Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 398, 2012 г.

Е. Ш. Гутшабаш

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МУТАРА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ К НЕКОТОРЫМ ЗАДАЧАМ ФИЗИКИ. I. СЛУЧАЙ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Введение

Среди методов построения точных решений линейных и нелинейных (включая вполне интегрируемые) уравнений, возникающих в разнообразных задачах теоретической и математической физики, важное место занимают так называемые методы "одевания" решений [1–3]. Задаваясь каким-то затравочным (известным) решением данного уравнения, с помощью таких методов можно построить другое (новое) решение. При повторении этой процедуры строится второе новое решение и т.д., т.е. возникает цепочка решений исходного уравнения. Таким образом, методы одевания позволяют размножать решения при условии, что уже известно какое-то из них. При этом причиной, по которой эти методы вообще работают, является свойство ковариантности уравнений, т.е. сохранение их формы относительно соответствующих преобразований. Это означает, также, что одновременно с новым решением в уравнении, которому оно удовлетворят, возникают и новые коэффициентные функции, и значит, автоматически выстраивается еще и цепочка новых "потенциалов". Эта идея оказалось чрезвычайно плодотворной и эффективной и позволила построить целые семейства новых точных решений различных уравнений.

В данной работе мы развиваем некоторые идеи, связанные с методом преобразования Мутара и изучаем его приложения к решению ряда задач физики. Наряду с преобразованием Дарбу [1], этот метод в последние годы также исследуется и применяется достаточно часто [4–6]. В работах [7–8], в частности, он, в совокупности с методом

Ключевые слова: преобразование Мутара, преобразование Дарбу, функционально-дифференциальное уравнение, нестационарное уравнение Шредингера, уравнение Фоккера–Планка, уравнение Гельмгольца.

сплетающих соотношений, использовался для исследования некоторых спектральных задач для уравнения Шредингера.

Иной подход развивался нами в [9–10]. В этой связи отметим, что метод преобразования Мутара вполне аналогичен методу преобразования Дарбу (либо, по терминологии [1], бинарному преобразованию Дарбу) с той разницей, что в последнем вронскиан двух линейно независимых решений исходного уравнения заменяется на некоторый, вообще говоря, неизвестный функционал, зависящий от двух этих решений. В результате, помимо одевающих формул для потенциалов, возникает довольно сложное (функционально)-дифференциальное уравнение в частных производных, которое в некоторых важных случаях допускает точные решения. Полное исследование этого уравнения представляет собой отдельную задачу и не является предметом данной работы. Здесь мы акцентируем внимание лишь на простейших ситуациях, когда решение подобной задачи возможно (либо, если решение найти не удается, приводим только само уравнение). В качестве преимущества такого подхода стоит отметить, что в отличие от преобразования Дарбу (так же, как и Бэклунда), преобразование Мутара не зависит от (пространственных) прозводных, и, как следствие, легко распространяется на задачи более высоких размерностей.

Далее, мы отдельно рассматриваем ситуации двух и трех независимых переменных. В первом случае, которому посвящена данная работа, мы развиваем общую схему применения преобразования Мутара к уравнениям второго порядка, включая матричную версию, а затем – в качестве примеров – рассматриваем нестационарное одномерное уравнение Шредингера, уравнение теплопроводности с переменным коэффициентом, уравнение Фоккера–Планка, волновое уравнение с переменным коэффициентом и двумерное уравнение Гельмгольца[1]. Также, следует сказать, что часто мы ограничиваемся однократным одеванием решений, т.к. соответствующие формулы для последующих "итераций" вполне аналогичны известным формулам для преобразования Дарбу [1] и, кроме того, для приложений этого оказывается, в принципе, достаточно.

[1]Результаты, касающиеся этого уравнения, частично взяты из работы [9] с устранением неточностей, содержащихся там.

2. Общая схема

Рассмотрим следующее линейное уравнение в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами $((\xi,\ \eta) \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2)$:

$$a(\xi,\eta)f_{\xi\xi} + 2b(\xi,\eta)f_{\xi\eta} + c(\xi,\eta)f_{\eta\eta} + g(\xi,\eta)f = 0, \tag{2.1}$$

где функции $a(\xi,\eta)$, $b(\xi,\eta)$, $c(\xi,\eta)$ и $g(\xi,\eta)$ предполагаются заданными и, вообще говоря, комплекснозначными, и пусть $f_1 = f_1(\xi,\eta)$ – некоторое известное решение этого уравнения. Положим

$$\widetilde{f}(\xi,\eta) = \frac{\omega(f_1,f)}{f_1}, \tag{2.2}$$

где $\omega = \omega(f_1,f) = \omega(\xi,\eta)$ – некоторый функционал, определенный на прямом произведении пространств решений уравнения (2.1), и проверим ковариантность (2.1) относительно преобразования $f \to \widetilde{f}$, $a \to \widetilde{a}$, $b \to \widetilde{b}$, $c \to \widetilde{c}$, $g \to \widetilde{g}$, т.е. будем предполагать, что имеет место уравнение

$$\widetilde{a}(\xi,\eta)\widetilde{f}_{\xi\xi} + 2\widetilde{b}(\xi,\eta)\widetilde{f}_{\xi\eta} + \widetilde{c}(\xi,\eta)\widetilde{f}_{\eta\eta} + \widetilde{g}(\xi,\eta)\widetilde{f} = 0. \tag{2.3}$$

После подстановки (2.2) в (2.1) и приравнивании нулю комбинаций слагаемых при f_1^3, f_1^2 и f_1, получим:

$$\widetilde{a}\omega_{\xi\xi} + 2\widetilde{b}\omega_{\xi\eta} + \widetilde{c}\omega_{\eta\eta} + \widetilde{g}\omega = 0, \tag{2.4a}$$

$$\omega[\widetilde{a}f_{1\xi\xi} + 2\widetilde{b}f_{1\xi\eta} + \widetilde{c}f_{1\eta\eta}] + 2\omega_\xi[\widetilde{a}f_{1\xi} + \widetilde{b}f_{1\eta}] + 2\omega_\eta[\widetilde{b}f_{1\xi} + \widetilde{c}f_{1\eta}] = 0, \tag{2.4b}$$

$$\widetilde{a}f_{1\xi}^2 + 2\widetilde{b}f_{1\xi}f_{1\eta} + \widetilde{c}f_{1\eta}^2 = 0. \tag{2.4c}$$

Процедура решения уравнения (2.1) сводится, таким образом, к нахождению "одетых" коэффициетных функций $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$, $\widetilde{c}$, $\widetilde{g}$, построению (из каких-либо дополнительных соображений, включающих использование самого уравнения (2.1)) функционала ω, и вычисления по соотношению (2.2) решения $\widetilde{f}$.

Предполагая, что функции ω, ω_ξ, ω_η линейно независимы, вместо системы (2.4a)–(2.4) будем иметь:

$$\widetilde{a}\omega_{\xi\xi} + 2\widetilde{b}\omega_{\xi\eta} + \widetilde{c}\omega_{\eta\eta} + \widetilde{g}\omega = 0, \tag{2.5a}$$

$$\widetilde{a}f_{1\xi\xi} + 2\widetilde{b}f_{1\xi\eta} + \widetilde{c}f_{1\eta\eta} = 0, \tag{2.5b}$$

$$\widetilde{a}f_{1\xi} + \widetilde{b}f_{1\eta} = 0, \quad \widetilde{b}f_{1\xi} + \widetilde{c}f_{1\eta} = 0, \tag{2.5c}$$

$$\widetilde{a}f_{1\xi}^2 + 2\widetilde{b}f_{1\xi}f_{1\eta} + \widetilde{c}f_{1\eta}^2 = 0. \tag{2.5d}$$

Из требования ее совместности и соотношений (2.5c), как нетрудно видеть, следует, что должно выполняться условие $\widetilde{b}^2 = \widetilde{a}\widetilde{c}$. Это означает, что требование ковариантности (2.1) относительно преобразования Мутара (2.2) с необходимостью приводит к требованию: как уравнение (2.1), так и преобразованное уравнение (2.3) должны быть уравнениями параболического типа.

Рассмотрим случай, когда в уравнении (2.1) $b(\xi,\eta) = 0$. Снова выполняя проверку ковариантности (2.1) относительно преобразования (2.2), находим:

$$\widetilde{a}\omega_{\xi\xi} + \widetilde{c}\omega_{\eta\eta} + \widetilde{g}\omega = 0, \tag{2.6a}$$

$$\widetilde{a}\omega f_{1\xi\xi} + 2\widetilde{a}f_{1\xi}\omega_\xi + \widetilde{c}\omega f_{1\eta\eta} + 2\widetilde{c}f_{1\eta}\omega_\eta = 0, \tag{2.6b}$$

$$\widetilde{a}f_{1\xi}^2 + \widetilde{c}f_{1\eta}^2 = 0. \tag{2.6c}$$

Тогда, если все “одетые” коэффициенты и f_1 – вещественнозначны, то при $\operatorname{sign}\widetilde{a} \neq \operatorname{sign}\widetilde{c}$ уравнение (2.2), а значит и (2.3), является уравнением гиперболического типа.

Пусть теперь $b(\xi,\eta) \neq 0$, а, например, $c(\xi,\eta) = 0$. Система (2.4) тогда сводится к

$$\widetilde{a}\omega_{\xi\xi} + 2\widetilde{b}\omega_{\xi\eta} + \widetilde{c}\omega_{\eta\eta} + \widetilde{g}\omega = 0, \tag{2.7a}$$

$$\widetilde{a}f_{1\xi\xi} + 2\widetilde{b}f_{1\xi\eta} + \widetilde{c}f_{1\eta\eta} = 0, \tag{2.7b}$$

$$\widetilde{a}f_{1\xi\xi} + 2\widetilde{b}f_{1\xi\eta} + 2\widetilde{b}(\ln\omega)_\eta f_{1\xi} = 0, \tag{2.7c}$$

$$\widetilde{a}f_{1\xi} + \widetilde{b}f_{1\eta} = 0. \tag{2.7d}$$

Очевидно, что как и при применении преобразований Дарбу или Беклунда, здесь также может быть построена цепочка преобразований, полученная двухкратным, трехкратным и т.д. повторением преобразования вида (2.2). Полагая $f[1] = \widetilde{f}$, $a[1] = \widetilde{a}, \dots g[1] = \widetilde{g}$, будем иметь: $f[1] \to f[2] \to \dots, \dots, a[1] \to a[2] \to \dots, \dots, g[1] \to g[2] \to \dots$.

Представляет интерес и матричная версия преобразования (2.2). Для ее построения мы, в предположении, что $a(\xi,\eta) \neq 0$, вместо (2.1), рассмотрим более простое уравнение

$$f_{\xi\xi} + \beta(\xi,\eta)f_{\xi\eta} + \gamma(\xi,\eta)f_{\eta\eta} = 0, \tag{2.8}$$

где $\beta(\xi,\eta) = 2b/a$, $\gamma(\xi,\eta) = c/a$, и от этого уравнения перейдем к эквивалентному ему матричному уравнению:

$$\begin{pmatrix} \varphi & C \\ \chi & 0 \end{pmatrix}_{\xi} = \begin{pmatrix} -\beta & -\gamma \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi & C \\ \chi & 0 \end{pmatrix}_{\eta}, \tag{2.9}$$

где $\varphi = f_{\xi}$, $\chi = f_{\eta}$, C – произвольная постоянная. Введя матрицы

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi & C \\ \chi & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -\beta & -\gamma \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

из (2.9) находим:

$$\Phi_{\xi} = T(\xi, \eta)\Phi_{\eta}. \tag{2.11}$$

Для решения этого уравнения применим матричное преобразование Мутара. Для этого проверим ковариантность (2.11) относительно преобразования $\Phi \to \widetilde{\Phi}$, $T \to \widetilde{T}$, полагая

$$\widetilde{\Phi} = Q(\Phi_1, \Phi)\Phi_1^{-1}, \tag{2.12}$$

где Φ_1 – некоторое фиксированное (затравочное) решение (2.11), $Q \in \mathrm{Mat}\,(2, \mathbb{C})$. Подстановка (2.12) в (2.11) приводит к одевающим соотношениям:

$$\widetilde{T} = Q_{\xi} Q_{\eta}^{-1}, \quad \widetilde{T} = Q\Phi_1^{-1} T \Phi_1 Q^{-1}, \tag{2.13}$$

так, что $\mathrm{Tr}\,\widetilde{T} = \mathrm{Tr}\,T$ и $\det \widetilde{T} = \det T$, а требование их совместности дает уравнение на матрицу Q^{-1}:

$$(Q^{-1})_{\xi} = \Phi_1^{-1} T \Phi_1 (Q^{-1})_{\eta}. \tag{2.14}$$

Это уравнение является матричным аналогом, например, уравнения (2.4a) и также представляет собой функционально-дифференциальное уравнение в частных производных, но уже первого порядка, и не содержащее “одетых” потенциалов. Оно инвариантно относительно замены $Q \to CQ$, и, очевидно, имеет точное решение, если $\Phi_1^{-1} T \Phi_1 = C_1$, где C, C_1 – постоянные матрицы.

Заметим, также, что здесь, как и в скалярном случае, можно построить соответствующие цепочки одевающих преобразований.

3. Примеры

1. *Нестационарное уравнение Шредингера.*

Это уравнение имеет вид:

$$i\Psi_t = -\Psi_{xx} + V(x,t)\Psi, \tag{3.1}$$

где $\Psi = \Psi(x,t)$ - волновая функция, а потенциал $V = V(x,t)$, как правило, предполагается вещественным (мы пользуемся системой единиц, в которой $\hbar = 1$, $m = 1/2$, где m – масса частицы).

Пусть φ, χ – два произвольных решения уравнения (3.1), $V = \overline{V}$. Тогда из него легко следует, что криволинейный интеграл

$$\Omega(\varphi,\chi) = \int\limits_{(x_0,t_0)}^{(x,t)} i(\varphi\overline{\chi})\, dx + (\varphi\overline{\chi}_x - \overline{\chi}\varphi_x)\, dt, \tag{3.2}$$

где $(x_0,\, t_0)$ – фиксированная точка на плоскости $(x,\, t)$, не зависит от пути интегрирования и $d\Omega = 0$, т.е. 2-форма Ω является замкнутой.

Проверка ковариантности (3.1) относительно преобразования

$$\Psi \to \widetilde{\Psi} = \frac{\omega(\Psi_1,\Psi)}{\Psi_1}, \quad V \to \widetilde{V} \tag{3.3}$$

приводит к одевающему соотношению

$$\widetilde{V} = V - 2(\ln\Psi_1)_{xx} - 2i(\ln\Psi_1)_t - q_1. \tag{3.4}$$

Здесь $q_1 = q_1(x,t) = q_{1R}(x,t) + iq_{1I}(x,t)$ – комплекснозначная функция, введенная в обе части равенства, получающегося после подстановки анзаца Мутара в (3.1) ("параметр" разделения переменных переменных), как с целью добиться вещественности потенциала $\widetilde{V}$, так и возможностью получения другой его калибровки. Из условий $V = \overline{V}$ и $\widetilde{V} = \overline{\widetilde{V}}$ тогда находим:

$$\left(\ln\frac{\Psi_1}{\overline{\Psi}_1}\right)_{xx} = -i(\ln|\Psi_1|^2)_t - iq_{1I}, \tag{3.5a}$$

или

$$2(\arg\Psi_1)_{xx} = -(\ln|\Psi_1^2)_t - q_{1I}. \tag{3.5b}$$

Если "одетый" потенциал не предполагается вещественным, то в этих равенствах полагаем $q_{1I} = 0$.

Оставшиеся слагаемые приводят к функционально-дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка:

$$i\omega_t + \omega_{xx} - 2\omega_x(\ln\Psi_1)_x + q_1\omega = 0. \tag{3.6}$$

Если $q_1 = 0$, то это уравнение имеет точное решение $\omega = \Omega$, где Ω определяется выражением (3.2) [1].

Таким образом, мы получаем, что решение $\Psi[1] = \omega(\Psi_1, \Psi)/\Psi_1$, $\Psi[1] = \widetilde{\Psi}$, является решением уравнения ($V[1] = \widetilde{V}$)

$$i\Psi_t[1] = -\Psi_{xx}[1] + V[1]\Psi[1]. \tag{3.7}$$

Пусть, теперь, $\Psi_2[1] = \omega(\Psi_2, \Psi_1)/\Psi_1$ – некоторое фиксированное решение (3.7). Тогда суперпозиция вида

$$\Psi[2] = \frac{\omega(\Psi_2[1], \Psi[1])}{\Psi_2[1]} \tag{3.8}$$

будет решением следующего по цепочке уравнения Шредингера с потенциалом

$$\begin{aligned} V[2] &= V[1] - 2(\ln\Psi_2[1])_{xx} - 2i(\ln\Psi_2[1])_t - q_2 \\ &= V - 2(\ln\omega(\Psi_2, \Psi_1))_{xx} - 2i(\ln\omega(\Psi_2, \Psi_1))_t - q_1 - q_2, \end{aligned} \tag{3.9}$$

и так далее. При этом ясно, что выражения для волновых функций и потенциалов при дальнейших одеваниях будут содержать функционалы вида $\omega(\Psi_i, \Psi_j)$, $i, j = 1, \ldots$, $i > j$, Ψ_1, $\Psi_2, \ldots$ – затравочные решения уравнения (3.1).

Уравнение (3.6) можно представить в гамильтоновой форме:

$$i\omega_t = \frac{\delta H^{(\omega)}}{\delta\overline{\omega}} = i\left\{H^{(\omega)}, \omega\right\}, \tag{3.10}$$

с, вообще говоря, комплексным гамильтонианом $H^{(\omega)}$

$$H^{(\omega)} = \int dx\,\left\{\omega_x\overline{\omega}_x + a\omega_x\overline{\omega} - q_1|\omega|^2\right\}. \tag{3.11}$$

где $a = a(x,t) = 2(\ln\Psi_1)_x$, а пуассонова структура на фазовом пространстве задается скобками:

$$\{\omega(x), \omega(y)\} = \{\overline{\omega}(x), \overline{\omega}(y)\} = 0, \quad \{\omega(x), \overline{\omega}(y)\} = i\delta(x-y). \tag{3.12}$$

Отметим, также, что уравнение (3.6) имеет простую физическую интерпретацию [2]. Действительно, рассмотрим квантовую заряженную (с зарядом e) частицу в нестационарном электромагнитном поле. Уравнение эволюции тогда будет иметь вид [11] (в системе единиц $\hbar = e = c = 1$):

$$i\Psi_t = -\Psi_{xx} + 2i\widehat{A}^{(x)}\Psi_x + [(\widehat{A}^{(x)})^2 + \widehat{A}^{(x)}_x + \phi]\Psi = 0, \tag{3.13}$$

где $\widehat{A}^{(x)}$ – x-компонента векторного потенциала, $\phi = \phi(x,t)$ – скалярный потенциал. Сравнивая (3.13) и (3.6), мы видим, что коэффициентные функции “уравнения Шредингера” (3.6) выражаются в виде комбинаций векторного и скалярного потенциалов.

Приведем примеры, связанные связанные с конкретным выбором затравочного потенциала.

i) Пусть в уравнении (3.1) $V = 0$. Полагая

$$\begin{gathered}\Psi_1 = e^{\phi_1}\cosh\theta_1, \quad \phi_1 = i(\mu_1^2 - \lambda_1^2)t - i\lambda_1 x,\\ \theta_1 = \mu_1 x + 2\lambda_1\mu_1 t + \delta_1,\end{gathered} \tag{3.14}$$

где λ_1, μ_1, δ_1 – вещественные параметры, для “одетого” потенциала находим:

$$\widetilde{V} = -2\frac{\mu_1^2}{\cosh^2\theta_1} + 2(\mu_1^2 - \lambda_1^2) - 4i\lambda_1\mu_1\tanh\theta_1 - q_1. \tag{3.15}$$

Здесь требование вещественности потенциала, а также его независимости от постоянной величины (сдвиг уровня отсчета), приводит к выражению: $q_1 = 2(\mu_1^2 - \lambda_1^2) - 4i\lambda_1\mu_1\tanh\theta_1$. Отсюда получаем уравнение:

$$i\widetilde{\Psi}_t = -\widetilde{\Psi}_{xx} + \left(- \frac{2\mu_1^2}{\cosh^2\theta_1}\right)\widetilde{\Psi}. \tag{3.16}$$

Потенциал, входящий в (3.16), – хорошо известный отражающий потенциал, при $\lambda_1 = -2\mu_1^2$, являющийся односолитонным решением уравнения Кортевега-де-Фриза

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{3.17}$$

[2]Автор благодарен И. В. Комарову, обратившему внимание на это обстоятельство.

Для определения "одетой" волновой функции используем уравнение (3.6), переписанное как

$$i\omega_t+\omega_{xx}-2(\mu_1\tanh\theta_1-i\lambda_1)\omega_x+[2(\mu_1^2-\lambda_1^2)-4i\lambda_1\mu_1\tanh\theta_1]\omega=0. \quad (3.18)$$

Оно имеет решение $\omega=e^{-2i\lambda_1 x+2i(\mu_1^2-\lambda_1^2)t}$. Тогда, с учетом (3.3), решение (3.16) примет вид:

$$\widetilde{\Psi}(x,t)=\frac{e^{i(\mu_1^2-\lambda_1^2)t-i\lambda_1 x}}{\cosh(\mu_1 x+2\lambda_1\mu_1 t+\delta_1)}. \quad (3.19)$$

Для осуществления повторной процедуры "одевания" следует положить $\Psi_k=e^{\phi_k}\cosh\theta_k$, где $\phi_k=i(\mu_k^2-\lambda_k^2)t-i\lambda_k x$, $\theta_k=\mu_k x+2\lambda_k\mu_k t+\delta_k$, $k=1,2$. Принимая во внимание (3.9), будем иметь:

$$V[2]=V-2(\ln\omega(\Psi_2,\Psi_1))_{xx}-2i(\ln\omega(\Psi_2,\Psi_1))_t-q_1-q_2. \quad (3.20)$$

Поскольку наличие функции $q_2=q_2(x,t)$ обеспечивает вещественность потенциала $V[2]$, можно положить $\omega(\Psi_2,\Psi_1)=\Omega(\Psi_2,\Psi_1)$, где Ω определяется соотношением (3.2). Тогда после ряда несложных вычислений получим (для простототы взяв $(x_0,\,t_0)=(0,0)$):

$$\begin{aligned}\omega(\Psi_2,\Psi_1)=\frac{e^{\overline{\phi}_1+\phi_2}}{2}\big\{&-|c_1|\sin\varkappa_1\cosh(\theta_1+\theta_2)+|c_2|\sin\varkappa_2\cosh(\theta_2-\theta_1)\\ &+(\mu_1-\mu_2)[|c_3|\cosh(\theta_2+\theta_1+\varkappa_3)+|c_4|\cosh(\theta_2-\theta_1+\varkappa_4)]\\ &+i\big[|c_1|\cos\varkappa_1\sinh(\theta_1+\theta_2)+|c_2|\cos\varkappa_2\sinh(\theta_2-\theta_1)\\ &+(\lambda_1+\lambda_2)[|c_3|\sinh(\theta_2+\theta_1+\varkappa_3)+|c_4|\sinh(\theta_2-\theta_1+\varkappa_4)]\big]\big\},\end{aligned} \quad (3.21)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned}&c_1=\frac{1}{\mu_1+\mu_2+i(\lambda_1-\lambda_2)},\quad c_2=\frac{1}{\mu_2-\mu_1+i(\lambda_1-\lambda_2)},\\ &c_3=\frac{1}{2(\lambda_2\mu_2+\lambda_1\mu_1)+i(\mu_2^2-\mu_1^2+\lambda_1^2-\lambda_2^2)},\\ &c_4=\frac{1}{-2(\lambda_2\mu_2-\lambda_1\mu_1)+i(\mu_2^2-\mu_1^2+\lambda_1^2-\lambda_2^2)},\end{aligned} \quad (3.22)$$

и $\varkappa_i=\arg c_i$, $i=1,4$.

В случае уравнения Кортевега-де Фриза (3.17) в этих выраженях необходимо взять $\lambda_k = -2\mu_k^2$, $k = 1, 2$. Это, в свою очередь, при построении двухсолитонного решения приведет к возникновению набора связей между параметрами μ_i и δ_i.

ii) Рассмотрим нестационарное уравнение Шредингера для осциллятора с частотой, зависящей от времени:

$$i\Psi_t = -\Psi_{xx} + \frac{1}{2}\widehat{\omega}^2(t)x^2\Psi, \tag{3.23}$$

считая, что $\widehat{\omega}(t) \to \widehat{\omega}_-$ при $t \to -\infty$ и $\widehat{\omega}(t) \to \widehat{\omega}_+$ при $t \to +\infty$ [12]. Такая задача возникает, в частности, при иследовании когерентных состояний систем, представляющих интерес для квантовой оптики.

Выберем в качестве решения (3.23) функцию:

$$\Psi_1(x,t) = c_n e^{-i\widehat{\omega}_-(n+\frac{1}{2})t} e^{-\frac{\widehat{\omega}_- x^2}{4}} H_n\left(\sqrt{\frac{\widehat{\omega}_-}{2}}\,x\right), \tag{3.24}$$

отвечающую возбужденному состоянию осциллятора, где $c_n = (\widehat{\omega}_-/(2\pi))^{1/4}(\sqrt{2^n n!})^{-1}$ – нормировочная константа, $H_n(.)$ – полином Эрмита, $n = 0,\ 1, \ldots$. Полагая $V = \widehat{\omega}_-^2 x^2/4$ и $\widetilde{V} = (1/4)\,\widehat{\omega}^2(t)x^2$ и используя (3.4), находим, что

$$q_1(x,t) = \frac{1}{4}\left[\widehat{\omega}_-^2 - \widehat{\omega}^2(t)\right]x^2 - 2\widehat{\omega}_- n - 2\left(\ln H_n\left(\sqrt{\frac{\widehat{\omega}_-}{2}}\,x\right)\right)_{xx}. \tag{3.25}$$

Тогда уравнение на ω принимает вид:

$$i\omega_t + \omega_{xx} + p(x)\omega_x + \left[X(x) - \frac{\widehat{\omega}^2(t)x^2}{4}\right]\omega = 0, \tag{3.26}$$

где

$$\begin{gathered} p(x) = \frac{\widehat{\omega}_-^2 x^2}{4} - 2\left(\ln H_n\left(\sqrt{\frac{\widehat{\omega}_-}{2}}x\right)\right)_x, \\ X(x) = p_x + \frac{\widehat{\omega}_-^2 x^2}{4} - 2\widehat{\omega}_-\left(n + \frac{1}{2}\right). \end{gathered} \tag{3.27}$$

Подстановка вида $\omega(x,t) = e^{i\alpha_0(t)x^2 + g(x,t)}$, где $\alpha_0(t) = \overline{\alpha}_0(t)$, приводит это уравнение к уравнению Рикатти (оно же – другим способом –

было получено в [12]):

$$\alpha_{0t} + 4\alpha_0^2 = -\frac{\widehat{\omega}^2(t)}{4}, \quad \alpha_0(\infty) = \widehat{\omega}_+, \tag{3.28}$$

а также к уравнению на функцию $g(x,t)$, содержащему $\alpha_0(t)$:

$$ig_t + g_{xx} + g_x^2 + (4ix\alpha_0 + p)g_x + 2ix\alpha_0 p + p_x + \frac{\widehat{\omega}^2(t)}{4} - 2\widehat{\omega}_-\left(n + \frac{1}{2}\right) + 2i\alpha_0 = 0. \tag{3.29}$$

Здесь необходимо отметить, что при $n > 0$ функция $p(x)$ не является непрерывной всюду на оси (имеет бесконечные разрывы в точках, где полиномы Эрмита обращаются в нуль), а значит, функция $X(x)$, строго говоря, является обобщенной функцией, что значительно усложняет вопрос о точном решении этого уравнения. Если же $n = 0$, то оно упрощается и допускает точное решение:

$$g(x,t) = -\frac{i\widehat{\omega}_- t}{2} - \frac{\widehat{\omega}_- x^2}{4} - 2\int\limits_{-\infty}^{t} \alpha_0(\tau)d\tau. \tag{3.30}$$

В результате, это дает:

$$\widetilde{\Psi}(x,t) = \frac{1}{c_0} e^{i\alpha_0(t)x^2 - 2\int_{-\infty}^{t} \alpha_0(\tau)\,d\tau}. \tag{3.31}$$

Таким образом, мы получаем волновую функцию для квантового осциллятора с мгновенной частотой $\widehat{\omega}(t)$, при условии, что при $t = -\infty$ он находился в основном состоянии.

2. *Уравнение теплопроводности с переменным коэффициентом.*

Предполагая, что среда, в которой происходит процесс распространения тепла, неоднородна, запишем соответствующее уравнение как

$$u_t = a^2(x,t)u_{xx}, \tag{3.32}$$

где $a(x,t) > 0$ – коэффициент, отражающий подобную неоднородность.

Преобразование Мутара $u \to \widetilde{u}$, $a \to \widetilde{a}$ приводит к одевающему соотношению, имеющему мультипликативный характер:

$$\widetilde{a}^2 = a^2 \frac{u_{1xx}}{u_{1xx} + 2u_1(\ln u_1)_{xx}}, \tag{3.33}$$

где $u_1(x,t)$ – некоторое известное решение уравнения (3.32), а для функционала $\omega(u_1,u)$ в этом случае возникает уравнение, содержащее “одетый” коэффициент:

$$\omega_t - a^2\omega_{xx} + 2\widetilde{a}^2(\ln u_1)_x\omega_x = 0. \tag{3.34}$$

Взяв u_1 в виде $u_1 = e^{-\lambda_1 t}\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{a_0}}\,x\right)$, $a_0 > 0$, $\lambda_1 > 0$, отвечающем выбору $a(x,t) = a_0 = \mathrm{const}$, найдем, что

$$\widetilde{a}^2 = a_0^2\frac{\sin^2\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{a_0}}x\right)}{\sin^2\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{a_0}}x\right)+2}. \tag{3.35}$$

Решение уравнения (3.34) дает: $\omega(x,t) = e^{-\mu_1 t}\omega_1(x)$, $\mu_1 > 0$ – вещественный параметр, причем ω_1 удовлетворяет уравнению

$$\omega_{1xx} - g(x)\omega_{1x} + \frac{\mu_1}{a_0^2}\omega_1 = 0, \quad g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda_1}{a_0}}\frac{\sin\left(2\sqrt{\frac{\lambda_1}{a_0}}x\right)}{\sin^2\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{a_0}}x\right)+2}. \tag{3.36}$$

Положив еще $\omega_1(x) = e^{\int^x X(x')\,dx'}$, видно, что функция X удовлетворяет уравнению Рикатти:

$$X_x + X^2 - R_x X + \frac{\mu_1}{a_0^2} = 0, \quad R(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda_1}{a_0}}\ln\left[\sin^2\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{a_0}}x\right)+2\right]. \tag{3.37}$$

При $\mu_1 > \lambda_1$ решение $\widetilde{u}$ будет экспоненциально затухающим по времени и осциллирующим по пространству [3].

3. *Уравнение Фоккера–Планка.*

Рассмотрим следующее одномерное уравнение гиперболического типа[4]:

$$\rho_t = c_1\rho_{xx} + c_2(\rho U_x)_x, \tag{3.38}$$

[3]Заменой переменных $\omega_1(x) = \eta(\xi)$, $\xi = \int^x (1/R)\,dx$, $R(x) = e^{-\int^x g\,dx}$ из (3.36) можно устранить слагаемое с первой производной. Однако, дальнейшего интегрирования здесь выполнить пока не удается.

[4]В ряде простых случаев с помощью последовательных замен независимых и зависимой переменной это уравнение можно свести к стандартному уравнению диффузии. В контексте данной работы эти ситуации мы не рассматриваем.

где $\rho = \rho(x,t)$ – вещественнозначная функция, имеющая смысл функции распределения и удовлетворяющая условию нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x,t)\, dx = 1. \tag{3.39}$$

Входящая в (3.38) функция $U = U(x,t)$ - потенциал внешнего поля, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ – константы, причем $c_1 = k\,Tc_2$, $c_2 \sim 1/\eta_0$, где T – абсолютная температура, k – постоянная Больцмана, η_0 – коэффициент вязкости. Такая задача возникает при описании движения броуновских частиц в среде при наличии нестационарного и, вообще говоря, неоднородного внешнего поля [13] (это может быть, например, гравитационное поле, поле неоднородностей внешней среды и т.д.).

Для наших целей удобно переписать (3.38), введя функцию $V = U_x$:

$$\rho_t = c_1\rho_{xx} + c_2(\rho V)_x. \tag{3.40}$$

Положим

$$\widetilde{\rho} = \frac{\omega(\rho_1, \rho)}{\rho_1}, \tag{3.41}$$

и потребуем ковариантности уравнения (3.40) относительно преобразования $\rho \to \widetilde{\rho}$, $U \to \widetilde{U}$. Тогда для градиента “одетого” исходного поля, $\widetilde{V} \equiv \widetilde{V}(x,t)$, после некоторых вычислений получим:

$$\widetilde{V} = \rho_1 \int_{-\infty}^{x} \left[V_\xi + (\ln\rho_1)_\xi V - \frac{2}{c_2}(\ln\rho_1)_t + \frac{2}{c_2}(\ln\rho_1)_{\xi\xi}\right]\frac{1}{\rho_1} d\xi + F_1(t), \tag{3.42}$$

где F_1 – произвольная функции времени, а несобственный интеграл предполагается сходящимся. Соответствующее уравнение для ω сводится к такому:

$$\omega_t = c_1\omega_{xx} + \left[c_2\widetilde{V} - 2c_1(\ln\rho_1)_x\right]\omega_x, \tag{3.43}$$

т.е. содержит новый потенциал.

Для иллюстрации изложенного рассмотрим простую модель, когда $V = 0$, т.е. поле U постоянно. Уравнение (3.40) перейдет в стандартное уравнение диффузии $\rho_t = c_1\rho_{xx}$, которое, в частности, имеет решения, удовлетворяющие условию (3.39) на некотором конечном интервале

$[0, L] : \rho(x,t) = \alpha x + \beta$, $\rho_1(x,t) = \alpha_1 x + \beta_1$, где $\alpha = 1/(2L^2)$, $\beta = 3/(4L)$, $\alpha_1 = 1/L^2$, $\beta_1 = 1/(2L)$. Вычисления по формуле (3.42) позволяют переписать (3.43) как ($\gamma_1 = -2(\alpha_1^2/c_2)\ln\frac{\alpha_1 L+\beta_1}{\beta_1}$, $F(t)$ – произвольная функция)

$$\omega_t = c_1\omega_{xx} + [c_2\gamma_1(\alpha_1 x + \beta_1) - 2c_1\frac{\alpha_1}{\alpha_1 x + \beta_1} + c_1 F(t)]\omega_x. \tag{3.44}$$

При $F(t) = 0$ переменные в этом уравнении разделяются, и его частное решение есть

$$\omega(x,t) = e^{\alpha_1 c_2 \gamma_1 t - \frac{c_2\gamma_1}{2c_1\alpha_1}(\alpha_1 x + \beta_1)^2}. \tag{3.45}$$

Поскольку $\gamma_1 < 0$, а все остальные параметры, входящие в это решение, положительны, оно убывает по времени и растет по пространственной переменной, что справедливо лишь на конечном интервале.

В следующих двух примерах рассматривается уравнение, принадлежащее широкому классу уравнений вида:

$$\Psi_{pq} = V(p,q)\Psi, \tag{3.46}$$

где $V = V(p,q)$ – заданная, вообще говоря, комплекснозначная функция. Такие уравнения представляют интерес как для широкого круга моделей физики, так и для ряда задач дифференциальной геометрии.

4. *Волновое уравнение.*

Отметим, что в простейшем частном случае, полагая в (3.46) $p = x$, $q = y$, $x,\ y \in \mathbb{R}$, $V(x,y) \equiv 1$, получим уравнение, принадлежащее к классу гиперболических уравнений, и имеющее общее решение

$$\Psi(x,y) = \int\limits_0^x f_1(s)J_0(2i\sqrt{y(x-s)}\,)\,ds + \int\limits_0^y f_2(s)J_0(2i\sqrt{x(y-s)}\,)\,ds$$
$$+[f_1(0) + f_2(0)]J_0(2i\sqrt{xy}\,), \tag{3.47}$$

где $J_0(.)$ – функция Бесселя, а f_1, f_2 – произвольные дифференцируемые функции.

В несколько более сложном случае $p = x + t$, $q = x - t$, уравнение (3.46) перепишется как

$$\Psi_{tt} - \Psi_{xx} = V(x,t)\Psi. \tag{3.48}$$

Оно описывает распространение волн в неоднородной среде. В частности, при $V(x,t) = -1$ оно является линеаризованным вариантом вполне интегрируемого уравнения sin-Гордон и сводится к уравнению Клейна–Гордона.

Пусть в (3.48) $V(x,t) = 1$. Применим к этому уравнению преобразование Мутара, взяв в качестве Ψ_1 простейшее решение: $\Psi_1(x,t) = \cosh \mu_1 t \cosh \nu_1 x$, где μ_1, $\nu_1 \in \mathbb{R}$ – константы, причем $\mu_1^2 - \nu_1^2 = 1$. Проверка ковариатности относительно преобразования $\Psi \to \Psi[1]$, $V \to V[1]$ приводит к одевающему соотношению (“одеванию единицы”):

$$V[1] = V - 2(\ln \Psi_1)_{tt} + 2(\ln \Psi_1)_{xx} = 1 - \frac{2\mu_1^2}{\cosh^2 \mu_1 t} + \frac{2\nu_1^2}{\cosh^2 \nu_1 x}, \quad (3.49)$$

т.е. уже на первом шаге получаем “потенциал” с неразделенными переменными. Уравнение на функционал $\omega = \omega(\Psi_1, \Psi)$ будет иметь вид

$$\omega_{tt} - \omega_{xx} - 2\mu_1 \tanh(\mu_1 t)\omega_t + 2\nu_1 \tanh(\nu_1 x)\omega_x = 0. \quad (3.50)$$

Заметим, что, как это следует из (3.48), криволинейный интеграл

$$\Omega(\Psi_1, \Psi) = \int_{(x_0,t_0)}^{(x,t)} (\Psi_t \Psi_1 - \Psi_{1t}\Psi)dx + (\Psi_1 \Psi_x - \Psi_{1x}\Psi)\, dt \quad (3.51)$$

не зависит от пути на плоскости переменных x и t, и функция $\omega(x,t) = \Omega$ будет точным решением уравнения (3.50). Выбирая $\Psi(x,t)$ в виде $\Psi = \cosh \mu t \cosh \nu x$, где μ, $\nu \in \mathbb{R}$ – параметры, $\mu^2 - \nu^2 = 1$, и вычисляя интеграл (3.51), находим:

$$\Psi[1] = \frac{1}{2\cosh \mu_1 t \cosh \nu_1 x} \Big\{ (\mu \sinh \mu t \cosh \mu_1 t - \mu_1 \sinh \mu_1 t \cosh \mu t)$$
$$\left[\frac{\sinh(\nu + \nu_1)x - \sinh(\nu + \nu_1)x_0}{\nu + \nu_1} + \frac{\sinh(\nu - \nu_1)x - \sinh(\nu - \nu_1)x_0}{\nu - \nu_1} \right]$$
$$+ (\nu \cosh \nu_1 x \sinh \nu x - \nu_1 \sinh \nu_1 x \cosh \nu x) \left[\frac{\sinh(\mu + \mu_1)t - \sinh(\mu + \mu_1)t_0}{\mu + \mu_1} \right.$$
$$\left. + \frac{\sinh(\mu_1 - \mu)t - \sinh(\mu_1 - \mu_1)t_0}{\mu_1 - \mu} \right] \Big\}. \quad (3.52)$$

5. *Уравнение Гельгольца.*

При $p = z = x + iy$, $q = \overline{p}$, из (3.46) получаем двумерное уравнение Гельмгольца:

$$\triangle\Psi = V(x,y)\Psi. \tag{3.53}$$

Мы также будем использовать его в комплексной форме

$$\Psi_{z\overline{z}} = \frac{1}{4}V(z,\overline{z})\Psi, \tag{3.54}$$

где $\partial_z = (1/2)(\partial_x - i\partial_y)$, $\partial_{\overline{z}} = (1/2)(\partial_x + i\partial_y)$.

Уравнение (3.53) возникает в квантовой механике (стационарное двумерное уравнение Шредингера), теории дифракции электромагнитных волн, акустической дифракции и ряде других задач. С точки зрения нелинейных уравнений интерес к (3.53) обусловлен его ролью как части ассоциированной линейной системы для известного нелинейного вполне интегрируемого уравнения Веселова–Новикова [14]; кроме того, (3.53) представляет собой линеаризованную версию эллиптического уравнения sin-Гордон [15].

Прямым вычислением нетрудно показать, что если $\Phi = \Phi(z,\,\overline{z})$, $\chi = \chi(z,\,\overline{z})$ – два решения уравнения (3.54), то имеют место два важных соотношения:

$$(\Phi_z\chi)_{\overline{z}} = (\Phi_{\overline{z}}\chi)_z, \quad (\Phi_z\chi - \Phi\chi_z)_{\overline{z}} = (\Phi\chi_{\overline{z}} - \Phi_{\overline{z}}\chi)_z, \tag{3.55}$$

причем первое из них справедливо только либо в случае когда $\Phi_{\overline{z}} = \chi_{\overline{z}} = 0$, т.е. если эти функции аналитические в заданной области, либо когда $\Phi_z = \chi_z = 0$, т.е. эти функции антианалитичны. Из второго следует, в частности, что интеграл

$$\Omega(\Phi,\,\chi) = \int\limits_{(z_0,\,\overline{z}_0)}^{(z,\,\overline{z})} (\Phi_z\chi - \chi_z\Phi)\,dz + (\chi_{\overline{z}}\Phi - \chi\Phi_{\overline{z}})\,d\overline{z} \tag{3.56}$$

не зависит от пути интегрирования.

Перейдем к анализу уравнения (3.54) с точки зрения преобразования Мутара. Пусть Ψ, Ψ_1 – два линейно независимых решения (3.54). Положим

$$\widetilde{\Psi}(z,\overline{z}) = \frac{\omega(\Psi_1,\Psi)}{\Psi_1}. \tag{3.57}$$

Подставляя этот анзатц в (3.54), и требуя ковариантности этого уравнения относительно преобразования $\Psi \to \widetilde{\Psi}$, $U \to \widetilde{U}$, получим уравнение, уже не содержащее потенциал:

$$\omega_{z\overline{z}} - (\ln \Psi_1)_{\overline{z}}\omega_z - (\ln \Psi_1)_z \omega_{\overline{z}} + q_1\omega = 0. \tag{3.58}$$

Здесь $q_1 = q_1(z, \overline{z})$ – комплекснозначная функция ("параметр" разделения переменных), введенная, как и для уравнения Шредингера (3.1), с целью получения вещественного потенциала $\widetilde{V}(z, \overline{z})$, в случае, если $V(z, \overline{z}) = \overline{V}(z, \overline{z})$ (консервативная среда). Если $V(z, \overline{z}) \neq \overline{V}(z, \overline{z})$ и $\widetilde{V}(z, \overline{z}) \neq \overline{\widetilde{V}}(z, \overline{z})$ (неконсервативная среда), то в (3.58) полагаем $q_1 = 0$.

Так же, как и (3.6), уравнение (3.58) допускает физическую интерпретацию: оно имеет вид двумерного стационарного уравнения Шредингера для заряженной частицы в неоднородном стационарном электромагнитном поле. Действительно, это уравнение можно записать в виде (см. например, [11]):

$$\triangle\Psi - 2i(\mathbf{A}\nabla\Psi) - (\mathbf{A}^2 + \phi - E)\Psi = 0, \tag{3.59}$$

где $\mathbf{A}(x,\ y) = (A_1,\ A_2)$ – вектор-потенциал, подчиненный условию калибровки $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$, $\phi = \phi(x, y)$ – скалярный потенциал, E – уровень энергии, и мы, как и ранее, использовали систему единиц, в которой $\hbar = c = e = 1$, $m = 1/2$, где m – масса частицы. В переменных z, $\overline{z}$ отсюда следует:

$$\Psi_{z\overline{z}} - \frac{1}{4}(iA_1 - A_2)\Psi_z - \frac{1}{4}(iA_1 + A_2)\Psi_{\overline{z}} - \frac{1}{4}[\mathbf{A}^2 + \phi - E]\Psi = 0. \tag{3.60}$$

Сравнивая (3.58) и (3.60), мы видим, что аналоги коэффициентов при ω_z, $\omega_{\overline{z}}$ выражаются в виде линейных комбинаций компонент вектор-потенциала, а аналог функции q_1 – через квадрат его модуля, а также скалярный потенциал.

Кроме того, после разделения переменных мы также получаем одевающее соотношение для потенциала (волнового числа):

$$\widetilde{V}(z, \overline{z}) = V(z, \overline{z}) - 8(\ln \Psi_1)_{z\overline{z}} - 4q_1(z, \overline{z}). \tag{3.61}$$

В консервативном случае требование вещественности ($V = \overline{V}$, $\widetilde{V} = \overline{\widetilde{V}}$) приводит к условию:

$$2(\arg \Psi_1)_{z\overline{z}} = -\operatorname{Im} q_1. \tag{3.62}$$

При двукратном одевании, полагая

$$\tilde{\tilde{\Psi}}(z,\ \overline{z}) = \frac{\omega(\Psi_2[1],\quad \Psi[1])}{\Psi_2[1]}, \tag{3.63}$$

и, принимая во внимание, (3.61), находим:

$$\tilde{\tilde{V}}(z,\ \overline{z}) = V - 8(\ln\omega(\Psi_1,\ \Psi_2))_{z\,\overline{z}} - 4(q_1+q_2), \tag{3.64}$$

где $\Psi_2[1]$ – фиксированное решение уравнения (3.54) при $\Psi \to \Psi[1]$, $V \to V = V[1]$, причем $\Psi_2[1] = \omega(\Psi_2,\ \Psi_1)/\Psi_1$, Ψ_2 – некоторое фиксированное решение уравнения (3.54).

Ясно, что как и в случае стандартного преобразования Дарбу, а также уже рассмотренных выше примеров, эта процедура одевания может быть многократно повторена. В частности, при ее N-кратном повторении будем иметь соотношения, выраженные только в терминах функций $\omega(\Psi_i,\ \Psi_j)$, $i > j$ [1].

Приведем еще уравнение для $\omega(\Psi_1, \Psi)$, возникающее при анализе уравнения Гельмгольца в форме (3.53):

$$\triangle\omega - 2(\ln\Psi_1)_x\omega_x - 2(\ln\Psi_1)_y\omega_y + q_1\omega = 0. \tag{3.65}$$

Соответственно, одевающее соотношение имеет вид:

$$V[1] = V - 2(\ln\Psi_1)_{xx} - 2(\ln\Psi_1)_{yy} - q_1. \tag{3.66}$$

Рассмотрим несколько простейших случаев реализации данного подхода.

i) Пусть в (3.54) $V(z,\overline{z}) = 0$. Тогда $\Psi_j(z,\overline{z}) = \Psi_j^{(1)}(z) + \Psi_j^{(2)}(\overline{z})$, $\Psi_j^{(1)}$, $\Psi_j^{(2)}$ – произвольные функции, $j = 1,\ 2, \ldots, N, \ldots$. Соотношение (3.61) дает:

$$V[1] = -8\left[\ln\left(\Psi_1^{(1)}(z) + \Psi_1^{(2)}(\overline{z})\right)\right]_{z\overline{z}} - 4q_1. \tag{3.67}$$

В случае $V[1] = \overline{V}[1]$ должно выполняться условие

$$\operatorname{Im} q_1 = i\left[\frac{\Psi_{1z}^{(1)}\Psi_{1\overline{z}}^{(2)}}{(\Psi_1^{(1)} + \Psi_1^{(2)})^2} - \frac{\overline{\Psi}_{1z}^{(1)}\overline{\Psi}_{1\overline{z}}^{(2)}}{(\overline{\Psi}_1^{(1)} + \overline{\Psi}_1^{(2)})^2}\right]. \tag{3.68}$$

На следующем шаге имеем:

$$V[2] = V - 8(\ln\omega(\Psi_2,\ \Psi_1))_{z\overline{z}} - 4(q_1+q_2), \tag{3.69}$$

а функционал $\omega(\Psi_2,\, \Psi_1)$ удовлетворяет уравнению (3.58), если в нем произвести замены $\Psi \to \Psi_1$, $\Psi_1 \to \Psi_2$, $q_1 \to q_2$. Нетрудно проверить, что при $q_1 = q_2 = 0$ решением этого уравнения является функция $\omega(\Psi_2,\, \Psi_1) = \Omega(\Psi_2,\, \Psi_1)$, где выражение для $\Omega(\Psi_2,\, \Psi_1)$ определено в (3.56). После простых вычислений получим:

$$\omega(\Psi_2,\, \Psi_1) = 2\left[\Psi_1^{(2)}(\overline{z})\Psi_2^{(1)}(z) - \Psi_1^{(1)}(z)\Psi_2^{(2)}(\overline{z})\right]$$

$$+ \int\limits_{(z_0,\,\overline{z}_0)}^{(z,\,\overline{z})} \left(\Psi_{2z}^{(1)}\Psi_1^{(1)} - \Psi_2^{(1)}\Psi_{1z}^{(1)}\right) dz + \left(\Psi_{1\overline{z}}^{(2)}\Psi_2^{(2)} - \Psi_1^{(2)}\Psi_{2\overline{z}}^{(2)}\right) d\overline{z} \qquad (3.70)$$

$$+\Psi_2^{(2)}(\overline{z})\Psi_1^{(1)}(z_0) - \Psi_1^{(2)}(\overline{z})\Psi_2^{(1)}(z_0) + \Psi_1^{(1)}(z)\Psi_2^{(2)}(\overline{z}_0) - \Psi_2^{(1)}(z)\Psi_1^{(2)}(\overline{z}_0),$$

где z_0 – фиксированная точка на комплексной плоскости. Эта формула уточняет выражение, впервые полученное в [1] (без привлечения (3.58)).

ii) Положим в (3.53) $V = V(x,y) = 1$ при $-\infty < x < +\infty$, $y \geq 0$. Применяя преобразование Фурье по переменной x, построим ограниченное по x и стремящееся к нулю при $y \to \infty$ решение Ψ_j $(j = 1, 2, \ldots, N, \ldots)$:

$$\Psi_j(x,\, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{ikx - \sqrt{k^2+1}y} A_j(k), \qquad (3.71)$$

где $A_j(k)$ – произвольные функции (функциональные параметры), удовлетворяющие условию $A_j(k) \in \mathbb{L}^2(-\infty, +\infty)$. Ограничившись вещественным случаем, из (3.71) имеем требование: $A_j(k) = \overline{A}_j(-k)$ (в случае комплексного k мы предполагаем, что $\mathrm{Re}\,\sqrt{k^2+1} > 0$). Тогда

$$V[1] = 1 - 2\triangle \ln \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{ikx - \sqrt{k^2+1}y} A_1(k) \right\}. \qquad (3.72)$$

Аналог второго из соотношений (3.55) дает:

$$(\Phi_x \chi - \Phi \chi_x)_x = (\Phi \chi_y - \Phi_y \chi)_y. \qquad (3.73)$$

Поэтому решение $\Psi[1]$ определяется соотношением (3.57) при $\omega(\Psi_1, \Psi) = \Omega(\Psi_1,\, \Psi)$, где $(y_0 \geq 0)$

$$\Omega(\Psi_1, \Psi) = \int_{(x_0,\, y_0)}^{(x,y)} (\Psi_{1y}\Psi - \Psi_1\Psi_y)\, dx + (\Psi_x\Psi_1 - \Psi_{1x}\Psi)\, dy. \tag{3.74}$$

В простейшем частном случае, положив $A_j(k) = c_j\delta(k - p_j)$, где $\delta(.)$ – дельта-функция Дирака, $c_j,\, p_j \in \mathbb{R}$ – константы, $j = 1, 2, \ldots, N, \ldots$ и, в силу линейности уравнения (3.53), взяв вещественную часть решения Ψ_j, будем иметь ($c,\ p \in \mathbb{R}$ – константы):

$$\Psi_j(x,\, y) = c_j e^{-\sqrt{p_j^2+1}y} \cos p_j x, \quad \Psi(x,\, y) = ce^{-\sqrt{p^2+1}y} \cos px. \tag{3.75}$$

Таким образом, одевающую формулу (3.72) можно переписать как

$$V[1] = 1 - 2\triangle \ln(\omega(\Psi_1, \Psi)), \tag{3.76}$$

где $((x_0, y_0) = (0, 0), \quad l = \sqrt{p^2 + 1}, \quad l_1 = \sqrt{p_1^2 + 1})$

$$\omega(\Psi_1,\ \Psi) = \frac{c_1 c_2 (l - l_1)}{2} e^{-(l+l_1)y} \left[\frac{\sin(p_1 - p)x}{p_1 - p} + \frac{\sin(p_1 + p)x}{p_1 + p}\right]$$

$$-c_1 c(p_1 - p)\frac{e^{-(l+l_1)y}}{l + l_1} \sin(p_1 - p)x, \tag{3.77}$$

а выражение для $\Psi[1]$ примет вид:

$$\Psi[1] = \frac{\omega(\Psi_1, \Psi)e^{l_1 y}}{c_1 \cos p_1 x}. \tag{3.78}$$

На следующем шаге получим:

$$V[2] = 1 - 2\triangle\, (\ln \Omega(\Psi_2,\ \Psi_1)). \tag{3.79}$$

Совершенно аналогично (3.76), используя (3.70), (3.74) можно написать явное представление и для $V[2]$.

iii) Рассмотрим случай, когда затравочное решение определяется кулоновским потенциалом, т.е. в (3.53) положим

$$V(x,\ y) = (\sqrt{x^2 + y^2}\,)^{-1}, \quad x \in (-\infty,\ \infty), \quad y \in (-\infty,\ \infty).$$

Решая это уравнение в полярных координатах, а затем возвращаясь к декартовым и требуя конечности решения при $x = y = 0$, а также его периодичности при обходе вокруг этой точки, будем иметь [16]:

$$\Psi_1(x,y) \sim e^{im_1 \arctan \frac{y}{x}} J_{2i\sqrt{m_1}}\Big(2i(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}\Big),$$
$$m_1 = 1, \quad 2, \dots, N, \dots, \tag{3.80}$$

где $J_\nu(.)$ – функция Бесселя. Выбирая потенциал вещественным, в силу линейности задачи, находим:

$$V[1] = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2\mathrm{Re}\big\{\big[\triangle \ln \big[e^{im_1 \arctan \frac{y}{x}} J_{2i\sqrt{m_1}}(2i(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}\big]\big]\big\}. \tag{3.81}$$

Отсюда видно, что уже на первом шаге мы получаем потенциал с неразделенными переменными, и, следовательно, вся дальнейшая цепочка из функций $\Psi[m]$, $V[m]$ будет также состоять из функций с неразделенными переменными.

Потенциалы вида (3.76) и (3.81), и дальнейшие за ними по соответствующим цепочкам, являются "интегрируемыми" (в том смысле, что порождаемые ими уравнения имеют точные решения).

В двух следующих примерах мы рассматриваем случай $q_1 \neq 0$, при котором уравнение (3.58) допускает простейшие решения.

iv) Пусть $\omega_z = 0$, т.е. ω – антианалитическая функция в некоторой области $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$. Из (3.58) тогда имеем:

$$(\ln\omega)_{\overline{z}} = \frac{q_1}{(\ln\Psi_1)_z} \quad \text{при условии, что} \quad \left(\frac{q_1}{(\ln\Psi_1)_z}\right)_z = 0. \tag{3.82}$$

Для решения этого уравнения используем формулу Грина–Коши (см. например, [17]). Предполагая, что

$$\omega_{|\partial\mathbb{D}} = C_0, \tag{3.83}$$

где C_0 – некоторая комплексная постоянная, получим:

$$\ln\omega(\overline{z}) = C_0 + \frac{1}{2\pi i}\int\!\!\int\limits_{\mathbb{D}} \frac{q_1}{(\ln\Psi_1)_\zeta(\zeta - z)}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta}. \tag{3.84}$$

Здесь $\zeta = \zeta_R + i\zeta_I$, $d\zeta \wedge d\overline{\zeta} = -2i d\zeta_R\, d\zeta_I$. Заметим, также, что для проверки справедливости этого выражения необходимо воспользоваться известным соотношением теории обобщенных функций ($\overline{\partial} \equiv \partial_{\overline{z}}$):

$$\overline{\partial}\left(\frac{1}{\pi(z-z_0)}\right) = \delta(z-z_0). \tag{3.85}$$

v) Аналогично, пусть $\omega_{\overline{z}} = 0$, т.е. ω – аналитическая функция в $\mathbb{D} \in \mathbb{C}$. Из (3.58) находим:

$$(\ln\omega)_z = \frac{q_1}{(\ln\Psi_1)_{\overline{z}}} \quad \text{при условии, что} \quad \left(\frac{q_1}{(\ln\Psi_1)_{\overline{z}}}\right)_{\overline{z}} = 0. \tag{3.86}$$

Предполагая, что

$$\omega_{|\partial\mathbb{D}} = C_1, \tag{3.87}$$

где C_1 – комплексная постоянная, из (3.86) имеем

$$\ln\omega(z) = C_1 + \frac{1}{2\pi i}\int\!\!\int\limits_{\mathbb{D}} \frac{q_1}{(\ln\Psi_1)_{\overline{\zeta}}(\overline{\zeta}-\overline{z})}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta}. \tag{3.88}$$

Покажем, что в простейших случаях уравнение (3.58) можно также привести к уравнению Гельмгольца. Для этого сделаем замену переменных, положив $\zeta = \zeta(z,\overline{z})$, $\overline{\zeta} = \overline{\zeta}(z,\overline{z})$, причем выберем функции $\zeta, \overline{\zeta}$ так, что они удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{gathered} \zeta_{z\overline{z}} - \zeta_z(\ln\Psi_1)_{\overline{z}} - \zeta_{\overline{z}}(\ln\Psi_1)_z = 0, \\ \overline{\zeta}_{z\overline{z}} - \overline{\zeta}_z(\ln\Psi_1)_{\overline{z}} - \overline{\zeta}_{\overline{z}}(\ln\Psi_1)_z = 0. \end{gathered} \tag{3.89}$$

Эти уравнения будут совместны, если

$$\zeta_z(\arg\Psi_1)_{\overline{z}} = -\zeta_{\overline{z}}(\arg\Psi_1)_z,$$

или

$$\zeta_x(\arg\Psi_1)_x + \zeta_y(\arg\Psi_1)_y = 0. \tag{3.90}$$

Одна из возможных ситуаций интегрируемости этого уравнения возникает, если выполнены соотношения

$$(\arg\Psi_1)_x = f_y(x,y), \quad (\arg\Psi_1)_y = -f_x(x,y), \tag{3.91}$$

причем функция f удовлетворяет уравнению Лапласа: $4\triangle f = f_{z\overline{z}} = 0$.

Тогда из (3.58) получаем

$$\omega_{\zeta\zeta}\zeta_{\overline{z}}\zeta_z + \omega_{\zeta\overline{\zeta}}(\overline{\zeta}_{\overline{z}}\zeta_z + \zeta_{\overline{z}}\overline{\zeta}_z) + \omega_{\overline{\zeta}\overline{\zeta}}\overline{\zeta}_{\overline{z}}\overline{\zeta}_z + q_1\omega = 0. \tag{3.92}$$

Очевидно, что если либо $\zeta_{\overline{z}} = 0$, либо $\zeta_z = 0$, мы будем иметь уравнение Гельмгольца вида:

$$\omega_{\zeta\overline{\zeta}} = -\widehat{q}_1\omega, \tag{3.93}$$

где $\widehat{q}_1 = q_1/(\overline{\zeta}_{\overline{z}}\,\zeta_z)$, или $\widehat{q}_1 = q_1/(\zeta_{\overline{\zeta}}\,\overline{\zeta}_z)$, соответственно.

Выясним теперь квантовомеханический смысл преобразования (3.57). Для этого рассмотрим несколько более общее, чем (3.54) уравнение:

$$\Psi_{z\overline{z}} = \frac{1}{4}(V(z,\overline{z}) - \lambda)\Psi, \tag{3.94}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ - комплексный параметр. Для него также можно использовать преобразование (3.54) и одевающее соотношение (3.61). Положим $V(z,\overline{z}) = z\overline{z}$, что соответствует двумерному изотропному гармоническому осциллятору. Тогда уравнение (3.94) перепишется как

$$-4\Psi_{z\,\overline{z}}(z,\,\overline{z},\,\lambda) + z\overline{z}\Psi(z,\,\overline{z},\,\lambda) = \lambda\Psi(z,\,\overline{z},\,\lambda). \tag{3.95}$$

При $\lambda = \lambda_1 = -2$ оно имеет решение $\Psi_1(z,\,\overline{z}) = \exp(\frac{1}{2}z\overline{z})$, причем, согласно (3.61), $\widetilde{V}(z,\,\overline{z}) = z\overline{z} - 4 - 4q_1$, и мы получаем уравнение

$$-4\Psi_{z\overline{z}}[1](z,\,\overline{z},\,\lambda) + (z\overline{z} - 4q_1)\Psi[1](z,\,\overline{z},\,\lambda) = (\lambda + 4)\Psi[1](z,\,\overline{z},\,\lambda). \tag{3.96}$$

Сравнивая (3.94) и (3.96) при $q_1 = 0$, находим:

$$\Psi[1](z,\,\overline{z},\,\lambda) = \Psi(z,\,\overline{z},\,\lambda + 4), \tag{3.97}$$

т.е. преобразование (3.57) в совокупности с требованием ковариантности действует как оператор рождения частиц[5], а величина $-4q_1$ имеет смысл сдвига уровня отсчета потенциала (в комплексном случае). В этом отношении мы имеем двумерное обобщение действия стандартного преобразования Дарбу [1].

Уравнение для функционала ω здесь следует из (3.65):

$$\omega_{xx} + \omega_{yy} - 2x\,\omega_x - 2y\,\omega_y + q_1\omega = 0. \tag{3.98}$$

[5]Соответственно при $\lambda = \lambda_1 = +2$, $\Psi_1 = \exp\left(-\frac{1}{2}z\overline{z}\right)$, мы получим оператор уничтожения.

Это уравнение, которое можно назвать обобщенным уравнением Гельмгольца, известно в математической литературе [18]. Оно возникает при рассмотрении ортогональных по двум независимым переменным полиномов, и при $q_1 = 2(n+m)$ имеет решение

$$\omega(x,\,y) = \mathcal{F}_{n+m,m}(x,\,y) = H_n(x)H_m(y), \tag{3.99}$$

где $H_n(.)$ – полиномы Эрмита, $m,\,n = 0,\,1,\ldots$. При этом выполняется обобщенное условие ортогональности:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x,\,y)\mathcal{F}_{nm}(x,\,y)\mathcal{F}_{ks}(x,\,y)\,dx\,dy = \delta_{n-m,k-s}\,\delta_{ms}, \tag{3.100}$$

где $h(x,\,y) = \exp\{-(x^2+y^2)\}$ – весовая функция, а δ_{ij} – символ Кронекера.

При $q_1 = 0$ решение уравнения (3.98) факторизуется. Полагая $\omega(x,\,y) = \omega_1(x)\,\omega_2(y)$, будем иметь:

$$\omega_{1xx} - 2x\omega_{1x} - \beta\omega_1 = 0, \quad \omega_{2yy} - 2y\omega_{2y} + \beta\omega_2 = 0, \tag{3.101}$$

где β – “параметр разделения переменных”. При $\beta = 2n$, где $n = 1,\,2,\ldots$, второе из этих уравнений имеет решение в виде полинома Эрмита: $\omega_2(y) = H_n(y)$. Взяв $\omega_1(x) \equiv \mathcal{P}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, из первого из уравнений (3.101) найдем реккурентное соотношение:

$$a_{k+2} = \frac{2(k+n)}{(k+2)(k+1)}a_k, \tag{3.102}$$

причем числа a_0, a_1 остаются произвольными, а степенной ряд для функции $\mathcal{P}(x)$ сходится равномерно на конечном промежутке.

Таким образом, при однократном одевании решением уравнения (3.94) является функция

$$\widetilde{\Psi}(x,\,y) = \Psi[1](x,\,y) = c_n e^{x^2+y^2}\mathcal{P}(x)H_n(y), \tag{3.103}$$

где c_n – константа. Заметим, кроме того, что как и в одномерном случае (одномерного стационарного уравнения Шредингера), состояния, описываемые соотношением (3.103), ненормируемы.

Автор выражает глубокую благодарность П. П. Кулишу за поддержку.

Литература

1. V. B. Matveev, M. A. Salle, *Darboux Transformation and Solitons.* Springer Series Nonlinear Dynamics (1991).
2. C. Rogers, W. F. Shadwick, *Båklund Transformation and Their Applications.* Academica, New York (1982).
3. S. B. Leble, E. V. Doktorov, *A Dressing Method in Mathematical Physics.* — Mathematical Physics Studies, vol. 28. Springer-Verlag (2007).
4. C. Atorne, J. J. C. Nimmo, — *Inverse Problems* **28**, 7 (1991), 808.
5. E. I. Ganzha, `arXiv: solv-int/96001` (1996).
6. Е. И. Ганжа, — *Сиб. мат. ж.* **42** (2000), 541.
7. I. Taimanov, S. Tsarev, — In: *Proceeding of the* 16*th OCU Int. Acad. Symp.* (2008), *OC Ami Studies.* **3** (2009).
8. I. Taimanov, S. Tsarev, `arXiv: 0906.514v1 [math-ph]` (2009); — *Современная математика. Фундаментальные направления* **35** (2010), 101.
9. E. Sh. Gutshabash, — In: *Proceedings Day on Diffraction*-2003. St.Petersburg, (June–2003).
10. E. Sh. Gutshabash, M. A. Salle, — In: *Proceedings Day on Diffraction*-99. St.Petersburg (May–2001).
11. А. Мессиа, *Квантовая механика.* Т. 1, Наука, М., 1978.
12. K. Husimi, *Progr. Theor. Phys.* **9** (1953), 381.
13. И. А. Квасников, *Термодинамика и статистическая физика. Теория неравновесных систем.* Изд-во МГУ, М., 1987.
14. С. П. Новиков, А. П. Веселов, — *ДАН СССР* **279** (1), (1984).
15. Е. Ш. Гутшабаш, В. Д. Липовский, — *Зап. научн. семин. ЛОМИ* **180** (1990), 53.
16. Е. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* ГИФМЛ, М., 1961.
17. И. Н. Векуа, *Обобщенные аналитические функции.* Наука, М., 1988.
18. П. К. Суэтин, *Ортогональные многочлены по двум переменным.* Наука, М., 1988.

Gutshabash E. Sh. Moutard transformation and its application to some physical problems. I. The case of two independent variables.

A general scheme of application of Moutard transformation to the partial differential of the second order with two independent variables is proposed. The realization of this scheme is given for the nonstationary Shrödinger equation and Fokker–Planck equation as well as wave equation and Helmholts equation.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
Санкт-Петербург 198504, Россия
E-mail: `gutshab@EG2097.spb.edu`

Поступило 15 декабря 2011 г.