \right) &= \frac{1}{\alpha} B_{--} + \frac{r+q}{1-\alpha} \left(D_{+-} - \frac{1}{\alpha} D_{--} \right) \\
&\quad - \left(\frac{r+q}{1-\alpha} - \frac{1}{\alpha} B_{--} \right) (\alpha D_{++} - D_{-+}).
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Выражая комбинации потенциалов их левыми частями из (5.14), (5.15), и (5.11), предыдущее выражение переписется в виде

$$\mathcal{D}_\alpha \frac{f_{r-1,s,q+1}}{f_{r,s,q}} = \frac{r+q}{1-\alpha} \left(\frac{f_{r-1,s,q+1}}{f_{r,s,q}} - \frac{f_{r-1,s,q} f_{r,s,q+1}}{f_{r,s,q} f_{r,s,q}} \right), \quad (5.24)$$

в котором легко узнать уравнение (2.12с). Таким образом, все уравнения (2.12) нами доказаны.

В качестве дополнения к приведенному вычислению, полезно упомянуть вкратце еще один способ вывода уравнений (2.12), который, кроме того, позволяет еще и убедиться в том, что полученные уравнения являются всеми возможными уравнениями для функции $f_{r,s,q}$ при фиксированном s . Суть метода заключается в том, чтобы вывести эти уравнения как условия совместности при эволюции по параметру α и при сдвигах значений r и q для функций $f_\pm(j) = f_\pm(j; r, q, s, \alpha)$.

Интерпретируя α как эволюционный параметр, введем 2×2 матрицу $M(j)$ которая описывает результат дифференцирования \mathcal{D}_α функций $f_\pm(j)$ в матричном виде

$$\mathcal{D}_\alpha \vec{f}(j) = M(j) \vec{f}(j), \quad \vec{f}(j) = \begin{bmatrix} f_+(j) \\ f_-(j) \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

Явное выражение для матрицы $M(j)$ следует из формул (5.17), которое полезно записать указывая явно зависимость от r и q (сдвиги по которым возникают при выводе условий согласования)

$$M(j; r, q) = \begin{bmatrix} \frac{j}{2} - \frac{2r + (q+1)\alpha}{2(1-\alpha)} & \frac{r}{1-\alpha} + B_{++}(r, q) \\ -\frac{(r+q)\alpha}{1-\alpha} + B_{--}(r, q) & -\frac{j}{2} + \frac{(2r+q-1)\alpha}{2(1-\alpha)} \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

Введем также матрицы $L(j)$ и $K(j)$ описывающие изменения функций $f_\pm(j)$ при сдвигах значений r и q , соответственно

$$\vec{f}(j; r+1, q) = L(j) \vec{f}(j; r, q), \quad \vec{f}(j; r, q+1) = K(j) \vec{f}(j; r, q). \quad (5.27)$$

Явный вид матриц $L(j)$ и $K(j)$ может быть получен из формул (5.2) и (5.4). Стандартное вычисление (аналогичное выводу соотношений

(5.17)) для матрицы $L(j)$ приводит к выражению

$$L(j; r, q) = -\frac{1-\alpha}{(r+q+1)\alpha} \times \begin{bmatrix} j - \frac{r+(r+q+1)\alpha}{1-\alpha} + \nabla_r B_{-+}(r, q) & \frac{r}{1-\alpha} + B_{++}(r, q) \\ -\frac{(r+q+1)\alpha}{1-\alpha} + B_{--}(r+1, q) & 0 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

а для матрицы $K(j)$ к выражению

$$K(j; r, q) = \frac{1}{r+q+1} \sqrt{\frac{(q+1)(1-\alpha)}{j+q+1}} \times \begin{bmatrix} j+q+1 - \frac{r\alpha}{1-\alpha} + \nabla_q B_{-+}(r, q) & \frac{r}{1-\alpha} + B_{++}(r, q) \\ -\frac{(r+q+1)\alpha}{1-\alpha} + B_{--}(r, q+1) & \frac{r+q+1}{1-\alpha} \end{bmatrix}, \quad (5.29)$$

где, например, $\nabla_r B_{-+}(r, q) = B_{-+}(r+1, q) - B_{-+}(r, q)$ и аналогично для $\nabla_q B_{-+}(r, q)$. Используя (5.10), (5.11) и (5.12) нетрудно убедиться, что уравнения (2.12) обеспечивают выполнение трех матричных соотношений, являющихся условиями совместности трех соотношений в (5.25) и (5.27). При этом уравнение (2.12с) возникает как необходимое условие совместности напрямую, а уравнения (2.12а) и (2.12б) возникают как решения двухчленных рекуррентных уравнений по r с использованием условия, что $f_{r,s,q} \rightarrow 1$ при $r \rightarrow \infty$ (s и q фиксированы).

Автор благодарит за полезные обсуждения Ф. Коломо, В. С. Капитонова, А. В. Китаева и П. П. Кулиша.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ $V_{r,q}$

Поясним здесь происхождение формул (5.3), (5.4) и (5.5), на которых основан вывод дифференциальных уравнений (2.12) в разделе 5.

Получим вначале выражение для $(\mathcal{D}_\alpha V_{r,q})_{jt}$. Воспользуемся формулой

$$\mathcal{D}_\alpha M_j(m; q+1, \alpha) = \frac{m}{1-\alpha} [M_j(m-1; q+1, \alpha) - M_j(m; q+1, \alpha)], \quad (A.1)$$

которая может быть непосредственно проверена подстановкой явного выражения для полиномов Майкснера, см. (4.7). Дифференцируя (2.9),

и переходя к обозначениям (5.1), имеем

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{D}_\alpha V_{r,q})_{jl} &= \left(\frac{j+l}{2} - \frac{(q+1)\alpha}{1-\alpha} \right) (V_{r,q})_{jl} \\
 &+ \sum_{m=r}^{\infty} \frac{m\rho(m)}{1-\alpha} [E_j(m-1)E_l(m) + E_j(m)E_l(m-1) \\
 &- (1+\alpha)E_j(m)E_l(m)]. \quad (\text{A.2})
 \end{aligned}$$

Используя тот факт, что из уравнения (4.17) следует соотношение

$$\begin{aligned}
 \frac{m}{1-\alpha} [E_j(m-1) - (1+\alpha)E_j(m)] = \\
 - \left(j - \frac{(q+1)\alpha}{1-\alpha} \right) E_j(m) - \frac{(m+q+1)\alpha}{1-\alpha} E_j(m+1), \quad (\text{A.3})
 \end{aligned}$$

формула для $(\mathcal{D}_\alpha V_{r,q})_{jl}$ выше может быть переписана в виде

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{D}_\alpha V_{r,q})_{jl} &= \sum_{m=r}^{\infty} \frac{\rho(m)}{1-\alpha} \left\{ \frac{m}{2} [E_j(m-1)E_l(m) + E_j(m)E_l(m-1)] \right. \\
 &- \left. \frac{(m+q+1)\alpha}{2} [E_j(m+1)E_l(m) + E_j(m)E_l(m+1)] \right\}. \quad (\text{A.4})
 \end{aligned}$$

Наконец, учитывая (4.20) видим, что под знаком суммы стоит разность членов с индексами m и $m+1$, что и дает (5.3).

Рассмотрим теперь вывод формулы (5.4). Подбирая подходящее тождество Гаусса для гипергеометрической функции, можно получить тождество

$$\begin{aligned}
 M_j(m; q+2, \alpha) &= \frac{q+1}{(j+q+1)(1-\alpha)} \\
 &\times [M_j(m; q+1, \alpha) - \alpha M_j(m+1; q+1, \alpha)]. \quad (\text{A.5})
 \end{aligned}$$

Учитывая также, что

$$\rho(m; q+1, \alpha) = \frac{m+q+1}{q+1} \rho(m; q, \alpha), \quad (\text{A.6})$$

результат выражения всех функций при $q + 1$ через таковые при q записывается в виде

$$(V_{r,q+1})_{jl} = \frac{1}{\sqrt{(j+q+1)(l+q+1)}} \sum_{m=r}^{\infty} \frac{(m+q+1)\rho(m)}{1-\alpha} \times [E_j(m) - \alpha E_j(m+1)] [E_l(m) - \alpha E_l(m+1)], \quad (\text{A.7})$$

где $\rho(m) = \rho(m; q, \alpha)$ и $E_j(m) = E_j(m; q, \alpha)$, как определено формулами (4.3) и (5.1). Чтобы преобразовать полученное выражение, заметим, что уравнение (4.17) может быть также записано в виде

$$\frac{m+q+1}{1-\alpha} [E_j(m) - \alpha E_j(m+1)] = (j+q+1)E_j(m) + \frac{m}{1-\alpha} [E_j(m-1) - \alpha E_j(m)]. \quad (\text{A.8})$$

Используя это соотношение, выражение в (A.7) может быть очевидным образом переписано в виде

$$(V_{r,q+1})_{jl} = \sqrt{\frac{j+q+1}{l+q+1}} \times \sum_{m=r}^{\infty} \left\{ \rho(m) \left[E_j(m) + \frac{m}{1-\alpha} \frac{E_j(m-1) - \alpha E_j(m)}{j+q+1} \right] E_l(m) - \frac{(m+1)\rho(m+1)}{1-\alpha} \frac{E_j(m) - \alpha E_j(m+1)}{j+q+1} E_l(m+1) \right\}, \quad (\text{A.9})$$

где также была использована формула (4.20). Замечая, что имеет место сокращение членов при суммировании по m , полученная формула приводит в итоге к (5.4).

Наконец чтобы получить формулу (5.5), можно воспользоваться соотношением (A.8) и переписать (5.4) в виде

$$(V_{r,q+1})_{jl} = \sqrt{\frac{j+q+1}{l+q+1}} \left[(V_{r,q})_{jl} - \rho(r)E_j(r)E_l(r) + \frac{(r+q+1)\rho(r)}{1-\alpha} \frac{E_j(r) - \alpha E_j(r+1)}{j+q+1} E_l(r) \right]. \quad (\text{A.10})$$

Учитывая соотношение (5.2) и используя (4.20), полученная формула, после сдвига $r \mapsto r - 1$, дает в точности (5.5).

ЛИТЕРАТУРА

1. V. E. Korepin, *Calculations of norms of Bethe wave functions*. — Commun. Math. Phys. **86** (1982), 391–418.
2. А. Г. Изергин, *Статсумма шестивершинной модели в конечном объеме*. — ДАН **297** (1987), № 2, 331–334.
3. А. Г. Izergin, D. A. Coker, V. E. Korepin, *Determinant formula for the six-vertex model*. — J. Phys. A **25** (1992), 4315–4334.
4. V. E. Korepin, P. Zinn-Justin, *Thermodynamic limit of the six-vertex model with domain wall boundary conditions*. — J. Phys. A **33** (2000), 7053–7066.
5. P. Zinn-Justin, *Six-vertex model with domain wall boundary conditions and one-matrix model*. — Phys. Rev. E **62** (2000), 3411–3418.
6. N. M. Bogoliubov, A. V. Kitaev, M. B. Zvonarev, *Boundary polarization in the six-vertex model*. — Phys. Rev. E **65** (2002), 026126.
7. P. Bleher, V. Fokin, *Exact solution of the six-vertex model with domain wall boundary conditions. Disordered phase*. — Commun. Math. Phys. **268** (2006), 223–284.
8. F. Colomo, A. G. Pronko, *Emptiness formation probability in the domain-wall six-vertex model*. — Nucl. Phys. B **798** [FS] (2008), 340–362.
9. F. Colomo, A. G. Pronko, *The Arctic Circle revisited*. — Contemp. Math. **458** (2008), 361–376.
10. F. Colomo, A. G. Pronko, *The limit shape of large alternating-sign matrices*. — SIAM J. Discrete Math. **24** (2010), 1558–1571.
11. F. Colomo, A. G. Pronko, *The arctic curve of the domain-wall six-vertex model*. — J. Stat. Phys. **138** (2010), 662–700.
12. N. Elkies, G. Kuperberg, M. Larsen, J. Propp, *Alternating-sign matrices and domino tilings*. — J. Algebraic Combin. **1** (1992), 111–132; 219–234.
13. H. Cohn, N. Elkies, J. Propp, *Local statistics for random domino tilings of the Aztec diamond*. — Duke Math. J. **85** (1996), 117–166.
14. W. Jockush, J. Propp, P. Shor, *Random domino tilings and the arctic circle theorem*. — arXiv:math/9801068.
15. K. Johansson, *The arctic circle boundary and the Airy process*. — Ann. Probab. **33** (2005), 1–30.
16. P. L. Ferrari, H. Spohn, *Domino tilings and the six-vertex model at its free fermion point*. — J. Phys. A **39** (2006), 10297–10306.
17. R. Kenyon, A. Okounkov, *Limit shapes and the complex Burgers equation*. — Acta Math. **199** (2007), 263–302.
18. R. Kenyon, A. Okounkov, S. Sheffield, *Dimers and amoebae*. — Ann. of Math. **163** (2006), 1019–1056.
19. R. Kenyon, *Lectures on Dimers*. — Preprint (2009), arXiv:0910.3129.
20. H. Au-Yang, J. H. H. Perk, *Critical correlations in a Z-invariant inhomogeneous Ising model*. — Physica A **144** (1987), 44–104.
21. K. Sogo, *Time-dependent orthogonal polynomials and theory of soliton — applications to matrix model, vertex model and level statistics*. — J. Phys. Soc. Japan **62** (1993), 1887–1894.

22. А. Г. Изергин, Е. Карьялайнен, Н. А. Китанин, *Интегрируемые уравнения для статсуммы шестивершинной модели*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **245** (1997), 207–215.
23. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*. — Наука, М., 1967.
24. Al. R. Kavalov, R. L. Mkrtchyan, L. A. Zurabyan, *Random matrices with discrete spectrum and finite Toda chains*. — Mod. Phys. Lett. A **6** (1991), No. 39, 3627–3633.
25. G. Szegö, *Orthogonal polynomials*. — 4 ed., American Colloquium Publications, vol. XXIII, American Mathematical Society, Providence, RI, 1975.
26. R. Koekoek, P. A. Lesky, R. F. Swarttouw, *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q -Analogues*. Springer Monographs in Mathematics. — Springer-Verlag, Berlin, 2010.
27. A. R. Its, A. G. Izergin, V. E. Korepin, N. A. Slavnov, *Differential equations for quantum correlation function*, Int. J. Mod. Phys. B **4** (1990), 1003–1037.
28. А. Г. Изергин, А. Р. Итс, В. Е. Корепин, Н. А. Славнов, *Матричная задача Римана–Гильберта и дифференциальные уравнения для корреляционных функций ХХО цепочки Гейзенберга*. — Алгебра и анализ **6** (1994), №2, 138–151.
29. V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, *Quantum inverse scattering method and correlation functions*. — Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

Pronko A. G. On the emptiness formation probability in the free-fermion six-vertex model with domain wall boundary conditions.

Various representations are derived for the emptiness formation probability (a nonlocal correlation function describing the probability of a ferroelectric order) in the six-vertex model with domain wall boundary conditions in the case of weights satisfying the free-fermion condition. Starting from the known representation in terms of a multiple integral, the emptiness formation probability is expressed in terms of Hankel determinants and Fredholm ones. The nonlinear differential equations for this correlation function are also obtained. In particular, among these equations are those for the tau-functions of Toda chains, both for the finite and the semi-infinite ones.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, С.-Петербург 191023, Россия
E-mail: agp@pdmi.ras.ru

Поступило 17 февраля 2012 г.