

В. С. Капитонов, А. Г. Пронько

ВЗВЕШЕННЫЕ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ ПЛОСКИХ РАЗБИЕНИЙ В ЯЩИКЕ И НЕОДНОРОДНАЯ ПЯТИВЕРШИННАЯ МОДЕЛЬ

1. ВВЕДЕНИЕ

Плоские разбиения, или, эквивалентно, трехмерные диаграммы Юнга, являются интересным и важным объектом комбинаторики, имеющим различные приложения, см., например, монографии [1, 2]. В том случае, когда плоские разбиения рассматриваются ограниченными “ящиком” размера $a \times b \times c$, часто используется (см., например, [3]) их взаимнооднозначное соответствие задаче покрытия ромбами шестиугольника (со сторонами a, b, c, a, b, c), которая, в свою очередь, эквивалентна задаче димеров на конечной гексагональной решетке. Плоские разбиения в ящике имеют интересные асимптотические свойства, например, такие как наличие предельного профиля [3, 4]. Существует ряд задач тесно связанных с плоскими разбиениями, для решения которых могут привлекаться интегрируемые решеточные модели [5, 6]. Корреляционные функции в этих моделях оказываются интересными величинами в рамках взвешенных перечислений плоских разбиений в ящике и эквивалентных им объектах.

В работе [7] нами были рассмотрены плоские разбиения в ящике в терминах пятивершинной модели на конечной решетке с фиксированными граничными условиями. Для модели со всеми весами равными единице нами была вычислена одноточечная корреляционная функция описывающая вероятность состояния на произвольном горизонтальном ребре решетки. В терминах формулировки плоских разбиений как укладок ромбами шестиугольника эта величина соответствует числу укладок с одним фиксированным ромбом. В настоящей работе нашей

Ключевые слова: вершинные модели, плоские разбиения, решеточные фермионы, детерминантные представления, q -полиномы Лагерра, корреляционные функции.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ 10-01-00600. Один из авторов (А. Г. П.) также благодарит фонд им. Александра Гумбольдта (Германия) за финансовую поддержку.

целью является обобщение этого результата для случая пятивершинной модели эквивалентной q -взвешенным плоским разбиениям в ящике.

2. ПЯТИВЕРШИННАЯ МОДЕЛЬ И ПЛОСКИЕ РАЗБИЕНИЯ

Рассмотрим пятивершинную модель на квадратной решетке образованной N горизонтальными и M вертикальными прямыми. Конфигурации модели будем описывать в терминах линий и в качестве переменных описывающих состояния на ребрах будем использовать переменные типа заполнения, принимающие значения: 0, если ребро пустое, и 1, если ребро содержит линию. Пусть $w_{i,j}(\mu, \nu; \mu', \nu')$ обозначает больцмановский вес вершины лежащей на пересечении i -ой сверху горизонтальной ($i = 1, \dots, N$) и j -ой слева вертикальной ($j = 1, \dots, M$) линий, а μ, ν, μ' и ν' переменные заполнения приписанные соответственно левому, нижнему, верхнему и правому ребрам вершины. Больцмановский вес будет выбираться равным

$$w_{i,j}(\mu, \nu; \mu', \nu') = \begin{cases} q^{\frac{i+j}{2}} & \mu = \nu = \mu' = \nu' = 0, \\ 1 & \mu + \nu = \mu' + \nu' = 1, \\ 0 & \mu = \nu = \mu' = \nu' = 1, \mu + \nu \neq \mu' + \nu', \end{cases} \quad (2.1)$$

где q есть некоторый параметр, который ниже будет отождествлен с весом перечислений плоских разбиений. Статистическая сумма модели определяется как

$$Z = \sum_{\{\mu, \nu\}} \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^M w_{i,j}(\mu_{i,j}, \nu_{i+1,j}; \nu_{i,j}, \mu_{i,j+1}), \quad (2.2)$$

где сумма вычисляется по состояниям переменных заполнения внутренних ребер решетки; переменные внешних ребер подразумеваются фиксированными, как указано ниже.

Чтобы показать связь конфигураций пятивершинной модели с плоскими разбиениями в ящике размера $a \times b \times c$, положим

$$N = c + b, \quad M = a + b, \quad (2.3)$$

и рассмотрим случай фиксированных граничных условий, таких, что последние b горизонтальных ребер левой границы и последние b вертикальных ребер линий верхней границы содержат линии, а остальные внешние ребра являются пустыми. Тогда, как нетрудно убедиться используя интерпретацию плоских разбиений как трехмерных диаграмм

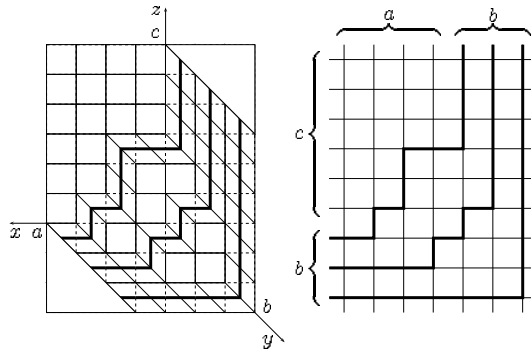


Рис. 1. Пример плоского разбиения в трехмерной интерпретации (слева). Жирными линиями указаны градиентные линии вдоль (xz) -плоскости. Конфигурация пятивершинной модели с фиксированными граничными условиями (справа).

Юнга и используя градиентные линии в (xz) -плоскости, существует взаимнооднозначное соответствие между плоскими разбиениями и конфигурациями пятивершинной модели, см. Рис. 1. Напомним (см., например, [1, 2]), что плоские разбиения имеют естественное представление в виде таблиц

$$\begin{array}{cccc}
 \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \lambda_{1,3} & \dots \\
 \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \lambda_{2,3} & \dots \\
 \lambda_{3,1} & \lambda_{3,2} & \lambda_{3,3} & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
 \end{array} \tag{2.4}$$

элементами которых являются целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условиям невозрастания вдоль столбцов и строк (т.е. $\lambda_{i,j} \geq \lambda_{i',j'}$ для всех $i \leq i'$ и $j \leq j'$, соответственно); условие, что они находятся “в ящике” означает, что размер таблиц и максимальное значение элементов таблиц ограничены размерами (т.е. $\lambda_{i,j} = 0$ при $i \geq a$ и $j \geq b$, и также $\lambda_{i,j} \leq c$ при $i \leq a$ и $j \leq b$). Рассматривая элементы таблиц как значения высот, эти таблицы имеют естественную интерпретацию как трехмерный аналог диаграмм Юнга.

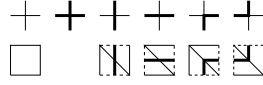


Рис. 2. Вершины шестивершинной модели (первый ряд) и плоские фрагменты изображения трехмерных диаграмм Юнга (второй ряд). В пятивершинной модели вершина второго типа исключена.

Эквивалентность плоских разбиений в ящике и рассматриваемой нами пятивершинной модели на $N \times M$ решетке, таким образом, основана на наблюдении, что условие невозрастания вдоль столбцов в таблицах (2.4) позволяет интерпретировать градиентные линии в (xz) -плоскости как линии некоторой вершинной модели на квадратной решетке, в то время как условие невозрастания вдоль строк эквивалентно требованию, чтобы эти линии не пересекались; более того, существует соответствие между вершинами модели и фрагментами изображения трехмерных диаграмм Юнга на плоскости, см. Рис. 2.

Естественными величинами связанными с плоскими разбиениями являются их перечисления. Будем рассматривать их q -взвешенные перечисления, в которых каждой трехмерной диаграмме Юнга λ берется с весом $q^{V(\lambda)}$, где $V(\lambda)$ есть “объем” диаграммы,

$$V(\lambda) = \sum_{i,j \geq 0} \lambda_{ij}. \quad (2.5)$$

Для случая плоских разбиений в ящике q -взвешенные перечисления определяются формулой

$$\mathcal{N}_{a,b,c}(q) = \sum_{\lambda \in \Omega_{a,b,c}} q^{V(\lambda)}, \quad (2.6)$$

где $\Omega_{a,b,c}$ есть множество всех плоских разбиений в ящике размера $a \times b \times c$. Величина (2.6) выражается через статистическую сумму пятивершинной модели на $N \times M$ решетке с весами (2.1) и фиксированными граничными условиями определенными выше (см. Рис. 1):

$$\mathcal{N}_{a,b,c}(q) = q^{-\frac{ac(a+c+2)}{4}} Z. \quad (2.7)$$

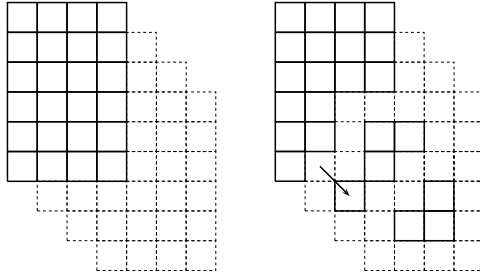


Рис. 3. Конфигурации квадратов соответствующие пустой трехмерной диаграмме Юнга (слева) и диаграмме Рис. 1 (справа); стрелкой показан элементарный сдвиг квадрата вдоль диагонали.

Действительно, чтобы установить справедливость этого равенства, достаточно убедиться в его выполнении для каждого плоского разбиения и для соответствующей ему конфигурации пятивершинной модели. Воспользуемся очевидным свойством плоских разбиений, что любая трехмерная диаграмма Юнга однозначно определяется заданием всех позиций одного из трех типов ромбов в укладках шестиугольника; в нашем случае удобно использовать набор квадратов, число которых, очевидно, одинаково для всех конфигураций (и равно ac). Важную роль играет конфигурация соответствующая пустой диаграмме $\lambda = \emptyset$, см. рис. 3.

Ясно, что все остальные плоские разбиения в ящике могут быть получены из этой конфигурации путем элементарных сдвигов квадратов вдоль диагоналей; число таких сдвигов для каждого плоского разбиения λ устанавливается однозначно и в точности равно его «объему», $V(\lambda)$. С другой стороны, в пятивершинной модели только вес $w_{i,j}(0, 0; 0, 0)$, который является весом вершины первого типа (см. Рис. 2) зависит от координаты вершины и от q (в то время как остальные ненулевые веса равны единице и тем самым не зависят от координаты вершины) и удовлетворяет уравнению

$$w_{i+1,j+1}(0, 0; 0, 0) = q w_{i,j}(0, 0; 0, 0). \quad (2.8)$$

Повторяя описанный выше прием со сдвигом квадратов, получаем, что полный больмановский вес конфигурации пятивершинной модели

равен $q^{V(\lambda)}$, умноженный на вес конфигурации соответствующий пустой диаграмме $\lambda = \emptyset$, который равен $q^{ac(a+c+2)/4}$. Таким образом, деля на этот фактор статистическую сумму, мы имеем в точности число q -взвешенных перечислений плоских разбиений в ящике, что и доказывает формулу (2.7).

Определим теперь корреляционную функцию, которая будет являться целью нашего вычисления в дальнейшем. Как и в работе [7], для обозначения вершин решетки в определении корреляционной функции будем использовать декартовы координаты (m, n) , с “началом координат” $(1, 1)$ в вершине в левом нижнем углу решетки, так что вертикальные линии занумерованы через $m = 1, \dots, M$ слева направо, а горизонтальные линии через $n = 1, \dots, N$ снизу вверх (а не сверху вниз, как выше). Нас будет интересовать вероятность обнаружения конфигурации в которой на горизонтальном ребре соединяющем вершины с координатами (m, n) и $(m+1, n)$ находится жирная линия, т.е. переменная заполнения этого ребра равна 1:

$$G(m, n) = \frac{1}{Z} \sum_{\{\mu, \nu\}} \mu_{N-n+1, m+1} \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^M w_{i,j}(\mu_{i,j}, \nu_{i+1,j}; \nu_{i,j}, \mu_{i,j+1}). \quad (2.9)$$

С точки зрения интерпретации плоских разбиений как укладок шестиугольника ромбами, эта корреляционная функция дает перечисления укладок ромбами шестиугольника с одним фиксированным ромбом.

3. ОПЕРАТОРНАЯ ФОРМУЛИРОВКА И ДЕТЕРМИНАНТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Как и в работе [7], вычисление интересующих нас величин в пятивершинной модели на $N \times M$ решетке будет основано на представлении в виде матричных элементов операторов действующих в пространстве $N + M$ фермионов. Такие представления являются результатом процедуры “фермионизации”, основанной на преобразовании Йордана-Вигнера, и адаптированной к случаю фиксированных граничных условий (см. раздел 2 работы [7]).

Для статистической суммы справедливо представление в виде матричного элемента от произведения M операторов:

$$Z = \langle \text{LB} | T(q^{1/2}) T(q) \cdots T(q^{M/2}) | \text{RT} \rangle. \quad (3.1)$$

Состояния $\langle \text{LB} |$ и $|\text{RT}\rangle$ учитывают граничные условия на левой и нижней, и на правой и верхней границах решетки соответственно, и в рассматриваемом нами случае граничных условий (см. Рис. 1) являются b -фермионными состояниями

$$\begin{aligned} \langle \text{LB} | &= \langle \Psi_{\underbrace{0, \dots, 0}_c, \underbrace{1, \dots, 1}_b, \underbrace{0, \dots, 0}_{a+b}} \rangle, \\ |\text{RT}\rangle &= |\Psi_{\underbrace{0, \dots, 0}_{a+b+c}, \underbrace{1, \dots, 1}_b} \rangle, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где базисные кет-векторы определены как

$$|\Psi_{\mu_1, \dots, \mu_N, \nu_1, \dots, \nu_M}\rangle = (f_1^*)^{\mu_1} \dots (f_N^*)^{\mu_N} (f_{N+1}^*)^{\nu_1} \dots (f_{N+M}^*)^{\nu_M} |\Omega\rangle, \quad (3.3)$$

и, соответственно, бра-векторы как

$$\langle \Psi_{\mu_1, \dots, \mu_N, \nu_1, \dots, \nu_M} | = \langle \Omega | (f_{N+M})^{\nu_M} \dots (f_{N+1})^{\nu_1} (f_N)^{\mu_N} \dots (f_1)^{\mu_1}. \quad (3.4)$$

Операторы f_j^* и f_j ($j = 1, \dots, N+M$) являются каноническими фермионными операторами рождения и уничтожения относительно вакуума $|\Omega\rangle$, и $\langle \Omega | \Omega \rangle = 1$. Отметим, что в случае произвольных фиксированных граничных условий состояния (3.2) равны бра- и кет-векторам (3.4) и (3.3), соответственно, где μ_1, \dots, μ_N и ν_1, \dots, ν_M принимают значения переменных заполнения внешних ребер решетки лежащих на левой и нижней (для $\langle \text{LB} |$) или на правой и верхней (для $|\text{RT}\rangle$) границах; как и выше, подразумевается, что переменные заполнения нумеруются либо сверху вниз, либо слева направо.

Операторы $T(z)$ в (3.1) соответствуют столбцам решетки и имеют вид

$$T(z) = X_N(q^{N/2}z) X_{N-1}(q^{(N-1)/2}z) \dots X_1(q^{1/2}z) U \quad (3.5)$$

где оператор $X_j(z)$ соответствует j -ому (сверху) узлу вертикального ряда, и имеет вид

$$\begin{aligned} X_j(z) &= z + f_{j+1}^* f_j + f_j^* f_{j+1} + (1-z)(f_j^* f_j + f_{j+1}^* f_{j+1}) \\ &\quad + (z-2)f_j^* f_j f_{j+1}^* f_{j+1}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Оператор U в (3.5) является оператором циклического сдвига,

$$U = P_{1,2} P_{2,3} \dots P_{N+M-1, N+M}, \quad U^{N+M} = 1, \quad (3.7)$$

где $P_{j,k}$ является оператором перестановки j -го и k -го фермионов, удовлетворяющий соотношениям

$$P_{j,k} f_j^* P_{j,k} = f_k^*, \quad P_{j,k} f_j P_{j,k} = f_k, \quad P_{j,k} |\Omega\rangle = |\Omega\rangle, \quad (3.8)$$

и имеющий следующее представление:

$$P_{j,k} = 1 - f_j^* f_j - f_k^* f_k + f_j^* f_k + f_k^* f_j. \quad (3.9)$$

Корреляционная функция $G(m, n)$, определенная в (2.9), выражается, аналогично формуле (3.1) для статистической суммы, в виде

$$G(m, n) = \frac{1}{Z} \langle \text{LB} | T(q^{1/2}) \cdots T(q^{m/2}) f_{N-n+1}^* f_{N-n+1} \times T(q^{(m+1)/2}) \cdots T(q^{M/2}) | \text{RT} \rangle. \quad (3.10)$$

Специфика представлений вида (3.1) и (3.10) заключается том, что они, как показано ниже, содержат только операторы являющиеся экспонентами от квадратичных форм по фермионам; матричные элементы таких операторов выражаются через миноры экспонент матриц задающие эти квадратичные формы. В этом и следующем разделе приводится метод вычисления матричных элементов (3.1) и (3.10), который может быть применен и к более сложным корреляционным функциям.

Для вычислений нам понадобятся две основные формулы для операторов являющихся экспонентами от квадратичных форм по фермионам. Для записи квадратичных форм мы будем использовать компактную форму записи $f^* \mathcal{A} f = \sum \mathcal{A}_{jk} f_j^* f_k$, где \mathcal{A} обозначает $(N + M) \times (N + M)$ матрицу с элементами \mathcal{A}_{jk} . Первая формула описывает результат произведения двух операторов представимых в виде экспоненты от квадратичных форм по фермионам:

$$e^{f^* \log \mathcal{A}_1 f} \cdot e^{f^* \log \mathcal{A}_2 f} = e^{f^* \log (\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2) f}. \quad (3.11)$$

Распространяя эту формулу по индукции, нетрудно получить выражение для произведения произвольного количества операторов. Вторая формула дает выражение для матричных элементов операторов являющихся экспонентами от квадратичных форм по фермионам. В p -частичном секторе матричные элементы оператора $\exp\{f^* \log \mathcal{A} f\}$ выражаются через p -ый минор матрицы \mathcal{A} :

$$\langle \Omega | f_{i_p} \cdots f_{i_2} f_{i_1} e^{f^* \log \mathcal{A} f} f_{j_1}^* f_{j_2}^* \cdots f_{j_p}^* | \Omega \rangle = \begin{vmatrix} \mathcal{A}_{i_1, j_1} & \mathcal{A}_{i_1, j_2} & \cdots & \mathcal{A}_{i_1, j_p} \\ \mathcal{A}_{i_2, j_1} & \mathcal{A}_{i_2, j_2} & \cdots & \mathcal{A}_{i_2, j_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{A}_{i_p, j_1} & \mathcal{A}_{i_p, j_2} & \cdots & \mathcal{A}_{i_p, j_p} \end{vmatrix}. \quad (3.12)$$

Наиболее прямое доказательство (3.11) и (3.12) может быть дано в рамках формализма интегрирования по грасманновым переменным (см., например, [8]). Использование этого формализма позволяет свести обе формулы к вычислению гауссовых интегралов. В частности, формула (3.11) следует того факта, что ядро оператора вида $\exp\{f^* \log \mathcal{A} f\}$ записывается в виде экспоненты от квадратичной формы по грасманновым переменным, с матрицей квадратичной формы равной матрице \mathcal{A} ; поскольку перемножению операторов соответствует свертка ядер, результат вычисления свертки приводит из левой части равенства к правой. В свою очередь, формула (3.12) может быть сведена к вычислению гауссового интеграла по p парам грасманновых переменных.

Простым примером оператора являющимся экспонентой от квадратичной формы по фермионам является оператор перестановки, который записывается в виде $P_{j,j+1} = \exp\{f^* \log \mathcal{P}_{j,j+1} f\}$, где матрица $\mathcal{P}_{j,j+1}$ размера $(N + M) \times (N + M)$ имеет блочную форму:

$$\mathcal{P}_{j,j+1} = \begin{pmatrix} I_{(j-1)} & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & I_{(M+N-j-1)} \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Здесь и ниже $I_{(k)}$ обозначает единичную $k \times k$ матрицу. В силу (3.11) оператор циклического сдвига (3.7) имеет вид $U = e^{f^* \log \mathcal{U} f}$, где матрица \mathcal{U} равна:

$$\mathcal{U} = \mathcal{P}_{1,2} \mathcal{P}_{2,3} \dots \mathcal{P}_{N+M-1, N+M} = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & & \\ & & & \\ I_{(N+M-1)} & & & \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Важную роль для применимости всего метода является возможность представить операторы (3.6) в виде экспоненты от квадратичной формы по фермионам. Справедливо представление

$$X_j(z) = z e^{f^* \log \mathcal{X}_j(z) f}, \quad (3.15)$$

где матрица $\mathcal{X}_j(z)$ имеет вид

$$\mathcal{X}_j(z) = \begin{pmatrix} I_{(j-1)} & & & \\ & z^{-1} & z^{-1} & \\ & z^{-1} & z^{-1} & \\ & & & I_{(M+N-j-1)} \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Отметим, что поскольку матрица $\mathcal{X}_j(z)$ имеет нулевое собственное значение, представление (3.15) необходимо понимать в смысле некоторого предела в классе операторов являющихся экспонентой от квадратичной формы по фермионам [7].

Непосредственным следствием формул (3.11) и (3.15) является формула

$$T(z) = q^{\frac{N(N+1)}{4}} z^N e^{f^* \log T(z) f}, \quad (3.17)$$

где матрица $T(z)$ равна

$$T(z) = \mathcal{X}_N(q^{N/2}z) \mathcal{X}_{N-1}(q^{(N-1)/2}z) \cdots \mathcal{X}_1(q^{1/2}z) \mathcal{U}. \quad (3.18)$$

В следующем разделе мы покажем, что все элементы матрицы $T(z)$ могут быть вычислены явно; более того, вычислению поддаются матричные элементы произведений этих матриц, такие как фигурирующие в формуле (3.1). Применение формулы (3.12) дает

$$Z = q^{\frac{NM(N+M+2)}{4}} \det H \quad (3.19)$$

где $b \times b$ матрица H имеет матричные элементы:

$$H_{ij} = [T(q^{1/2})T(q) \cdots T(q^{M/2})]_{c+i, a+b+c+j} \quad (i, j = 1, \dots, b). \quad (3.20)$$

Чтобы обобщить эти формулы на случай корреляционной функции (3.10), воспользуемся представлением

$$f_j^* f_j = \frac{d}{d\alpha} e^{f^* \log \mathcal{E}_j(\alpha) f} \Big|_{\alpha=0}, \quad (3.21)$$

где матрица $\mathcal{E}_j(\alpha)$ имеет вид

$$\mathcal{E}_j(\alpha) = \begin{pmatrix} I_{(j-1)} & & \\ & e^\alpha & \\ & & I_{(N+M-j)} \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} G(m, n) &= q^{\frac{NM(N+M+2)}{4}} Z^{-1} \frac{d}{d\alpha} \det [H + (e^\alpha - 1)W(m, n)] \Big|_{\alpha=0} \\ &= \text{tr} [H^{-1}W(m, n)], \end{aligned} \quad (3.23)$$

где матрица H определена выше, а матрица $W(m, n)$ имеет матричные элементы

$$[W(m, n)]_{ij} = [\mathcal{T}(q^{1/2}) \cdots \mathcal{T}(q^{m/2})]_{c+i, N-n+1} \times [\mathcal{T}(q^{(m+1)/2}) \cdots \mathcal{T}(q^{M/2})]_{N-n+1, a+b+c+j}. \quad (3.24)$$

4. МАТРИЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Рассмотрим задачу вычисления матричных элементов произведений \mathcal{T} -матриц, которые задают выражения (3.20) и (3.24).

Начнем с вычисления матричных элементов матрицы $\mathcal{T}(z)$, определяемой формулой (3.18). Рассмотрим более общую матрицу

$$\mathcal{T}(z_1, \dots, z_N) := \mathcal{X}_N(z_N^{-1}) \mathcal{X}_{N-1}(z_{N-1}^{-1}) \cdots \mathcal{X}_1(z_1^{-1}) \mathcal{U}, \quad (4.1)$$

которая определена так, что $\mathcal{T}(z) = \mathcal{T}(z_1, \dots, z_N)$ при $z_j = q^{-j/2} z^{-1}$ ($j = 1, \dots, N$). Замечая, что произведение \mathcal{X} -матриц в формуле (4.1) допускает индукцию по числу сомножителей, нетрудно получить, что матрица $\mathcal{T}(z_1, \dots, z_N)$ может быть записана как матрица с блочной структурой

$$\mathcal{T}(z_1, \dots, z_N) = \begin{pmatrix} A(z_1, \dots, z_N) & B(z_1, \dots, z_N) \\ C(z_1, \dots, z_N) & D(z_1, \dots, z_N) \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

где $A(z_1, \dots, z_N)$ является $N \times N$ нижнетреугольной матрицей, у которой ненулевые матричные элементы равны

$$[A(z_1, \dots, z_N)]_{ij} = \prod_{l=j}^i z_l, \quad (4.3)$$

а $B(z_1, \dots, z_N)$ и $C(z_1, \dots, z_N)$ являются прямоугольными матрицами, размерности $N \times M$ и $M \times N$, соответственно, причем у $B(z_1, \dots, z_N)$ ненулевым является только последний столбец, с элементами

$$[B(z_1, \dots, z_N)]_{iM} = \prod_{l=1}^i z_l \quad (i = 1, \dots, N), \quad (4.4)$$

а у $C(z_1, \dots, z_N)$ — ненулевой только первая строка, с элементами

$$[C(z_1, \dots, z_N)]_{1j} = \prod_{l=j}^N z_l \quad (j = 1, \dots, N). \quad (4.5)$$

Наконец, $D(z_1, \dots, z_N)$ является $M \times M$ матрицей:

$$D(z_1, \dots, z_N) = \begin{pmatrix} & \prod_{l=1}^N z_l \\ I_{(M-1)} & \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Обозначим через $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$, $D(z)$ блоки матрицы $\mathcal{T}(z)$, по аналогии с формулой (4.2). Полагая в формулах выше $z_j = q^{-j/2} z^{-1}$ ($j = 1, \dots, N$) приходим к выражениям для матричных элементов этих матриц. В частности, для матрицы $A(z)$ получим

$$[A(z)]_{ij} = \begin{cases} q^{-\frac{i(i+1)}{4} + \frac{j(j-1)}{4}} z^{-i+j-1} & i \geq j \\ 0 & i < j \end{cases} \quad (i, j = 1, \dots, N). \quad (4.7)$$

Нетривиальные матричные элементы остальных матриц, как легко видеть, выражаются через матричные элементы первого столбца и последней строки матрицы $A(z)$:

$$\begin{aligned} [B(z)]_{ij} &= [A(z)]_{i1} \delta_{jM} & (i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M), \\ [C(z)]_{ij} &= [A(z)]_{Nj} \delta_{i1} & (i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, N), \\ [D(z)]_{ij} &= \delta_{i,j+1} + [A(z)]_{N1} \delta_{i1} \delta_{jM} & (i, j = 1, \dots, M). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Рассмотрим теперь произведения \mathcal{T} -матриц. В силу блочной структуры матрицы $\mathcal{T}(z)$ естественно искать выражения для этих произведений также в виде блочных матриц:

$$\mathcal{T}(z_1) \mathcal{T}(z_2) \cdots \mathcal{T}(z_m) =: \begin{pmatrix} A_m(z_1, \dots, z_m) & B_m(z_1, \dots, z_m) \\ C_m(z_1, \dots, z_m) & D_m(z_1, \dots, z_m) \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

и ниже мы ограничимся только значениями $m \leq M$. Непосредственное вычисление показывает, что $N \times N$ матрицы $A_m(z_1, \dots, z_m)$ есть произведение A -матриц:

$$A_m(z_1, \dots, z_m) = A(z_1) A(z_2) \cdots A(z_m). \quad (4.10)$$

Матрицы $B_m(z_1, \dots, z_m)$, размерности $N \times M$, имеют ненулевые последние m столбцов:

$$\begin{aligned} [B_m(z_1, \dots, z_m)]_{ij} &= [A(z_1)]_{i1} \delta_{j, M-m+1} + [A(z_1) A(z_2)]_{i1} \delta_{j, M-m+2} + \cdots \\ &+ [A(z_1) A(z_2) \cdots A(z_m)]_{i1} \delta_{jM}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Матрицы $C_m(z_1, \dots, z_m)$, размерности $M \times N$, имеют ненулевые первые m строк:

$$[C_m(z_1, \dots, z_m)]_{ij} = [A(z_1)A(z_2) \cdots A(z_m)]_{Nj} \delta_{i1} + \cdots + [A(z_1)A(z_2)]_{Nj} \delta_{i, m-1} + [A(z_1)]_{Nj} \delta_{im}. \quad (4.12)$$

Наконец, $M \times M$ матрица $D_m(z_1, \dots, z_m)$ имеет вид:

$$D_m(z_1, \dots, z_m) = \begin{pmatrix} & S_m(z_1, \dots, z_m) \\ I_{(M-m)} & \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

где матрица $S_m(z_1, \dots, z_m)$, размерности $m \times m$, является верхнетреугольной, с матричными элементами:

$$[S_m(z_1, \dots, z_m)]_{ij} = [A(z_i) \cdots A(z_j)]_{N1}. \quad (4.14)$$

Таким образом, задача вычисления матричных элементов произведений T -матриц сводится к задаче вычисления матричных элементов произведений A -матриц. Полезно также отметить, что все матрицы в наборе $B_m(z_1, \dots, z_m)$ ($m = 1, \dots, M$) порождаются матрицей $B_M(z_1, \dots, z_M)$, поскольку все остальные матрицы этого набора могут быть получены из этой матрицы сдвигом ее столбцов вправо. Это следует из выражения для ее элементов (которые все ненулевые),

$$[B_M(z_1, \dots, z_M)]_{ij} = [A(z_1)A(z_2) \cdots A(z_j)]_{i1}, \quad (4.15)$$

и может быть выражено формулой:

$$[B_m(z_1, \dots, z_m)]_{ij} = [B_M(z_1, \dots, z_M)]_{i, j-M+m}. \quad (4.16)$$

Аналогично, весь набор матриц $C_m(z_1, \dots, z_m)$ ($m = 1, \dots, M$) может быть получен из матрицы $C_M(z_1, \dots, z_M)$, чьи элементы которой равны

$$[C_M(z_1, \dots, z_M)]_{ij} = [A(z_1)A(z_2) \cdots A(z_{M-i+1})]_{Nj}, \quad (4.17)$$

при сдвиге ее строк вверх.

Чтобы рассмотреть задачу вычисления матричных элементов произведения A -матриц полезно переписать матрицу $A(z)$ терминах матриц удовлетворяющих некоторой алгебре. Введем матрицы E , нижнетреугольную, и J , диагональную, с элементами

$$E_{ij} = \delta_{i, j+1}, \quad J_{ij} = i \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, N). \quad (4.18)$$

Матрица E нильпотентна, $E^N = 0$, и $(E^k)_{ij} = \delta_{i-j, k}$ ($k = 1, \dots, N-1$). Имеет место коммутационное соотношение:

$$q^J E q^{-J} = q E. \quad (4.19)$$

Для матрицы $A(z)$, матричные элементы которой даются формулой (4.7), имеем представление:

$$A(z) = q^{-\frac{1}{4}J(J+1)} z^{-(J+1)} (I - E)^{-1} q^{\frac{1}{4}J(J-1)} z^J. \quad (4.20)$$

Будем рассматривать произведение $A(q^{1/2}z) \cdots A(q^{m/2}z)$, что достаточно для вычисления выражений (3.20) и (3.24). Непосредственная подстановка (4.20) для искомого произведения дает

$$\begin{aligned} A(q^{1/2}z) \cdots A(q^{m/2}z) &= q^{-\frac{m(m+1)}{4}} z^{-m} q^{-\frac{1}{4}J(J+3)} z^{-J} \\ &\times (I - E)^{-1} q^{-J} (I - E)^{-1} q^{-J} \cdots (I - E)^{-1} q^{\frac{1}{4}J(J+2m-1)} z^J. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Используя коммутационное соотношение (4.19), это выражение может быть переписано в виде:

$$\begin{aligned} A(q^{1/2}z) \cdots A(q^{m/2}z) &= q^{-\frac{m(m+1)}{4}} z^{-m} q^{-\frac{1}{4}J(J+4m-1)} z^{-J} \\ &\times (I - q^{m-1}E)^{-1} \cdots (I - qE)^{-1} (I - E)^{-1} q^{\frac{1}{4}J(J+2m-1)} z^J. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Дальнейшее вычисление основано на формуле

$$\prod_{l=0}^{m-1} \frac{1}{(I - q^l x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} m-1+k \\ k \end{bmatrix}_q x^k, \quad (4.23)$$

где нами использовано стандартное обозначение для q -биномиальных коэффициентов:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \prod_{l=0}^{k-1} \frac{1 - q^{n-l}}{1 - q^{l+1}} = \frac{(q; q)_n}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}}, \quad (4.24)$$

где

$$(x, q)_k := \prod_{l=0}^{k-1} (1 - q^l x). \quad (4.25)$$

Справедливость (4.23) легко проверяется с помощью q -аналога формулы Паскаля

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q. \quad (4.26)$$

В итоге, для матричных элементов искомого матричного произведения получим

$$\begin{aligned} & [A(q^{1/2}z) \cdots A(q^{m/2}z)]_{ij} \\ &= q^{-\frac{1}{2}\binom{m+1}{2} - \frac{1}{2}\binom{i}{2} - mi + \frac{1}{2}\binom{i}{2} + \frac{1}{2}mj} \begin{bmatrix} m-1+i-j \\ i-j \end{bmatrix}_q z^{-i+j-m}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

В качестве примера приложения этой формулы, вычислим элементы матрицы $B_M := B_M(q^{1/2}, \dots, q^{M/2})$, которые задают элементы матрицы H определенной в (3.20) (напомним, что $b+c=N$), $H_{ij} = (B_M)_{c+i, a+j}$ ($i, j = 1, \dots, b$). Используя (4.15) и (4.27), получим

$$\begin{aligned} (B_M)_{ij} &= [A(q^{1/2})A(q) \cdots A(q^{j/2})]_{i1} \\ &= q^{-\frac{1}{2}\binom{i}{2} - \frac{1}{2}\binom{j}{2} - ij} \begin{bmatrix} i+j-2 \\ i-1 \end{bmatrix}_q. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Аналогично, для матрицы $W(m, n)$ определенной в (3.24), в наших обозначениях имеем:

$$\begin{aligned} [W(m, n)]_{ij} &= [A_m(q^{1/2}, \dots, q^{m/2})]_{c+i, N-n+1} \\ &\quad \times [B_{M-m}(q^{(m+1)/2}, \dots, q^{M/2})]_{N-n+1, a+j}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

откуда следует, в силу (4.11), что при $m > a$ элементы этой матрицы отличны от нуля только на столбцах $j = m - a + 1, \dots, b$. Применение (4.10), (4.15) и (4.16) для этих элементов дает:

$$\begin{aligned} [W(m, n)]_{ij} &= [A(q^{1/2}) \cdots A(q^{m/2})]_{c+i, N-n+1} \\ &\quad \times [A(q^{(m+1)/2}) \cdots A(q^{(a+j)/2})]_{N-n+1, 1}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Наконец, применение (4.27) приводит к явному выражению для элементов этой матрицы, которое будет использовано ниже.

5. СТАТИЧЕСКАЯ СУММА И ОДНОТОЧЕЧНАЯ ФУНКЦИЯ

В этом разделе мы рассмотрим вычисление выражений (3.19) и (3.23) для статистической суммы и одноточечной функции, соответственно, основываясь на результатах предыдущего раздела.

Начнем с статистической суммы, для нахождения которой необходимо вычисление определителя $b \times b$ матрицы H . Согласно (3.20), (4.24)

и (4.28) для элементов этой матрицы имеем выражение

$$\begin{aligned} H_{ij} &= (B_M)_{c+i, a+j} \\ &= q^{-\frac{1}{2}\binom{c+i}{2} - \frac{1}{2}\binom{a+i}{2} - (c+i)(a+j)} \frac{(q; q)_{a+c+i+j-2}}{(q; q)_{c+i-1} (q; q)_{a+j-1}}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Матрица H допускает факторизацию

$$H = q Y_c^{-1} \tilde{H} Y_a^{-1}, \quad (5.2)$$

где Y_p (здесь и всюду ниже $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) обозначает диагональную матрицу с элементами

$$(Y_p)_{ij} = q^{-\frac{1}{2}\binom{p+i}{2} + p+i} (q; q)_{p+i-1} \delta_{ij}, \quad (5.3)$$

а \tilde{H} является ганкелевой матрицей,

$$\tilde{H}_{ij} = q^{-\binom{a+c+i+j-1}{2}} (q; q)_{a+c+i+j-2}. \quad (5.4)$$

В силу факторизации матрицы H , имеем

$$\det H = q^{-b(a+c+b)} \prod_{k=0}^{b-1} \frac{q^{\frac{1}{2}\binom{a+k+1}{2} + \frac{1}{2}\binom{c+k+1}{2}}}{(q; q)_{a+k} (q; q)_{c+k}} \det \tilde{H}. \quad (5.5)$$

Таким образом, задача сводится к вычислению определителя ганкелевой матрицы. Ниже будем полагать, что $0 < q < 1$, однако отметим, что в окончательных ответах это ограничение может быть снято.

Вычисление определителя матрицы \tilde{H} , а также элементов обратной матрицы ниже, основано на представлении

$$\tilde{H}_{ij} = \frac{1}{(-\log q)} \int_0^\infty \frac{x^{a+c+i+j-2}}{(-x; q)_\infty} dx. \quad (5.6)$$

Это представление позволяет связать ганкелеву матрицу \tilde{H} с ансамблем q -полиномов Лагерра $\{L_k^{(p)}(x; q)\}_{k=0}^\infty$ при $p = a + c$, условие ортогональности которых для p целых и неотрицательных может быть записано в виде

$$\frac{1}{(-\log q)} \int_0^\infty \frac{x^p}{(-x; q)_\infty} L_k^{(p)}(x; q) L_{k'}^{(p)}(x; q) dx = h_k \delta_{k, k'}, \quad (5.7)$$

где

$$h_k = q^{-k - \binom{p+1}{2}} \frac{(q; q)_{k+p}}{(q; q)_k}, \quad (5.8)$$

и которые имеют вид (см., например, [9]):

$$L_k^{(p)}(x; q) = \frac{(q^{p+1}; q)_k}{(q; q)_k} \sum_{l=0}^k \frac{(q^{-k}; q)_l}{(q^{p+1}; q)_l (q; q)_l} q^{l(k+p+1)+\binom{l}{2}} x^l. \quad (5.9)$$

Подробное обсуждение свойств q -полиномов Лагерра было дано в [10], условие ортогональности (5.7) обсуждалось также в [11, 12].

Определитель ганкелевой матрицы вычисляется (см., например, [13]) по хорошо известной формуле

$$\det \tilde{H} = \prod_{k=0}^{b-1} \frac{h_k}{\mu_k^2}, \quad (5.10)$$

где μ_k является старшим коэффициентом полинома $L_k^{(a+c)}(x; q)$; из (5.9) следует выражение

$$\mu_k = \frac{q^{k(k+a+c)}}{(q; q)_k} \cdot (-1)^k. \quad (5.11)$$

Подстановка (5.8) и (5.11) в (5.10) дает

$$\det \tilde{H} = \prod_{k=0}^{b-1} q^{-\binom{2k+a+c+1}{2}} (q; q)_k (q; q)_{k+a+c}. \quad (5.12)$$

В результате, подставляя (5.12) и (5.5) в (3.19), для статистической суммы получим выражение:

$$Z = q^{\frac{1}{4}ac(a+c+2)} \prod_{k=0}^{b-1} \frac{(q; q)_k (q; q)_{k+a+c}}{(q; q)_{c+k} (q; q)_{a+k}}. \quad (5.13)$$

Используя (2.7), для q -взвешенных перечислений плоских разбиений получим

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{a,b,c}(q) &= \prod_{k=0}^{b-1} \frac{(q; q)_k (q; q)_{k+a+c}}{(q; q)_{c+k} (q; q)_{a+k}} \\ &= \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^c \frac{1 - q^{i+j+k-1}}{1 - q^{i+j+k-2}}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

где второе выражение есть знаменитая формула МакМахона [2, 14].

Обсудим задачу обращения матрицы H , что необходимо для вычисления корреляционной функции $G(m, n)$ по формуле (3.23). Важную

роль в решении этой задачи играет ядро Кристоффеля–Дарбу $K_b(x, y)$ для q -полиномов Лагерра

$$K_b(x, y) = \sum_{k=0}^{b-1} \frac{1}{h_k} L_k^{(a+c)}(x; q) L_k^{(a+c)}(y; q). \quad (5.15)$$

Согласно общей схеме [13], эта функция является производящей функцией для элементов $b \times b$ матрицы \tilde{H}^{-1} :

$$K_b(x, y) = \sum_{i, j=1}^b \tilde{H}_{ij}^{-1} x^{i-1} y^{j-1}. \quad (5.16)$$

Таким образом, используя (5.9) нетрудно получить явное выражение для элементов матрицы \tilde{H}^{-1} . В результате, после учета (5.2) и (5.3), получим:

$$\begin{aligned} H_{ij}^{-1} &= q^{\frac{1}{2} \binom{a+i}{2} + (i-1)(c+1) + \frac{1}{2} \binom{c+j}{2} + (j-1)(a+1) + (a+1)(c+1)} \\ &\times \frac{(q; q)_{a+i-1} (q; q)_{c+j-1}}{(q; q)_{a+c} (q^{a+c+1}; q)_{i-1} (q; q)_{i-1} (q^{a+c+1}; q)_{j-1} (q; q)_{j-1}} \\ &\times \sum_{k=\max\{i, j\}-1}^{b-1} \frac{(q^{a+c+1}; q)_k (q^{-k}; q)_{i-1} (q^{-k}; q)_{j-1}}{(q; q)_k} q^{k(i+j-1)}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Наконец, для использования (3.23) нам понадобятся матричные элементы матрицы $W(m, n)$. Обсуждение вычисления этих элементов было дано в конце предыдущего раздела. Явное выражение имеет вид:

$$\begin{aligned} [W(m, n)]_{ij} &= q^{-\frac{1}{2} \binom{c+i}{2} - m(i+n-b-1) - \frac{1}{2} \binom{a+j}{2} - (a+j)(N-n+1)} \\ &\times \begin{bmatrix} i+n-b+m-2 \\ i+n-b-1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} j+a+N-n-m-1 \\ j+a-m-1 \end{bmatrix}_q. \end{aligned} \quad (5.18)$$

В результате, подставляя (5.17) и (5.18) в (3.23), и выражая суммирование по $i, j = 1, \dots, b$ в терминах обрывающихся базисных рядов,

для одноточечной функции $G(m, n)$ получим формулу:

$$\begin{aligned}
 G(m, n) = & \sum_{k=\max\{0, m-a, b-n\}}^{b-1} q^{(k+n-b)(k+a-m+1)} \frac{(q; q)_{a+k} (q; q)_{c+k}}{(q; q)_k (q; q)_{a+c+k}} \\
 & \times \begin{bmatrix} a+b+c+k-n-m \\ a+k-m \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} k+n+m-b-1 \\ k+n-b \end{bmatrix}_q \\
 & \times {}_3\phi_2 \left(\begin{matrix} q^{-k}, q^{-k-a+m}, q^{-k-a-c} \\ q^{-a-b-c-k+m+n}, q^{-k-a} \end{matrix} \middle| q; q \right) \\
 & \times {}_3\phi_2 \left(\begin{matrix} q^{-k}, q^{-k-n+b}, q^{-k-a-c} \\ q^{-k-n-m+b+1}, q^{-k-c} \end{matrix} \middle| q; q \right), \quad (5.19)
 \end{aligned}$$

где использовано стандартное обозначение для базисного гипергеометрического ряда

$${}_3\phi_2 \left(\begin{matrix} a, b, c \\ d, e \end{matrix} \middle| q; z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a; q)_k (b; q)_k (c; q)_k}{(d; q)_k (e; q)_k} \frac{z^k}{(q; q)_k}. \quad (5.20)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. G. E. Andrews, *The Theory of Partitions*. — Addison-Wesley Publishing, 1976.
2. D. M. Bressoud, *Proofs and Confirmations: The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture*. — Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
3. H. Cohn, M. Larsen, J. Propp, *The shape of a typical boxed plane partition*. — New York J. Math. **4** (1998), 137–165.
4. Al. Borodin, V. Gorin, E. M. Rains, *q-Distributions on boxed plane partitions*. — Selecta Math. (N. S.) **16** (2010), 731–789.
5. N. M. Bogoliubov, *Boxed plane partitions as an exactly solvable boson model*. — J. Phys. A **38** (2005), 9415–9430.
6. Н. М. Боголюбов, *Четырехвершинная модель и случайные укладки*. — Теор. мат. физ. **155** (2008), No. 1, 25–38.
7. В. С. Капитонов, А. Г. Пронько, *Пятивершинная модель и плоские разбиения в ящике*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **360** (2008), 162–179.
8. Ф. А. Березин, *Метод вторичного квантования*, — 2-ое изд. (доп.), Наука, М., 1986.
9. R. Koekoek, P. A. Lesky, R. F. Swarttouw, *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q-Analogues*. Springer Monographs in Mathematics. — Springer-Verlag, Berlin, 2010.
10. D. S. Moak, *The q-analogue of the Laguerre polynomials*. — J. Math. Anal. Appl. **81** (1981), 20–47.
11. R. Koekoek, *Generalizations of a q-analogue of Laguerre polynomials*. — J. Approx. Theory **69** (1992), 55–83.

12. S. G. Moreno, E. M. Garcia-Caballero, *q-Sobolev orthogonality of the q-Laguerre polynomials* $\{L_n^{(-N)}(\cdot; q)\}_{n=0}^{\infty}$ for positive integers N . — J. Korean Math. Soc. **48** (2011), 913–926.
13. G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*. American Colloquium Publications, Vol. XXIII. — 4th edn., American Mathematical Society, Providence (RI), 1975.
14. I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*. — 2nd edn., Oxford University Press, Oxford, 1995.

Капитонов В. С., Пронко А. Г., Weighted enumerations of boxed plane partitions and inhomogeneous five-vertex model.

The five-vertex model on a square lattice with fixed boundary conditions, which corresponds to the weighted (with the weight q per elementary cube) enumerations of boxed plane partition is considered. The one-point correlation function of the model describing the probability of a given state on an edge (polarization) is calculated. This generalises the similar result obtained previously by the authors for the unweighed (weighted with the weight $q = 1$) enumerations of plane partitions.

СПбГТИ(ТУ), Московский пр., д. 26,
Санкт-Петербург 190013, Россия
E-mail: v.s.kapitonov@gmail.com

Поступило 15 декабря 2011 г.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, С.-Петербург 191023, Россия
E-mail: agp@pdmi.ras.ru