Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 398, 2012 г.

А. Г. Быцко, И. Ю. Давыденкова

К ВОПРОСУ О КВАНТОВОМ L-ОПЕРАТОРЕ ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ ТОДА НА РЕШЕТКЕ

1. Введение

1.1. Непрерывная классическая модель. В классической (1+1)-мерной модели Тода для аффинной алгебры $A^{(1)}_{N-1}$ динамика скалярных полей ϕ_a, $a = 1, \dots, N$, ассоциированных с узлами диаграммы Дынкина, задается следующими уравнениями движения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\phi_a = \frac{2m^2}{\beta}\left(e^{2\beta(\phi_{a+1}-\phi_a)} - e^{2\beta(\phi_a-\phi_{a-1})}\right). \tag{1}$$

Здесь и далее индекс, нумерующий узлы аффинной диаграммы Дынкина, считается периодическим с периодом N. В частности, $\phi_{N+a} \equiv \phi_a$. Уравнения движения (1) порождаются следующим гамильтонианом и пуассоновой структурой:

$$H = \sum_{a=1}^{N}\int dx\left(\frac{1}{2}\pi_a^2 + \frac{1}{2}\big(\partial_x\phi_a\big)^2 + \frac{m^2}{\beta^2}\,e^{2\beta(\phi_{a+1}-\phi_a)}\right), \tag{2}$$

$$\{\pi_a(x), \phi_b(y)\} = \delta_{ab}\,\delta(x-y)\,. \tag{3}$$

Рассматриваемая модель интегрируема. Она допускает представление нулевой кривизны с U–V парой вида [1, 2]

$$U(\lambda) = \sum_{a=1}^{N}\beta\,\pi_a\,e_{aa} + m\sum_{a=1}^{N}e^{\beta(\phi_{a+1}-\phi_a)}\big(\lambda^{\delta_{a,N}}\,e_{a,a+1} + \lambda^{-\delta_{a,N}}\,e_{a+1,a}\big), \tag{4}$$

$$V(\lambda) = \sum_{a=1}^{N}\beta\,\partial_x\phi_a\,e_{aa} + m\sum_{a=1}^{N}e^{\beta(\phi_{a+1}-\phi_a)}\big(\lambda^{\delta_{a,N}}\,e_{a,a+1} - \lambda^{-\delta_{a,N}}\,e_{a+1,a}\big), \tag{5}$$

где e_{ab} обозначают базисные матрицы, такие что $(e_{ab})_{ij} = \delta_{ai}\delta_{bj}$.

Ключевые слова: квантовая модель Тода на решетке, R-матрица, L-оператор.

Данная работа была частично поддержана грантами РФФИ 09-01-93108, 11-01-00570 и 11-01-12037 и грантами 200020-126909 и PDFMP2-137071 Швейцарского Национального Научного Фонда.

Матрица U удовлетворяет следующему соотношению (называемому фундаментальной скобкой Пуассона, см. [3]):

$$\{U_1(\lambda), U_2(\mu)\} = \left[r\left(\frac{\lambda}{\mu}\right), U_1(\lambda) + U_2(\mu)\right], \tag{6}$$

где $r(\lambda)$ – классическая тригонометрическая r-матрица для алгебры A_{N-1}, см. [3–5]. Здесь и далее нижние индексы соответствуют тензорной компоненте, например, $U_1 = U \otimes \mathbb{I}$.

1.2. Квантовая решеточная модель. Известно, что непосредственное квантование непрерывной теории поля со взаимодействием приводит к проблемам с ультрафиолетовыми расходимостями. Одним из возможных способов обхода данной трудности является переход к решеточному аналогу модели. В такой модели канонические переменные, относящиеся к разным узлам решетки, коммутируют, а для канонических переменных в одном узле выполняются коммутационные соотношения

$$[\pi_a, \phi_b] = -i\,\hbar\,\delta_{ab}\,. \tag{7}$$

В классическом непрерывном пределе эти соотношения воспроизводят пуассонову структуру (3) если считать, что

$$\pi_a^{(n)} = \Delta\,\pi_a(x) \quad \phi_a^{(n)} = \phi_a(x)\,, \quad x = n\Delta\,, \tag{8}$$

где Δ – шаг решетки и n – номер узла (который мы в дальнейшем не будем указывать явно).

Если заданная классическая непрерывная модель является интегрируемой, то ее квантовый решеточный аналог также интегрируем, если существует квантовый L-оператор (см., например, [6]) такой что:
i) его классический непрерывный предел воспроизводит матрицу U:

$$L(\lambda)\Big|_{\hbar=0} = \mathbb{I} + \Delta\,U(\lambda) + o(\Delta)\,; \tag{9}$$

ii) он удовлетворяет следующему квадратичному перестановочному соотношению, являющемуся решеточным аналогом фундаментальной скобки Пуассона (6):

$$R\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\,L_1(\lambda)\,L_2(\mu) = L_2(\mu)\,L_1(\lambda)\,R\left(\frac{\lambda}{\mu}\right). \tag{10}$$

Квантовая R-матрица должна удовлетворять уравнению Янга–Бакстера,

$$R_{12}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) R_{13}(\lambda)\, R_{23}(\mu) = R_{23}(\mu)\, R_{13}(\lambda)\, R_{12}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right), \tag{11}$$

а ее классический предел должен быть согласован с классической r-матрицой.

Для $A^{(1)}_{N-1}$ модели Тода квантовая R-матрица имеет вид [4, 5]

$$R(\lambda) = \sum_{a,b=1}^{N} (\lambda q^{\delta_{ab}} - q^{-\delta_{ab}})\, e_{aa} \otimes e_{bb} + (q - q^{-1}) \sum_{a\neq b}^{N} \lambda^{\theta_{ab}}\, e_{ab} \otimes e_{ba}\,, \tag{12}$$

где $q = e^{i\beta^2\hbar}$, и $\theta_{ab} = 0$ при $a < b$, $\theta_{ab} = 1$ при $a > b$.

2. Решеточный квантовый L-оператор

2.1. Первый порядок. Мы будем использовать следующие обозначения:

$$\Pi = \mathrm{diag}(\pi_1, \ldots, \pi_N)\,, \qquad \Phi = \mathrm{diag}(\phi_1, \ldots, \phi_N)\,,$$

$$\widehat{e}_a = \lambda^{\delta_{a,N}} e_{a,a+1}\,, \qquad \widehat{f}_a = \lambda^{-\delta_{a,N}} e_{a+1,a}\,,$$

$$\widehat{E} = \sum_{a=1}^{N} \widehat{e}_a\,, \qquad \widehat{F} = \sum_{a=1}^{N} \widehat{f}_a\,.$$

В работе [5] М. Джимбо нашел приближенный квантовый L-оператор для $A^{(1)}_{N-1}$ модели Тоды. А именно, он показал, что L-оператор

$$\begin{aligned} L^J(\lambda) &= e^{\frac{\beta}{2}\Pi} \left(\mathbb{I} + \varepsilon\left(e^{-\beta \mathrm{ad}_\Phi}\, \widehat{E} + e^{\beta \mathrm{ad}_\Phi}\, \widehat{F}\right)\right) e^{\frac{\beta}{2}\Pi} \\ &= \sum_{a=1}^{N} e_{aa} e^{\beta\pi_a} + \varepsilon\, e^{\frac{\beta}{2}\Pi} \left(\sum_{a=1}^{N} e^{\beta(\phi_{a+1}-\phi_a)} \left(\widehat{e}_a + \widehat{f}_a\right)\right) e^{\frac{\beta}{2}\Pi} \end{aligned} \tag{13}$$

удовлетворяет RLL-соотношениям (10) в нулевом и первом порядке по ε.

Нетрудно видеть, что (13) удовлетворяет условию (9) если положить

$$\varepsilon = m\Delta \tag{14}$$

и учесть “перенормировку” импульса (8) в непрерывном пределе.

Заметим, что, хотя L-оператор (13) является приближенным, соответствующая R-матрица (12) не содержит малого параметра ε и является точным решением уравнения (11). Для применения к квантовой модели Тода квантового метода обратной задачи (см. [6]) необходимо найти точный L-оператор, удовлетворяющий соотношениям (10) во всех порядках по ε. В данной работе мы рассмотрим поправки второго и третьего порядка для L-оператора (13).

2.2. Второй порядок. Рассмотрим L-оператор $L(\lambda,\varepsilon)$, допускающий разложение по параметру ε,

$$L(\lambda,\varepsilon)=\sum_{n\geq 0}\varepsilon^n L^{(n)}(\lambda)\,. \tag{15}$$

Раскладывая соотношение (10) в ряд по ε, мы получаем бесконечный набор соотношений для $L^{(n)}(\lambda)$. Их явная форма, соответствующая порядкам ε^n для $n=0,1,2,3$, имеет вид

$$R\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)L_1^{(0)}(\lambda)\,L_2^{(0)}(\mu)=L_2^{(0)}(\mu)\,L_1^{(0)}(\lambda)\,R\left(\frac{\lambda}{\mu}\right), \tag{16}$$

$$\begin{aligned}&R\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(L_1^{(1)}(\lambda)\,L_2^{(0)}(\mu)+L_1^{(0)}(\lambda)\,L_2^{(1)}(\mu)\right)\\&=\left(L_2^{(1)}(\mu)\,L_1^{(0)}(\lambda)+L_2^{(0)}(\mu)\,L_1^{(1)}(\lambda)\right)R\left(\frac{\lambda}{\mu}\right),\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}&R\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(L_1^{(2)}(\lambda)\,L_2^{(0)}(\mu)+L_1^{(0)}(\lambda)\,L_2^{(2)}(\mu)+L_1^{(1)}(\lambda)\,L_2^{(1)}(\mu)\right)\\&=\left(L_2^{(2)}(\mu)\,L_1^{(0)}(\lambda)+L_2^{(0)}(\mu)\,L_1^{(2)}(\lambda)+L_2^{(1)}(\mu)\,L_1^{(1)}(\lambda)\right)R\left(\frac{\lambda}{\mu}\right).\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}&R\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(L_1^{(3)}(\lambda)\,L_2^{(0)}(\mu)+L_1^{(0)}(\lambda)\,L_2^{(3)}(\mu)+L_1^{(2)}(\lambda)\,L_2^{(1)}(\mu)\right.\\&\left.+L_1^{(1)}(\lambda)\,L_2^{(2)}(\mu)\right)=\left(L_2^{(3)}(\mu)\,L_1^{(0)}(\lambda)+L_2^{(0)}(\mu)\,L_1^{(3)}(\lambda)\right.\\&\left.+L_2^{(2)}(\mu)\,L_1^{(1)}(\lambda)+L_2^{(1)}(\mu)\,L_1^{(2)}(\lambda)\right)R\left(\frac{\lambda}{\mu}\right).\end{aligned} \tag{19}$$

Положим

$$L^{(0)}(\lambda)=e^{\beta\Pi},\quad L^{(1)}(\lambda)=e^{\frac{\beta}{2}\Pi}\left(\rho_+\,e^{-\beta\mathrm{ad}_\Phi}\,\widehat{E}+\rho_-\,e^{\beta\mathrm{ad}_\Phi}\,\widehat{F}\right)e^{\frac{\beta}{2}\Pi}\,. \tag{20}$$

Для увеличения общности мы ввели в первый порядок L-оператора (13) произвольные коэффициенты ρ_+, ρ_-. Условие (9) на классический предел L-оператора будет выполнено, если $\rho_+, \rho_- \to 1$ при $\hbar \to 0$.

Задача, которую мы собираемся решить, формулируется следующим образом. Пусть $L^{(0)}(\lambda)$ и $L^{(1)}(\lambda)$ заданы и имеют вид (20). Мы хотим найти общее решение $L^{(2)}(\lambda)$ уравнения (18), после чего исследовать, имеет ли уравнение (19) решение $L^{(3)}(\lambda)$ при каком–либо допустимом $L^{(2)}(\lambda)$.

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть $R(\lambda)$ задается выражением* (12), *а $L^{(0)}(\lambda)$, $L^{(1)}(\lambda)$ имеют вид* (20). *Тогда*

(i) *Общее решение уравнения* (18) *имеет вид*

$$\widetilde{L}^{(2)}(\lambda) = L^{(2)}(\lambda) + \widetilde{L}^{(1)}(\lambda)\,. \tag{21}$$

Здесь $\widetilde{L}^{(1)}(\lambda)$ является произвольным решением уравнения (17), *а $L^{(2)}(\lambda)$ имеет вид*

$$\begin{aligned} L^{(2)}(\lambda) = e^{\frac{\beta}{2}\Pi}\Big(&\gamma_1\, e^{-\beta \mathrm{ad}_\Phi}\widehat{E}^2 + \gamma_2\, e^{\beta \mathrm{ad}_\Phi}\widehat{F}^2 \\ &+ \gamma_3\,(e^{-\beta \mathrm{ad}_\Phi}\widehat{E})(e^{\beta \mathrm{ad}_\Phi}\widehat{F}) + \gamma_4\,(e^{\beta \mathrm{ad}_\Phi}\widehat{F})(e^{-\beta \mathrm{ad}_\Phi}\widehat{E})\Big)e^{\frac{\beta}{2}\Pi}\,, \end{aligned} \tag{22}$$

где коэффициенты γ_i должны удовлетворять следующим условиям

$$\text{при}\quad N=2: \qquad \gamma_3+\gamma_4 = \rho_+\rho_-\,, \tag{23}$$

$$\text{при}\quad N\geq 3: \qquad \gamma_1 = \frac{q\,\rho_+^2}{1+q}, \quad \gamma_2 = \frac{\rho_-^2}{1+q}, \quad \gamma_3+\gamma_4 = \rho_+\rho_-. \tag{24}$$

(ii) *При любом выборе $\widetilde{L}^{(1)}(\lambda)$ в* (21) *уравнение* (19) *не имеет решения для $L^{(3)}(\lambda)$.*

Доказательство приведено в Приложении.

Формула (21) отражает тот факт, что общее решение неоднородного уравнения является суммой его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения. Отметим, что $\widetilde{L}^{(1)}(\lambda)$ не обязан удовлетворять условию (9).

Приведем явное выражение для (22), использующее базисные матрицы:

$$L^{(2)}(\lambda) = \sum_{a=1}^{N} e^{\frac{\beta}{2}\pi_a}\big(\gamma_3\, e^{2\beta(\phi_{a+1}-\phi_a)} + \gamma_4\, e^{2\beta(\phi_a-\phi_{a-1})}\big) e^{\frac{\beta}{2}\pi_a}\, e_{aa} \tag{25}$$
$$+ \gamma_1 \sum_{a=1}^{N} e^{\frac{\beta}{2}\pi_{a-1}} e^{\beta(\phi_{a+1}-\phi_{a-1})} e^{\frac{\beta}{2}\pi_{a+1}}\, e_{a-1,a+1}\, \lambda^{\delta_{a,1}+\delta_{a,N}}$$
$$+ \gamma_2 \sum_{a=1}^{N} e^{\frac{\beta}{2}\pi_{a+1}} e^{\beta(\phi_{a+1}-\phi_{a-1})} e^{\frac{\beta}{2}\pi_{a-1}}\, e_{a+1,a-1}\, \lambda^{\delta_{a,1}+\delta_{a,N}}\,.$$

При $N = 2$ выражение (25) содержит только диагональные члены. В этом случае, выбирая $\rho_+ = \rho_- = 1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ и $\gamma_3 = 1$ (или $\gamma_3 = 0$), мы получаем точный L-оператор,

$$L(\lambda) = \tag{26}$$
$$\begin{pmatrix} e^{\frac{\beta}{2}\pi_1}\big(1+\varepsilon^2 e^{2\widetilde{\beta}(\phi_2-\phi_1)}\big)e^{\frac{\beta}{2}\pi_1} & \varepsilon e^{\frac{\beta}{2}\pi_1}\big(e^{\beta(\phi_2-\phi_1)} + \lambda^{-1} e^{\beta(\phi_1-\phi_2)}\big)e^{\frac{\beta}{2}\pi_2} \\ \varepsilon e^{\frac{\beta}{2}\pi_2}\big(e^{\beta(\phi_2-\phi_1)} + \lambda e^{\beta(\phi_1-\phi_2)}\big)e^{\frac{\beta}{2}\pi_1} & e^{\frac{\beta}{2}\pi_2}\big(1+\varepsilon^2 e^{2\widetilde{\beta}(\phi_1-\phi_2)}\big)e^{\frac{\beta}{2}\pi_2} \end{pmatrix},$$

где $\widetilde{\beta} = (\gamma_3 - \gamma_4)\beta$. L-оператор (26) удовлетворяет соотношению (10) во всех порядках по ε. После редукции $\phi_2 = -\phi_1$, $\pi_2 = -\pi_1$ выражение (26) переходит в хорошо известный L-оператор для модели sinh–Gordon [6, 7].

3. Редукция к неаффинному случаю

(1+1)–мерная цепочка Тода для простой алгебры Ли A_{N-1} описывает релятивистскую динамику N скалярных полей, уравнения движения которых даются теми же уравнениями (1), но в них, в отличие от аффинного случая, индекс a не считается периодическим. В этом случае можно формально положить $\beta\phi_0 = -\beta\phi_{N+1} = +\infty$ в (1) и (2). Та же процедура, примененная к (4)–(5), дает U–V пару, не содержащую спектрального параметра.

Для того, чтобы сохранить спектральный параметр в U–V паре, в работе [8] была предложена следующая процедура (для случая, соответствующего алгебре A_1; дальнейшее обобщение рассматривалось в [9]). Возьмем $\xi > 0$ и сдвинем поля (т.е. их нулевые моды), массу и спектральный параметр в (4)–(5) следующим образом

$$\phi_a \to \phi_a + a\,\xi/\beta\,, \qquad m \to e^{-\xi}\, m\,, \qquad \lambda \to e^{\xi N}\lambda\,. \tag{27}$$

Тогда предел $\xi \to +\infty$ дает U–V пару

$$U(\lambda) = \beta\Pi + m\big(e^{-\beta \mathrm{ad}_\Phi}\,\widehat{E} + e^{\beta \mathrm{ad}_\Phi} F\big),$$
$$V(\lambda) = \beta\partial_x\Phi + m\big(e^{-\beta \mathrm{ad}_\Phi}\,\widehat{E} - e^{\beta \mathrm{ad}_\Phi} F\big), \tag{28}$$

где

$$\widehat{E} = \sum_{a=1}^{N} \widehat{e}_a = \sum_{a=1}^{N} \lambda^{\delta_{a,N}} e_{a,a+1}, \quad F = \sum_{a=1}^{N-1} \widehat{f}_a = \sum_{a=1}^{N-1} e_{a+1,a}. \tag{29}$$

Матрица U в (28) имеет фундаментальную скобку Пуассона (6) с той же самой классической r-матрицей, что и в аффинном случае.

Для неаффинного случая мы имеем следующий аналог Предложения 1.

Предложение 2. *Пусть $R(\lambda)$ дается выражением* (12). *Тогда*

(i) *Уравнения* (16) *и* (17) *допускают следующее решение*

$$L^{(0)}(\lambda) = e^{\beta\Pi}, \quad L^{(1)}(\lambda) = e^{\frac{\beta}{2}\Pi}\left(\rho_+\, e^{-\beta \mathrm{ad}_\Phi}\,\widehat{E} + \rho_-\, e^{\beta \mathrm{ad}_\Phi} F\right) e^{\frac{\beta}{2}\Pi}. \tag{30}$$

(ii) *Для данных $L^{(0)}(\lambda)$ и $L^{(1)}(\lambda)$ общее решение уравнения* (18) *имеет вид*

$$\widetilde{L}^{(2)}(\lambda) = L^{(2)}(\lambda) + \widetilde{L}^{(1)}(\lambda). \tag{31}$$

Здесь $\widetilde{L}^{(1)}(\lambda)$ является произвольным решением уравнения (17), *а $L^{(2)}(\lambda)$ имеет вид*

$$\begin{aligned} L^{(2)}(\lambda) = e^{\frac{\beta}{2}\Pi}\Big(&\gamma_1\, e^{-\beta \mathrm{ad}_\Phi}\,\widehat{E}^2 + \gamma_2\, e^{\beta \mathrm{ad}_\Phi} F^2 \\ &+ \gamma_3\,(e^{-\beta \mathrm{ad}_\Phi}\,\widehat{E})(e^{\beta \mathrm{ad}_\Phi} F) + \gamma_4\,(e^{\beta \mathrm{ad}_\Phi} F)(e^{-\beta \mathrm{ad}_\Phi}\,\widehat{E})\Big) e^{\frac{\beta}{2}\Pi}, \end{aligned} \tag{32}$$

где коэффициенты γ_i должны удовлетворять условиям (23)–(24).

(iii) *При любом выборе $\widetilde{L}^{(1)}(\lambda)$ в* (31) *уравнение* (19) *не имеет решений для $L^{(3)}(\lambda)$.*

Доказательство приведено в Приложении.

При $N = 2$ выражение (32) содержит только диагональные члены. Кроме того, $F^2 = 0$. В этом случае, выбирая $\rho_+ = \rho_- = 1$, $\gamma_1 = 0$ и $\gamma_3 = 1$ (или $\gamma_3 = 0$), мы получаем точный L-оператор

$$L(\lambda) = \tag{33}$$
$$\begin{pmatrix} e^{\frac{\beta}{2}\pi_1}\big(1 + \varepsilon^2 e^{2\widetilde{\beta}(\phi_2-\phi_1)}\big)e^{\frac{\beta}{2}\pi_1} & \varepsilon e^{\frac{\beta}{2}\pi_1} e^{\beta(\phi_2-\phi_1)} e^{\frac{\beta}{2}\pi_2} \\ \varepsilon e^{\frac{\beta}{2}\pi_2}\big(e^{\beta(\phi_2-\phi_1)} + \lambda e^{\beta(\phi_1-\phi_2)}\big)e^{\frac{\beta}{2}\pi_1} & e^{\frac{\beta}{2}\pi_2}\big(1 + \varepsilon^2 e^{2\widetilde{\beta}(\phi_1-\phi_2)}\big)e^{\frac{\beta}{2}\pi_2} \end{pmatrix},$$

где $\widetilde{\beta} = (\gamma_3 - \gamma_4)\beta$. L-оператор (33) удовлетворяет соотношению (10) во всех порядках по ε. После редукции $\phi_2 = -\phi_1$, $\pi_2 = -\pi_1$ выражение (33) переходит в точный L-оператор для модели Лиувилля [8].

A Приложение

A.1. Доказательство Предложения 1. Второй порядок. Мы будем использовать следующие обозначения:

$$H_a = e_{aa} - e_{a+1,a+1}\,, \qquad K_a = q^{\frac{1}{2}H_a}\,, \qquad \alpha_a(X) = \mathrm{tr}(H_a X)\,,$$

где $a = 1, \ldots, N$ и $e_{N+1,N+1} \equiv e_{11}$. Тогда

$$K_a \widehat{e}_b = q^{\frac{1}{2}A_{ab}}\, \widehat{e}_b K_a\,, \qquad K_a \widehat{f}_b = q^{-\frac{1}{2}A_{ab}}\, \widehat{f}_b K_a\,, \tag{34}$$

где A – матрица Картана афинной алгебры $A^{(1)}_{N-1}$.

Сначала, следуя подходу [5], перепишем $L^{(1)}(\lambda)$ и $L^{(2)}(\lambda)$, переместив $e^{\frac{\beta}{2}\Pi}$ направо,

$$L^{(1)}(\lambda) = \sum_{a=1}^{N} e^{-\beta\alpha_a(\Phi)} \Big(\rho_+ e^{\frac{\beta}{2}\alpha_a(\Pi)} K_a \widehat{e}_a + \rho_- e^{-\frac{\beta}{2}\alpha_a(\Pi)} K_a \widehat{f}_a\Big) e^{\beta\Pi}, \tag{35}$$

$$\begin{aligned} L^{(2)}(\lambda) = \sum_{a=1}^{N} \Big(& \gamma_1\, e^{-\beta(\alpha_a(\Phi)+\alpha_{a+1}(\Phi))} e^{\frac{\beta}{2}(\alpha_a(\Pi)+\alpha_{a+1}(\Pi))} K_a K_{a+1} \widehat{e}_a \widehat{e}_{a+1} \\ & + \gamma_2\, e^{-\beta(\alpha_a(\Phi)+\alpha_{a+1}(\Phi))} e^{-\frac{\beta}{2}(\alpha_a(\Pi)+\alpha_{a+1}(\Pi))} K_a K_{a+1} \widehat{f}_{a+1} \widehat{f}_a \\ & + e^{-2\beta\alpha_a(\Phi)} K_a^2 \big(\gamma_3\, \widehat{e}_a \widehat{f}_a + \gamma_4\, \widehat{f}_a \widehat{e}_a\big)\Big) e^{\beta\Pi}. \end{aligned} \tag{36}$$

Далее подставим (35)–(36) в (17)–(18) и переместим все множители, содержащие $e^{\beta\Pi}$, направо, используя соотношения

$$\begin{aligned} e^{\beta\Pi_1} e^{-\beta\alpha_a(\Phi)} &= e^{-\beta\alpha_a(\Phi)} \big(K_a^2 \otimes \mathbb{I}\big)\, e^{\beta\Pi_1}, \\ e^{\beta\Pi_2} e^{-\beta\alpha_a(\Phi)} &= e^{-\beta\alpha_a(\Phi)} \big(\mathbb{I} \otimes K_a^2\big)\, e^{\beta\Pi_2}. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при функционально независимых экспонентах квантовых полей, получаем набор соотношений. Необходимо принять во внимание, что $R(\lambda)$ коммутирует с $(e_{aa} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes e_{aa})$, поэтому

$$[R(\lambda), K_a \otimes K_a] = 0\,, \qquad [R(\lambda), e^{\beta\Pi_1} e^{\beta\Pi_2}] = 0\,.$$

Соотношения, получаемые в (17) для коэффициентов при полях $e^{-\beta\alpha_a(\Phi)}e^{\pm\frac{\beta}{2}\alpha_a(\Pi)}$, имеют вид

$$R\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\Delta(x_a)=\Delta'(x_a)\,R\left(\frac{\lambda}{\mu}\right),\quad a=1,\,\ldots,N\,, \tag{37}$$

где $x_a=\widehat{e}_a,\widehat{f}_a$, соответственно, и

$$\Delta(x_a)=x_a\otimes K_a^{-1}+K_a\otimes x_a,\quad \Delta'(x_a)=x_a\otimes K_a+K_a^{-1}\otimes x_a\,. \tag{38}$$

Здесь и далее $x_N\otimes\mathbb{I}$ зависит от λ, а $\mathbb{I}\otimes x_N$ от μ.

В работе [5] показано, что решение уравнений (37) единственно с точностью до скалярного множителя и дается R–матрицей (12).

Рассматривая аналогично уравнение (18) и приравнивая коэффициенты при полях

$$e^{-\beta(\alpha_a(\Phi)+\alpha_b(\Phi))}e^{\frac{\beta}{2}(\kappa_1\alpha_a(\Pi)+\kappa_2\alpha_b(\Pi))},\qquad \kappa_i=\pm\,,$$

мы получаем соотношения

$$R\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)X_{ab}^{\kappa_1\kappa_2}=\left(X_{ab}^{\kappa_1\kappa_2}\right)'R\left(\frac{\lambda}{\mu}\right),\quad a,b=1,\,\ldots,N\,, \tag{39}$$

где штрих в правой части обозначает перестановку тензорных сомножителей (такую же как в (38)). Очевидно, что $X_{ab}^{\kappa_1\kappa_2}=X_{ba}^{\kappa_2\kappa_1}$. Выпишем явный вид $X_{ab}^{\kappa_1\kappa_2}$,

$$X_{ab}^{++}=\widehat{e}_aK_b\otimes K_a^{-1}\widehat{e}_b+(1-\delta_{ab})\,\widehat{e}_bK_a\otimes K_b^{-1}\widehat{e}_a,\qquad \text{при}\quad a-b\neq\pm1\bmod N, \tag{40}$$

$$\begin{aligned}X_{a,a+1}^{++}&=\gamma_1\left(\widehat{e}_a\widehat{e}_{a+1}\otimes K_a^{-1}K_{a+1}^{-1}+K_aK_{a+1}\otimes\widehat{e}_a\widehat{e}_{a+1}\right)\\&+\rho_+^2\left(\widehat{e}_aK_{a+1}\otimes K_a^{-1}\widehat{e}_{a+1}+\widehat{e}_{a+1}K_a\otimes K_{a+1}^{-1}\widehat{e}_a\right),\end{aligned} \tag{41}$$

$$X_{ab}^{--}=\widehat{f}_aK_b\otimes K_a^{-1}\widehat{f}_b+(1-\delta_{ab})\,\widehat{f}_bK_a\otimes K_b^{-1}\widehat{f}_a,\qquad \text{при}\quad a-b\neq\pm1\bmod N, \tag{42}$$

$$\begin{aligned}X_{a,a+1}^{--}&=\gamma_2\left(\widehat{f}_{a+1}\widehat{f}_a\otimes K_a^{-1}K_{a+1}^{-1}+K_aK_{a+1}\otimes\widehat{f}_{a+1}\widehat{f}_a\right)\\&+\rho_-^2\left(\widehat{f}_aK_{a+1}\otimes K_a^{-1}\widehat{f}_{a+1}+\widehat{f}_{a+1}K_a\otimes K_{a+1}^{-1}\widehat{f}_a\right),\end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned}X_{ab}^{+-}&=\delta_{ab}\Big(\gamma_3\left(\widehat{e}_a\widehat{f}_a\otimes K_a^{-2}+K_a^2\otimes\widehat{e}_a\widehat{f}_a\right)\\&+\gamma_4\left(\widehat{f}_a\widehat{e}_a\otimes K_a^{-2}+K_a^2\otimes\widehat{f}_a\widehat{e}_a\right)\Big)\\&+\rho_+\rho_-\left(\widehat{e}_aK_b\otimes K_a^{-1}\widehat{f}_b+\widehat{f}_bK_a\otimes K_b^{-1}\widehat{e}_a\right).\end{aligned} \tag{44}$$

Заметим, что уравнения (34) и (38) являются соотношениями для генераторов аффинной алгебры $A^{(1)}_{N-1}$. Они выполняются для любого ранга и представления. Однако, в случае фундаментального представления имеются дополнительные соотношения:

$$\begin{aligned} &\text{при } N \geq 2: \qquad \widehat{e}_a \widehat{f}_b = \widehat{f}_b \widehat{e}_a = 0\,, \qquad \text{если } \ b \neq a\,, \\ &\text{при } N \geq 3: \qquad \widehat{e}_a \widehat{e}_b = \widehat{f}_b \widehat{f}_a = 0\,, \qquad \text{если } \ b - a \neq 1 \bmod N\,. \end{aligned}$$

Принимая их во внимание, мы замечаем, что

$$(1+q^2) X^{++}_{aa} = \Delta(\widehat{e}_a)\Delta(\widehat{e}_a)\,, \qquad (1+q^2) X^{--}_{aa} = \Delta(\widehat{f}_a)\Delta(\widehat{f}_a)\,, \tag{45}$$

$$X^{++}_{ab} = \Delta(\widehat{e}_a)\Delta(\widehat{e}_b)\,, \qquad X^{--}_{ab} = \Delta(\widehat{f}_a)\Delta(\widehat{f}_b)\,, \qquad \text{при} \quad a - b \neq 0, \pm 1 \bmod N\,, \tag{46}$$

$$X^{+-}_{ab} = \rho_+ \rho_- \, \Delta(\widehat{e}_a)\Delta(\widehat{f}_b)\,, \quad \text{при} \ \ a \neq b\,, \tag{47}$$

и

$$\begin{aligned} X^{++}_{a,a+1} - \gamma_1 \, \Delta(\widehat{e}_a)\Delta(\widehat{e}_{a+1}) - q(\rho_+^2 - \gamma_1)\, \Delta(\widehat{e}_{a+1})\Delta(\widehat{e}_a) \\ = \big((1-q)\rho_+^2 + (q-q^{-1})\gamma_1\big)\, \widehat{e}_{a+1} K_a \otimes K_{a+1}^{-1} \widehat{e}_a\,, \end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned} X^{--}_{a,a+1} - \gamma_2 \, \Delta(\widehat{f}_{a+1})\Delta(\widehat{f}_a) - q^{-1}(\rho_-^2 - \gamma_2)\, \Delta(\widehat{f}_a)\Delta(\widehat{f}_{a+1}) \\ = \big((1-q^{-1})\rho_-^2 + (q^{-1}-q)\gamma_2\big)\, \widehat{f}_a K_{a+1} \otimes K_a^{-1} \widehat{f}_{a+1}, \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned} X^{+-}_{aa} - \gamma_3 \, \Delta(\widehat{e}_a)\Delta(\widehat{f}_a) - \gamma_4 \, \Delta(\widehat{f}_a)\Delta(\widehat{e}_a) \\ = (1-\gamma_3-\gamma_4)\, \big(\widehat{e}_a K_a \otimes K_a^{-1} \widehat{f}_a + \widehat{f}_a K_a \otimes K_a^{-1} \widehat{e}_a\big)\,. \end{aligned} \tag{50}$$

Таким образом, условие, что рассматриваемый $L^{(2)}$ является решением уравнения (18), эквивалентно требованию того, что соотношение (39) выполняется для правых частей в (45)–(50). Из уравнений (37)–(38) следует, что правые части в (45)–(47) действительно удовлетворяют (39). Также можно проверить непосредственно, что (39) не выполняется для правых частей в (48)–(50). Отсюда следует, что скалярные множители в этих правых частях должны быть равны нулю. Это требование и дает значения γ_i, приведенные в Предложении 1.

A.2. Доказательство Предложения 1. Третий порядок.

Лемма 1. *Пусть $R(\lambda)$ задается выражением* (12), *а $L^{(0)}(\lambda)$ имеет вид как в* (20). *Пусть*

$$\widetilde{L}^{(1)}(\lambda) = \sum_{a,b=1}^{N} \widetilde{L}^{(1)}_{ab}(\lambda)\, e_{ab} \tag{51}$$

является произвольным решением уравнения (17). *Тогда операторные коэффициенты $\widetilde{L}^{(1)}_{ab}(\lambda)$ равны нулю при всех a, b, кроме случаев $a = b$ и $a - b = \pm 1 \bmod N$.*

Доказательство. Рассмотрим матричный элемент $e_{cb} \otimes e_{ac}$ уравнения (17). Возьмем такие a, b, c, что $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$. В этом случае вычисление рассматриваемого матричного элемента использует только недиагональную часть R-матрицы (12) поскольку $L^{(0)}(\lambda)$ является диагональной матрицей. Несложно проверить, что в результате получается следующее уравнение

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\theta_{ca}} \widetilde{L}^{(1)}_{ab}(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\theta_{cb}} \widetilde{L}^{(1)}_{ab}(\mu)\,. \tag{52}$$

Если $b - a \neq 0, \pm 1 \bmod N$, то рассмотрим (52) для $c = a - 1 \bmod N$ и $c = a + 1 \bmod N$. Это дает два уравнения, которые являются несовместными, если $\widetilde{L}^{(1)}_{ab}(\lambda) \neq 0$. Это завершает доказательство леммы. □

Для доказательства пункта (ii) Предложения 1 представим общее решение уравнения (18) и искомое решение уравнения (19) в виде

$$\widetilde{L}^{(2)}(\lambda) = \sum_{a,b=1}^{N} \widetilde{L}^{(2)}_{ab}(\lambda)\, e_{ab}\,, \quad L^{(3)}(\lambda) = \sum_{a,b=1}^{N} L^{(3)}_{ab}(\lambda)\, e_{ab}\,. \tag{53}$$

Рассмотрим матричный элемент $e_{a,a+1} \otimes e_{a-1,a+1}$ уравнения (19) в случае $N \geq 3$. В результате получаем следующее уравнение

$$\left(\frac{\lambda}{\mu} - 1\right) L^{(1)}_{a,a+1}(\lambda)\widetilde{L}^{(2)}_{a-1,a+1}(\mu) + (q - q^{-1})\,\frac{\lambda}{\mu}\,\widetilde{L}^{(2)}_{a-1,a+1}(\lambda)L^{(1)}_{a,a+1}(\mu)$$
$$= \left(q\frac{\lambda}{\mu} - q^{-1}\right) \widetilde{L}^{(2)}_{a-1,a+1}(\mu)L^{(1)}_{a,a+1}(\lambda)\,. \tag{54}$$

Заметим, что это уравнение не содержит матричных элементов $L^{(3)}$, так как в (19) $L^{(3)}$ спарен с $L^{(0)}$ для которого элементы $(a, a+1)$ и $(a-1, a+1)$ равны нулю.

Из леммы 1 следует, что в (54) можно заменить $\widetilde{L}^{(2)}$ на $L^{(2)}$ из (22), так как они имеют совпадающие матричные элементы $(a-1, a+1)$.

Легко проверить, что (54) не выполняется для соответствующих матричных элементов $L^{(1)}$ и $L^{(2)}$ (см. (13) и (25)). Поэтому для любого допустимого выбора $\widetilde{L}^{(2)}$, уравнение (19) не имеет решения $L^{(3)}$.

A.3. Доказательство Предложения 2. Пункт (i). $L^{(1)}$ в (30) можно получить из $L^{(1)}$ в (20) положив $\widehat{f}_N = 0$. Поскольку соотношения (37) линейны по x_a, они совместны с такой редукцией. Отсюда следует, что $L^{(1)}$, имеющий вид (30), является решением для уравнения (18).

Пункт (ii). Аналогично, положив $\widehat{f}_N = 0$ в (22), мы получаем (32). Прямая проверка формул (40)–(44) показывает, что такая редукция не затрагивает X^{++}_{ab}, а X^{--}_{ab} и X^{+-}_{ab} не изменяются, если $a, b \neq N$, и становятся равными нулю, если $a = N$ или $b = N$. Поэтому соотношения (39) сохраняют силу, что, в свою очередь, означает выполнение соотношения (18).

Пункт (iii). Достаточно повторить аргументы, приведенные в Приложении A.2 и заметить, что матричные элементы $L^{(1)}_{a,a+1}$ и $L^{(2)}_{a-1,a+1}$ не затрагиваются редукцией.

Литература

1. А. В. Михайлов, *Об интегрируемости двумерного обобщения цепочки Тода.* — Письма в ЖЭТФ **30** (1979), 443–448.
2. A. N. Leznov, M. A. Saveliev, *Representation of zero curvature for the system of nonlinear partial differential equations* $\chi_{\alpha z\overline{z}} = (\exp K\chi)_\alpha$ *and its integrability.* — Lett. Math. Phys. **3** (1979), 489–494.
3. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов.* Наука, М., 1986.
4. O. Babelon, H. J. de Vega, C. M. Viallet, *Solutions of the factorization equations from Toda field theory.* — Nucl. Phys. **B190** (1981), 542–552.
5. M. Jimbo, *Quantum R-matrix for the generalized Toda system.* — Commun. Math. Phys. **102** (1986), 537–547.
6. Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи.* Наука, М., 1992.
7. П. П. Кулиш, Н. Ю. Решетихин, *Квантовая линейная задача для уравнения синус–Гордон и высшие представления.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **101** (1981), 101–110.

8. L. D. Faddeev, O. Tirkkonen, *Connections of the Liouville model and XXZ spin chain.* — Nucl. Phys. **B453** (1995), 647–669.
9. A. Aghamohammadi, M. Khorrami, A. Shariati, *Toda theories as contractions of affine Toda theories.* — Phys. Lett. **B389** (1996), 260–263.

Bytsko A. G., Davydenkova I. Yu. On quantum L-operator for two-dimensional lattice Toda model

The two-dimensional quantum lattice Toda model for the affine and simple Lie algebras of the type A is considered. For its known L-operator a correction of the second order in the lattice parameter ε is found. It is proved that the equation determining a correction of the third order in ε has no solutions.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, Санкт-Петербург 191023, Россия
E-mail: bytsko@pdmi.ras.ru

Поступило 18 ноября 2011 г.

Section of Mathematics
University of Geneva
2-4 rue du Lièvre, CP 64
1211 Genève, Switzerland
E-mail: irina.davydenkova@unige.ch