Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 398, 2012 г.

В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПРОСТЕЙШИХ 3-СИММЕТРИЧНЫХ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЕВА

1. Введение

В большинстве задач квантовой механики и математической физики, в которых используются полиномы, ортогональные на вещественной оси, речь идет об известных полиномах схемы Аски–Вильсона. Матрица Якоби, отвечающая рекуррентным соотношениям таких полиномов, состоит только из вещественных элементов, а дифференциальные (или разностные) уравнения для этих полиномов хорошо известны. В тоже время в квантовой физике встречаются задачи, в которых на главной диагонали соответствующей матрицы Якоби стоят комплексные числа. В качестве примера приведем "составную модель обобщенного осциллятора", при изучении которой авторы ввели новый класс "обобщенных полиномов Чебышева". Главная диагональ матрицы Якоби для таких полиномов образована периодической (с периодом N) последовательностью комплексных чисел. В этой связи возникает задача получения дифференциальных уравнений для обобщенных полиномов Чебышева. В более общей постановке этот вопрос можно сформулировать следующим образом: как изменятся дифференциальные уравнения полиномов схемы Аски–Вильсона, матрица Якоби которых имеет нулевую диагональ, при возмущении матрицы Якоби диагональной матрицей с комплексной диагональю (т.е. при введении комплексных чисел на диагональ матрицы Якоби).

В данной работе мы исследуем эту задачу в случае простейших 3-симметричных полиномов Чебышева. Отметим, что даже в этом простейшем случае результат не тривиален, а именно, полученные дифференциальные уравнения второго порядка с полиномиальными коэффициентами хотя и являются фуксовыми, но имеют 13 особых

Ключевые слова: обобщенный осциллятор, матрица Якоби, ортогональные многочлены.

Работа выполнена при поддержке РФФИ грант 09-01-00504 и 12-01-00207.

точек. Напомним, что гипергеометрическое уравнение имеет всего 3 особые точки, а уравнение Гойна только 4 особенности.

Класс ортогональных полиномов, рассматриваемых в данной работе, возник, как отмечалось выше, при изучении “составной модели обобщенного осциллятора” [1, 2]. Напомним определение простейших 3-симметричных полиномов Чебышева, данное в [3]. Эти полиномы $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ определяются с помощью трехчленных рекуррентных соотношений

$$x\psi_n(x) = \psi_{n+1}(x) + a_n\psi_n(x) + \psi_{n-1}(x), \quad \psi_0(x) = 1,\, \psi_{-1}(x) = 0, \quad (1)$$

где коэффициенты a_n определяются равенствами

$$a_0 = i\sqrt{3}, \quad a_1 = -i\sqrt{3}, \quad a_2 = 0, \qquad a_{n+3} = a_n,\, n \geq 0. \qquad (2)$$

Первые шесть полиномов имеют вид

$$\begin{array}{lll} \psi_0(x) = 1, & \psi_1(x) = x - i\sqrt{3}, & \psi_2(x) = x^2 + 2, \\ \psi_3(x) = x\psi_2(x) - \psi_1(x), & \psi_4(x) = x^3\psi_1(x) + 1, & \psi_5(x) = x^3\psi_2(x), \end{array} \quad (3)$$

а при $n \geq 6$ последовательно вычисляются по формуле

$$\psi_n(x) = x^3\psi_{n-3}(x) - \psi_{n-6}(x).$$

Мы будем рассматривать систему этих полиномов как объединение трех подсистем

$$\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty} = \bigcup_{k=0}^{2} \big[\,\{\psi_{3m+k}(x)\}_{m=0}^{\infty}\,\big], \quad n = 3m + k. \qquad (4)$$

В работе [4] было показано, что имеет место следующее равенство

$$\psi_{3m+k}(x) = \psi_n(x)\phi_{m-1}(x^3) - \psi_k(x)\phi_{m-2}(x^3), \quad m \geq 2, \qquad (5)$$

где $\phi_n(t)$ – полиномы Чебышева второго рода, которые определяются рекуррентными соотношениями

$$t\phi_n(t) = \phi_{n+1}(t) + \phi_{n-1}(t), \quad \phi_0(t) = 1,\, \phi_{-1}(t) = 0, \quad n \geq 0. \qquad (6)$$

Обозначим J_0 матрицу Якоби, соответствующую рекуррентным соотношениям (1) и (2). Пусть $A_0 = \{i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}, 0\}$ тройка чисел, порождающая “периодическую” последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ элементов, стоящих на её главной диагонали. В работах [2, 3] был получен спектр матрицы J_0 (см. рис. 1).

Диаметры окружности радиуса $\sqrt[3]{2}$ на рис. 1, проходящие под углами $\varphi_k = k\frac{\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$, являются носителями непрерывного спектра

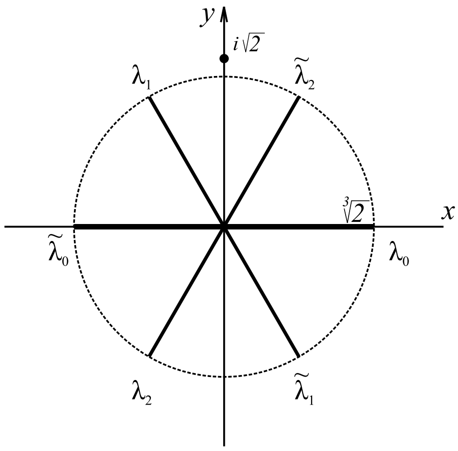

Рис. 1. Носитель $\mathcal{D}$ меры μ

матрицы J_0, а дискретный спектр J_0 состоит из единственного собственного значения равного $i\sqrt{2}$. В работе [3] была построена мера ортогональности полиномов $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, а в [5] – описан обобщенный осциллятор, соответствующий этой системе полиномов. Наконец, в [6] были получены (но не исследованы) дифференциальные уравнения которым удовлетворяют полиномы $\psi_n(x)$. В данной работе мы начнем рассмотрение матриц Якоби J_s $(s = 1, 2, 3, 4, 5)$, а также определяемых тройками чисел

$$A_1 = \{-i\sqrt{3}, 0, i\sqrt{3}\}, \quad A_2 = \{0, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}\}, \quad A_3 = \{-i\sqrt{3}, i\sqrt{3}, 0\},$$
$$A_4 = \{i\sqrt{3}, 0, -i\sqrt{3}\}, \quad A_5 = \{0, -i\sqrt{3}, i\sqrt{3}\}, \tag{7}$$

подобно тому, как тройка A_0 определяла J_0. Полиномы, соответствующие J_s, $s = 1, 2, 3, 4, 5$ будем обозначать $\psi_n(s; x)$. В настоящей работе мы ограничимся построением систем ортогональных полиномов $\{\psi_n(s; x)\}_{n=0}^{\infty}$, изучением спектров матриц Якоби J_s, $s = 1, 2, 3, 4, 5$, а также получим и исследуем дифференциальные уравнения для полиномов $\psi_n(s; x)$. Построению соответствующих этим полиномам обобщенных осцилляторов, а также исследованию связей между ними и между различными дифференциальными уравнениями будет посвящена следующая работа.

2. Системы ортогональных полиномов и спектр соответствующих матриц Якоби

2.1. Система $\{\psi_n(1;x)\}_{n=0}^{\infty}$, простейших 3-симметричных полиномов Чебышева. Полиномы $\psi_n(1;x)$, соответствующие матрице Якоби J_1, порождаются рекуррентными соотношениями (1) с коэффициентами a_n, определяемыми тройкой A_1 :

$$a_0 = -i\sqrt{3}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = i\sqrt{3}, \qquad a_{n+3} = a_n,\ n \geq 0.$$

Первые шесть из них равны

$$\begin{aligned} &\psi_0(1;x) = 1, && \psi_1(1;x) = x + i\sqrt{3}, && \psi_2(1;x) = x^2 + xi\sqrt{3} - 1, \\ &\psi_3(1;x) = x^3 + x, && \psi_4(1;x) = x^3\psi_1(1;x) + 1, && \psi_5(1;x) = x^3\psi_2(1;x), \end{aligned} \tag{8}$$

а при $n \geq 6$ имеем

$$\psi_n(1;x) = x^3\psi_{n-3}(1;x) - \psi_{n-6}(1;x).$$

Справедливы также соотношение (4) и формула (5) с заменой $\psi_n(x) \to \psi_n(1;x)$. Носитель непрерывного спектра матрицы Якоби J_1 находится тем же, что и в [2], методом. Именно, вычисляется

$$\mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda + i\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda - i\sqrt{3} \end{pmatrix}\right] = \lambda^3,$$

а из этого соотношения определяются границы непрерывного спектра (они оказываются теми же, что и для матрицы J_0, см. рис. 1):

$$\lambda_k = \sqrt[3]{2}e^{2k\pi i/3}, \qquad \widetilde{\lambda_k} = e^{(2k+3)\pi i/3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Для нахождения дискретного спектра матрицы J_1 мы будем использовать необходимое условие того, что μ – собственное значение матрицы J_1. В данном случае это условие имеет вид

$$S(\mu) - \mu^3 D(\mu) = 0, \tag{9}$$

где

$$S(\mu) = \sum_{n=0}^{5} \psi_n^2(1;\mu), \quad D(\mu) = \sum_{k=0}^{2} \psi_k(1;\mu)\psi_{k+3}(1;\mu). \tag{10}$$

Вывод условия (9) будет приведен в следующей работе. Так как

$$S(\mu) - \mu^3 D(\mu) = 3\mu^2\psi_2(1;\mu) = 3\mu^2\left(\mu^2 + i\mu\sqrt{3} - 1\right), \tag{11}$$

то уравнение (9) имеет три корня

$$\mu_0 = 0, \quad \mu_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \mu_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{12}$$

Поскольку условие (9) является только необходимым, то следует убедиться в том, что соответствующие собственные векторы матрицы J_1 принадлежат пространству l^2. В рассматриваемом случае

$$J_1 X_k = \mu_k X_k, \quad X_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, \ldots)^t, \quad x_n^{(k)} = \psi_{n-1}(1;x),$$

и несложно проверить, что при всех $k = 0, 1, 2$, ряд $\|X_k\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i^{(k)}|^2$ расходится. Следовательно, числа μ_k, из (12) не являются собственными значениями матрицы J_1. Итак, матрица J_1 не имеет дискретного спектра, а ее непрерывный спектр совпадает с непрерывным спектром матрицы J_0.

2.2. Система $\{\psi_n(2;x)\}_{n=0}^{\infty}$, простейших 3-симметричных полиномов Чебышева. Полиномы $\psi_n(2;x)$, соответствующие матрице Якоби J_2, порождаются рекуррентными соотношениями (1) с коэффициентами a_n, определяемыми тройкой A_2 :

$$a_0 = 0, \quad a_1 = i\sqrt{3}, \quad a_2 = -i\sqrt{3}, \qquad a_{n+3} = a_n,\ n \geq 0.$$

Первые шесть из них равны

$$\begin{aligned} &\psi_0(2;x) = 1, && \psi_1(2;x) = x, && \psi_2(2;x) = x^2 - xi\sqrt{3} - 1,\\ &\psi_3(2;x) = x^3 + x - i\sqrt{3}, && \psi_4(2;x) = x^4 + 1, && \psi_5(2;x) = x^3\psi_2(2;x), \end{aligned} \tag{13}$$

а при $n \geq 6$ имеем

$$\psi_n(2;x) = x^3\psi_{n-3}(2;x) - \psi_{n-6}(2;x).$$

Как и в предыдущем случае, матрица Якоби J_2 не имеет дискретного спектра, а ее непрерывный спектр совпадает с непрерывным спектром матрицы J_0.

2.3. Системы $\{\psi_n(3;x)\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\psi_n(4;x)\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\psi_n(5;x)\}_{n=0}^{\infty}$, простейших 3-симметричных полиномов Чебышева. Заметим, что

$$J_3 = {J_0}^*, \quad J_4 = {J_1}^*, \quad J_5 = {J_2}^*. \tag{14}$$

Используя эти соотношения и формулы (3), (8), (13) получаем

$$\begin{aligned} &\psi_0(3;x) = 1, && \psi_1(3;x) = x + i\sqrt{3}, \\ &\psi_2(3;x) = x^2 + 2, && \psi_3(3;x) = x\psi_2(3;x) - \psi_1(3;x), \\ &\psi_4(3;x) = x^3\psi_1(3;x) + 1, && \psi_5(3;x) = x^3\psi_2(3;x); \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} &\psi_0(4;x) = 1, && \psi_1(4;x) = x - i\sqrt{3}, \\ &\psi_2(4;x) = x^2 - xi\sqrt{3} - 1, && \psi_3(4;x) = x^3 + x, \\ &\psi_4(4;x) = x^3\psi_1(4;x) + 1, && \psi_5(4;x) = x^3\psi_2(4;x); \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} &\psi_0(5;x) = 1, && \psi_1(5;x) = x, \\ &\psi_2(5;x) = x^2 + xi\sqrt{3} - 1, && \psi_3(5;x) = x^3 + x + i\sqrt{3}, \\ &\psi_4(5;x) = x^4 + 1, && \psi_5(5;x) = x^3\psi_2(5;x), \end{aligned} \tag{17}$$

соответственно, а при $n \geq 6$ имеем

$$\psi_n(j;x) = x^3\psi_{n-3}(j;x) - \psi_{n-6}(j;x), \quad j = 3,4,5.$$

Учитывая, что спектры $\sigma(J)$ и $\sigma(J^*)$ расположены зеркально симметрично относительно вещественной оси [7] имеем: 1) Непрерывный спектр матрицы Якоби J_3, совпадает с непрерывным спектром матрицы J_0 (см. рис. 1), а дискретный спектр J_3 состоит из одной точки – собственного значения равного $-i\sqrt{2}$.

2) Матрицы Якоби J_4 и J_5 не имеют дискретного спектра, а непрерывные спектры этих матриц совпадают с непрерывным спектром матрицы J_0 (см. рис. 1).

3. Дифференциальные уравнения для простейших 3-симметричных полиномов Чебышева

3.1. Предварительные сведения. Приведем некоторые результаты работы [6], необходимые для для дальнейшего изложения. Для системы многочленов $\{\psi_n(s;x)\}_{n=0}^{\infty}$, $s = 1,2,3,4,5$, отвечающей матрице Якоби J_s, справедливы соотношения (4) и (5) с заменой $\psi_n(x)$ на $\psi_n(s;x)$. Для каждой серии k ($k = 0,1,2$) и любого s ($s = 0,1,2,3,4,5$) имеем своё дифференциальное уравнение:

$$\begin{gathered} A_k^{(s)} z''_{m,k}(x) - B_k^{(s)} z'_{m,k}(x) + C_k^{(s)} z_{m,k}(x) = 0, \\ z_{m,k}(x) = \psi_{3m+k}(s;x), \end{gathered} \tag{18}$$

$(m \geq 0,\ k = 0, 1, 2)$, где при $k = 2$

$$\begin{aligned} A_2^{(s)} &= 3x^2 Q_1(x) \psi_2(s;x)^2; \\ B_2^{(s)} &= 3x Q_2(x) \psi_2(s;x)^2 + 6 Q_1(x) \psi_2(s;x) \psi_2(s;x)'; \\ C_2^{(s)} &= 3x^2 Q_1(x) \left[2 \left(\psi_2(s;x)' \right)^2 - \psi_2(s;x)'' \right] \\ &\quad + 3x Q_2(x) \psi_2(s;x) \psi_2(s;x)' + 27m(m+2) x^6 \psi_2(s;x)^2, \end{aligned} \tag{19}$$

и введены обозначения

$$Q_1(x) = 4 - x^6, \qquad Q_2(x) = 8 + 7x^6. \tag{20}$$

Для $k = 0, 1$ имеем

$$\begin{aligned} A_k^{(s)} &= A_2^{(s)} \left(b_m^{(s)}(1;k) c_m^{(s)}(2;k) - b_m^{(s)}(2;k) c_m^{(s)}(1;k) \right); \\ B_k^{(s)} &= u_m^{(s)}(1;k) c_m^{(s)}(2;k) - u_m^{(s)}(2;k) c_m^{(s)}(1;k); \\ C_k^{(s)} &= b_m^{(s)}(1;k) u_m^{(s)}(2;k) - u_m^{(s)}(1;k) b_m^{(s)}(2;k). \end{aligned} \tag{21}$$

Коэффициенты $b_m^{(s)}, c_m^{(s)}$ и $u_m^{(s)}$ вычисляются по следующим формулам

$$\alpha = \frac{Q_1(x)}{3x^2}, \qquad \beta_k^{(s)} = \psi_{k+3}(s;x) - x^3 \psi_k(s;x); \tag{22}$$

$$b_m^{(s)}(1;k) = \frac{1}{2} x^3 \psi_k(s;x) - \frac{\alpha}{2m} \psi_k(s;x)' + \beta_k^{(s)}; \tag{23}$$

$$b_m^{(s)}(2;k) = \frac{3(m+1)}{2m} x^2 \psi_k(s;x) + \frac{m+1}{2m} x^3 \psi_k(s;x)' + \left(\beta_k^{(s)} \right)'; \tag{24}$$

$$c_m^{(s)}(1;k) = -\frac{\alpha}{2m} \psi_k(s;x); \qquad c_m^{(s)}(2;k) = \frac{m+1}{2m} x^3 \psi_k(s;x) + \beta_k^{(s)}; \tag{25}$$

$$\begin{aligned} u_m^{(s)}(1;k) = -3x \psi_2(s;x)^2 &\left[\frac{1}{2} x^3 \gamma_k^{(s)} + \frac{\alpha}{2m} \delta_k^{(s)} \right. \\ &\left. + \left(2x Q_1(x) (\beta_k^{(s)})'_x + Q_2(x) \beta_k^{(s)} \right) \right]; \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} u_m^{(s)}(2;k) = -3x \psi_2(s;x)^2 &\left[\frac{3}{2}(m+1) x^2 \gamma_k^{(s)} - \frac{m+1}{2m} x^3 \delta_k^{(s)} \right. \\ &\left. + \left(x Q_1(x) (\beta_k^{(s)})''_{xx} - 9(m^2-1) x^5 \beta_k^{(s)} \right) \right]; \end{aligned} \tag{27}$$

где

$$\gamma_k^{(s)} = Q_2(x)\psi_k(s;x) + 2xQ_1(x)\psi_k(s;x)';$$
$$\delta_k^{(s)} = 9m(m+2)x^5\psi_k(s;x) - xQ_1(x)\psi_k(s;x)''.$$

3.2. Дифференциальные уравнения для простейших 3-симметричных полиномов Чебышева $\psi_n(0;x)$.

а) Рассмотрим случай $k = 2$. В этом случае $z_m = \psi_{3m+2}(0;x)$ и, учитывая (3), (19) и (20), получаем

$$\begin{aligned} A_0 &= 3x^2Q_1(x)Q_0^2(x); \\ B_0 &= 3xQ_0(x)(3x^8 + 14x^6 + 24x^2 + 16); \\ C^{(0)} &= 3x\left[9m(m+2)x^5Q_0^2(x) + 8x(x^8 + 4x^6 + 5x^2 + 2)\right], \end{aligned} \tag{28}$$

где $Q_0(x) = (x^2+2)$. Из (18) и (28) получаем дифференциальное уравнение для $z_m = \psi_{3m+2}(0;x)$

$$\begin{aligned} xQ_1(x)Q_0^2(x)z_m'' - Q_0(x)(3x^8 + 14x^6 + 24x^2 + 16)z_m' \\ + \left[9m(m+2)x^5Q_0^2(x) + 8x(x^8 + 4x^6 + 5x^2 + 2)\right]z_m = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Дифференциальное уравнение (29) можно записать в виде

$$z_m'' + p(x)z_m' + q(x)z_m = 0, \tag{30}$$

где

$$p(x) = -\frac{3x^8 + 14x^6 + 24x^2 + 16}{xQ_1(x)Q_0(x)},$$
$$q(x) = \frac{9m(m+2)x^4}{Q_1(x)} + \frac{8(x^8 + 4x^6 + 5x^2 + 2)}{Q_1(x)Q_0^2(x)}.$$

Исследуем это уравнение, используя терминологию книги [8]. Уравнение (30) имеет девять конечных регулярных особых точек:

$$x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \pm i\sqrt{2}, \quad x_{k+4} = \sqrt[3]{2}e^{ik\pi/3},\ k = 0,1,2,3,4,5, \tag{31}$$

и одну регулярную особую точку $x_{10} = \infty$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} p_k = \mathrm{Res}_{x=x_k}p(x),\ q_k = \mathrm{Res}_{x=x_k}[(x-x_k)q(x)],\ k = 1,2,3,4,5,6,7,8,9, \\ p_\infty = -\mathrm{Res}_{x=\infty}p(x),\ q_\infty = -\mathrm{Res}_{x=\infty}[xq(x)]. \end{aligned} \tag{32}$$

Корни $\rho_m^{(k)}$, $m = 1,2$, $k = 1,2,3,4,5,6,7,8,9$ уравнения

$$\rho(\rho-1) + p_k\rho + q_k = 0, \tag{33}$$

называются характеристическими показателями (или индексами Фробениуса) в регулярной особой точке x_k. Для уравнения (30) имеем

$$\begin{gathered}\rho_1^{(1)}=0, \quad \rho_2^{(1)}=3, \quad \rho_1^{(2)}=\rho_1^{(3)}=1, \quad \rho_2^{(2)}=\rho_2^{(3)}=2, \\ \rho_1^{(k)}=-\frac{1}{2}, \quad \rho_2^{(k)}=0, \quad k=4,5,6,7,8,9.\end{gathered} \tag{34}$$

Индексы Фробениуса $\rho_m^{(10)}$, $m=1,2$, в точке $x_{10}=\infty$ являются решением характеристического уравнения

$$\rho(\rho+1)-p_\infty\rho+q_\infty=0 \tag{35}$$

и равны

$$\rho_1^{(10)}=-3m-2, \quad \rho_2^{(10)}=3m+4. \tag{36}$$

Так как все особые точки уравнения (30) являются фуксовыми, то и само дифференциальное уравнение (30) фуксово. Точки x_k, $k=4,5,6,7,8,9$ являются элементарными особыми точками (так как разность их индексов Фробениуса равна $\frac{1}{2}$), а точки x_2,x_3 являются "ложными" особыми точками, которые можно исключить следующей заменой неизвестной функции

$$z_m(x)=(x^2+2)y_m(x). \tag{37}$$

Уравнение (29) после такой замены принимает вид

$$xQ_1(x)y_m''(x)-Q_2(x)y_m'(x)+9x^5m(m+2)y_m(x)=0. \tag{38}$$

Это уравнение является канонической формой уравнения (29). Оно имеет только регулярные особые точки

$$\widetilde{x}_1=0; \quad \widetilde{x}_{k+2}=\sqrt[3]{2}e^{ik\pi/3},\ k=0,1,2,3,4,5; \quad \widetilde{x}_8=\infty,$$

индексы Фробениуса которых равны

$$\begin{gathered}\rho_1^{(1)}=0, \quad \rho_2^{(1)}=3, \quad \rho_1^{(k)}=-\frac{1}{2}, \quad \rho_2^{(k)}=0, \\ k=2,3,4,5,6,7; \quad \rho_1^{(8)}=-3m, \quad \rho_2^{(8)}=3m+6.\end{gathered} \tag{39}$$

Используя формулы (34), (36) и (39), несложно проверить условие Фукса для уравнений (29) и (38).

b) Рассмотрим теперь серию многочленов с номером $k=0$. В этом пункте считаем, что $z_m(x)=\psi_{3m}(0;x)$ Тогда из (3) и (22) - (27) имеем

$$\begin{gathered}
\alpha=\frac{Q_1(x)}{3x^2}, \qquad \beta_0^{(0)}=x+i\sqrt{3};\\
b_m^{(0)}(1;0)=\frac{1}{2}x^3+x+i\sqrt{3}, \qquad b_m^{(0)}(2;0)=\frac{3(m+1)}{2}x^2+1;\\
c_m^{(0)}(1;0)=-\frac{Q_1(x)}{6mx^2}, \qquad c_m^{(0)}(2;0)=\frac{m+1}{2m}x^3+x+i\sqrt{3}; \qquad (40)\\
u_m^{(0)}(1;0)=-3xQ_0^2(x)\left[Q_2(x)\left(\frac{1}{2}x^3+x+i\sqrt{3}\right)\right.\\
\left.+xQ_1(x)\left(\frac{3}{2}(m+2)x^2+2\right)\right];\\
u_m^{(0)}(2;0)=-3xQ_0^2(x)\left[\frac{3}{2}(m+1)x^2Q_2(x)\right.\\
\left.-9(m+1)x^5\left((m-1)(x+i\sqrt{3})+\frac{1}{2}(m+2)x^3\right)\right].
\end{gathered}$$

С учетом (40) из (20) и (21) получаем дифференциальное уравнение для $z_m(x)=\psi_{3m}(0;x)$

$$Q_1(x)P(x)z_m''(x)+Q(x)z_m'(x)+R(x)z_m(x)=0, \qquad (41)$$

где

$$P(x)=\left[\frac{3m+1}{3m}x^6+\frac{2m+1}{2m}i\sqrt{3}x^5+x^4+2i\sqrt{3}x^3+\frac{1-2m}{m}x^2+\frac{2}{3m}\right]; \qquad (42)$$

$$\begin{gathered}
Q(x)=-x\left\{\left(\frac{m+1}{2m}x^3+x+i\sqrt{3}\right)\right.\\
\times\left[Q_2(x)\left(\frac{1}{2}x^3+x+i\sqrt{3}\right)+xQ_1(x)\left(\frac{3}{2}(m+2)x^2+2\right)\right]\\
\left.+\frac{Q_1(x)}{6mx^2}\left[\frac{3}{2}(m+1)Q_2(x)x^2-9(m+1)x^5\left(\frac{1}{2}(m+2)x^3+(m-1)(x+i\sqrt{3})\right)\right]\right\};
\end{gathered}$$

$$R(x) = -x\Big\{\left(\frac{1}{2}x^3 + x + i\sqrt{3}\right)\Big[\frac{3}{2}(m+1)Q_2(x)x^2 - 9(m+1)x^5\left(\frac{1}{2}(m+2)x^3 + (m-1)(x+i\sqrt{3})\right)\Big] - \Big[Q_2(x)\left(\frac{1}{2}x^3+x+i\sqrt{3}\right)+Q_1(x)\left(2x+\frac{3}{2}(m+2)x^3\right)\Big]\left(1+\frac{3}{2}(m+1)x^2\right)\Big\}.$$

Уравнение (41) имеет только регулярные особые точки. Это точки

$$x_{k+1} = \sqrt[3]{2}e^{ik\pi/3}, \quad k = 0,1,2,3,4,5, \qquad x_{13} = \infty, \tag{43}$$

и точки x_l, $l = 7,8,9,10,11,12$, которые являются корнями полинома $P(x)$ (42). При $m \to \infty$ особые точки x_l, $l = 7,8,9,10,11,12$ стремятся к корням уравнения

$$x^2(x^2+2)(x^2+xi\sqrt{3}-1) = 0, \tag{44}$$

которые равны

$$\widetilde{x}_{1,2} = 0, \quad \widetilde{x}_{3,4} = \pm i\sqrt{2}, \quad \widetilde{x}_{5,6} = \pm\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{45}$$

Используя (32), (33) и (35) находим индексы Фробениуса точек (43)

$$\rho_1^{(k)} = -\frac{1}{2}, \ \ \rho_2^{(k)} = 0, \ \ k = 1,2,3,4,5,6; \ \ \rho_1^{(13)} = -3m, \ \ \rho_2^{(13)} = 3m+2. \tag{46}$$

Вычисление индексов Фробениуса $\rho_m^{(l)}$, $l = 7,8,9,10,11,12$ для точек x_l, $l = 7,8,9,10,11,12$ представляет определенные трудности и в настоящей работе мы их не вычисляем. Заметим, что из (46) следует, что точки x_k, $l = 12,3,4,5,6$ попрежнему являются элементарными особыми точками для уравнения (41), которое является фуксовым уравнением.

c) Рассмотрим теперь последнюю серию с номером $k=1$, так что в этом пункте $z_m(x)=\psi_{3m+1}(0;x)$. Из (22)-(27) и (3) получаем

$$
\begin{gathered}
\alpha=\frac{Q_1(x)}{3x^2}, \qquad \beta_1^{(0)}=1;\\
b_m^{(0)}(1;1)=\frac{1}{2}x^3(x-i\sqrt{3})-\frac{Q_1(x)}{6mx^2}+1,\\
b_m^{(0)}(2;1)=\frac{3(m+1)}{2}x^2\left(\frac{x}{3m}+(x-i\sqrt{3})\right);\\
c_m^{(0)}(1;1)=-\frac{Q_1(x)}{6mx^2}(x-i\sqrt{3}),\\
c_m^{(0)}(2;1)=\frac{m+1}{2m}x^3(x-i\sqrt{3})+1; \qquad (47)\\
u_m^{(0)}(1;1)=-3xQ_0^2(x)\Big[Q_2(x)\Big(\frac{1}{2}x^3(x-i\sqrt{3})+1\Big)\\
+Q_1(x)\Big(x^4+\frac{3}{2}(m+2)x^3(x-i\sqrt{3})\Big)\Big];\\
u_m^{(0)}(2;1)=-3xQ_0^2(x)\Big[\Big(Q_2(x)(x-i\sqrt{3})+2xQ_1(x)\Big)\frac{3}{2}(m+1)x^2\\
-9(m+1)x^5\Big((m-1)+\frac{1}{2}(m+2)x^3(x-i\sqrt{3})\Big)\Big].
\end{gathered}
$$

Учитывая (47) из (18) и (21) получаем дифференциальное уравнение для $z_m(x)=\psi_{3m+1}(0;x)$:

$$
x^2Q_1(x)P_1(x)z_m''(x)+S_1(x)z_m'(x)+R_1(x)z_m(x)=0, \qquad (48)
$$

где

$$
P_1(x)=\frac{Q_1(x)}{6mx^2}-1-(x-i\sqrt{3})\left(\frac{2m+1}{2m}x^3+\frac{m+1}{m}(x-i\sqrt{3})\right); \quad (49)
$$

$$
\begin{aligned}
S_1(x)=x\Big\{&Q_2(x)\Big(\frac{Q_1(x)}{6mx^2}-P_1(x)\Big)\\
&+\frac{1}{2}Q_1(x)\Big[2x^4+\frac{x-i\sqrt{3}}{m}\Big(3(2m+1)x^3+4(m+1)x\Big)\Big]\Big\};
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} R_1(x) = \frac{m+1}{2} x \Big\{ & \frac{Q_1(x)x}{m}(3(3m-1)x^2-4) - \frac{Q_2(x)}{m}(x^3+2(x-i\sqrt{3})) \\ & - 18x^5\left(m-1+\frac{2m+1}{2}x^3(x-i\sqrt{3})+(m+2)(x-i\sqrt{3})^2\right)\Big\}. \end{aligned}$$

Уравнение (48) имеет только регулярные особые точки. Это точки

$$x_{k+1} = \sqrt[3]{2} e^{ik\pi/3}, \quad k = 01,2,3,4,5, \qquad x_{13} = \infty, \tag{50}$$

и точки x_l, $l = 7,8,9,10,11,12$, которые являются корнями полинома $P_1(x)$ (49). Все особые точки фуксовы и, следовательно, уравнение (48), также является фуксовым уравнением. При $m \to \infty$ особые точки x_l, $l = 7,8,9,10,11,12$ стремятся к корням уравнения

$$x^2(x^2+2)(x^2-xi\sqrt{3}-1) = 0, \tag{51}$$

которые равны

$$\widetilde{x}_{1,2} = 0, \quad \widetilde{x}_{3,4} = \pm i\sqrt{2}, \quad \widetilde{x}_{5,6} = \pm\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{52}$$

Используя (32), (33) и (35) находим индексы Фробениуса точек (52)

$$\rho_1^{(k)} = -\frac{1}{2}, \;\; \rho_2^{(k)} = 0, \;\; k = 1,2,3,4,5,6; \quad \rho_1^{(13)} = -3m-1, \;\; \rho_2^{(13)} = -3m+3. \tag{53}$$

Как и выше, мы опускаем вычисление индексов Фробениуса $\rho_m^{(l)}$, $l = 7,8,9,10,11,12$ для точек x_l, $l = 7,8,9,10,11,12$. Заметим, что точки x_k, $l = 1,2,3,4,5,6$ попрежнему являются элементарными особыми точками.

3.3. Дифференциальные уравнения для простейших 3-симметричных полиномов Чебышева $\psi_n(1;x)$.

а) Сначала рассмотрим случай $k = 2$. Из (8) и (21) имеем

$$\begin{aligned} A_1 &= 3x^2 Q_1(x)(x^2+xi\sqrt{3}-1)^2; \\ B_1 &= 3x(x^2+xi\sqrt{3}-1)(3x^8+5i\sqrt{3}x^7-7x^6+24x^2+16i\sqrt{3}x-8); \\ C_1 &= 3x\Big[9m(m+2)x^5(x^2+xi\sqrt{3}-1)^2+8x^9+15i\sqrt{3}x^8-31x^7 \\ &\qquad -7i\sqrt{3}x^6+40x^3+48i\sqrt{3}x^2-56x-8i\sqrt{3}\Big] \end{aligned} \tag{54}$$

Из (18) и (54) получаем дифференциальное уравнение для $z_m = \psi_{3m+2}(1;x)$:

$$P_2(x)z_m''(x) + S_2(x)z_m'(x) + R_2(x)z_m(x) = 0, \tag{55}$$

где

$$P_2(x) = \frac{A_1}{3x}, \quad S_2(x) = \frac{B_1}{3x}, \quad R_2(x) = \frac{C_1}{3x}.$$

Уравнение (55) имеет 10 регулярных особых точек

$$x_1 = 0,\ x_{k+2} = \sqrt[3]{2}e^{ik\pi/3},\ k = 0,1,2,3,4,5, \quad x_{8,9} = \pm\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2},\ x_{10} = \infty.$$

Индексы Фробениуса равны

$$\rho_1^{(1)} = 0 \quad \rho_2^{(1)} = 3; \qquad \rho_1^{(k)} = -\frac{1}{2}, \quad \rho_2^{(k)} = 0, \quad k = 2,3,4,5,6,7; \tag{56}$$

$$\rho_1^{(8)} = \rho_1^{(9)} = 1, \quad \rho_2^{(8)} = \rho_2^{(9)} = 2; \quad \rho_1^{(10)} = -2-3m, \quad \rho_2^{(10)} = 4+3m.$$

Все особые точки уравнения (55) фуксовы и, следовательно и само уравнение является фуксовым. Точки x_l, $l = 2,3,4,5,6,7$ являются элементарными особыми точками, а точки $x_8 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ и $x_9 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ "ложными" и могут быть устранены заменой неизвестной функции

$$z_m(x) = (x^2 + xi\sqrt{3} - 1)y_m(x). \tag{57}$$

После этой замены уравнение (55) приводится к виду (38), которое является канонической формой уравнения (55).

b) Теперь рассмотрим серию с $k = 0$. Из (8) и (22)-(27) имеем

$$\alpha = \frac{Q_1(x)}{3x^2}, \qquad \beta_1^{(0)} = x;$$

$$b_m^{(1)}(1;0) = \frac{1}{2}x^3 + x, \qquad b_m^{(1)}(2;0) = \frac{3(m+1)}{2}x^2 + 1;$$

$$c_m^{(1)}(1;0) = -\frac{Q_1(x)}{6mx^2}, \qquad c_m^{(1)}(2;0) = \frac{m+1}{2m}x^3 + x; \tag{58}$$

$$u_m^{(1)}(1;0) = -3x(x^2 + i\sqrt{3}x - 1)^2\left(\frac{1-3m}{2}x^9 + 5x^7 + (16+6m)x^3 + 16x\right);$$

$$u_m^{(1)}(2;0) = -3x(x^2 + i\sqrt{3}x - 1)^2(m+1)\left(\frac{3}{2}Q_2(x)x^2 - 9x^5\left(m - 1 + \frac{m+2}{2}x^3\right)\right);$$

Учитывая (58) из (18) и (21) получаем дифференциальное уравнение для $z_m(x)=\psi_{3m}(1;x)$:

$$Q_1(x)P_3(x)z_m''(x)+S_3(x)z_m'(x)+R_3(x)z_m(x)=0, \tag{59}$$

где

$$P_3(x)=\frac{3m+1}{3m}x^6+x^4+\frac{m+1}{m}x^2+\frac{2}{3m}; \tag{60}$$

$$\begin{aligned}S_3(x)=-x\bigg\{&\Big(\frac{m+1}{2m}x^3+x\Big)\\ &\times\bigg(\Big(\frac{1}{2}x^3+x\Big)Q_2(x)+Q_1(x)\Big(\frac{3(m+2)}{2}x^3+2x\Big)\bigg)\\ &+\frac{Q_1(x)}{6mx^2}\bigg[\frac{3(m+1)}{2}Q_2(x)x^2-9(m+1)x^6\Big(\frac{1}{2}(m+2)x^2+m-1\Big)\bigg]\bigg\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_3(x)=-x\bigg\{&\Big(\frac{x^3}{2}+x\Big)\bigg[\frac{3(m+1)}{2}Q_2(x)x^2\\ &-9(m+1)x^6\Big(\frac{1}{2}(m+2)x^2+m-1\Big)\bigg]\\ &-\Big(\frac{3(m+1)}{2}x^2+1\Big)\bigg[Q_2(x)\Big(\frac{1}{2}x^3+x\Big)+Q_1(x)\Big(\frac{3(m+2)}{2}x^3+2x\Big)\bigg]\bigg\}.\end{aligned}$$

Уравнение (59) имеет только регулярные особые точки

$$x_{k+1}=\sqrt[3]{2}e^{ik\pi/3},\ k=0,1,2,3,4,5,\quad x_{13}=\infty;$$

и точки x_l, $l=7,8,9,10,11,12$, которые являются корнями полинома $P_3(x)$ (60). Все особые точки фуксовы и уравнение (59) тоже фуксово. Особые точки x_l, $l=7,8,9,10,11,12$ при $m\to\infty$ стремятся к корням уравнения

$$x^2(x^4+x^2+1)=0 \tag{61}$$

которые равны

$$\widetilde{x}_{1,2}=0,\quad \widetilde{x}_{3,4}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad \widetilde{x}_{5,6}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Как и выше, мы опускаем вычисление $\rho_m^{(l)}$, $l=7,8,9,10,11,12$. Остальные индексы Фробениуса равны

$$\rho_1^{(k)}=-\frac{1}{2},\ \rho_2^{(k)}=0,\ k=1,2,3,4,5,6;\qquad \rho_1^{(13)}=-3m,\ \rho_2^{(13)}=3m+2. \tag{62}$$

Отметим, что точки x_k, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ являются элементарными особыми точками уравнения (59).

c) Рассмотрим теперь серию $k = 1$. Из (8) и (22)–(27) имеем

$$\alpha = \frac{Q_1(x)}{3x^2}, \quad \beta_1^{(1)} = 1;$$
$$b_m^{(1)}(1;1) = \frac{1}{2}x^3(x + i\sqrt{3}) - \frac{Q_1(x)}{6mx^2} + 1,$$
$$b_m^{(1)}(2;1) = \frac{m+1}{2}\left(\frac{3(m+1)}{2}x + 3i\sqrt{3}\right)x^2;$$
$$c_m^{(1)}(1;1) = -\frac{Q_1(x)}{6mx^2}(x + i\sqrt{3}),$$
$$c_m^{(1)}(2;1) = \frac{m+1}{2m}x^3(x + i\sqrt{3}) + 1; \tag{63}$$
$$u_m^{(1)}(1;1) = -3x(x^2 + i\sqrt{3}x - 1)^2\left[Q_2(x)\left(\frac{1}{2}x^3(x + i\sqrt{3}) + 1\right)\right.$$
$$\left.+Q_1(x)\left(x^4 + \frac{3(m-2)}{2}(x + i\sqrt{3})x^3\right)\right];$$
$$u_m^{(1)}(2;1) = -3x(x^2 + i\sqrt{3}x - 1)^2\left[\frac{3(m+1)}{2}Q_2(x)(x + i\sqrt{3})x^2\right.$$
$$\left.+3(m+1)Q_1(x)x^3 - 9(m+1)x^5\left(m - 1 + \frac{m+2}{2}(x + i\sqrt{3})x^3\right)\right].$$

Учитывая (63) из (18) и (21) получаем дифференциальное уравнение для $z_m(x) = \psi_{3m+1}(1; x)$:

$$Q_1(x)P_4(x)z_m''(x) + S_4(x)z_m'(x) + R_4(x)z_m(x) = 0, \tag{64}$$

где

$$P_4(x) = \frac{m+1}{m}x^2(x + i\sqrt{3})^2 + \frac{2m+1}{2m}x^5 + x^2 - \frac{Q_1(x)}{6m}; \tag{65}$$

$$S_4(x) = -x\left\{Q_2(x)\left(1 + \frac{m+1}{m}(x + i\sqrt{3})^2 + \frac{2m+1}{2m}x^3(x + i\sqrt{3})\right)\right.$$
$$\left.+Q_1(x)\left(x^4 + (x + i\sqrt{3})\left(\frac{2(m+1)}{m}x + \frac{3}{2m}(2m+1)x^3\right)\right)\right\};$$

$$
\begin{aligned}
R_4(x) = -\frac{m+1}{2}x\Big\{ & -\frac{Q_2(x)}{m}(x^3+2(x+i\sqrt{3})) \\
& + \frac{Q_1(x)x}{m}\big(3(3m-1)x^2-4\big) \\
- 18x^5\Big(m-1+\frac{2m+1}{2}x^3(x+i\sqrt{3})+(m+2)(x+i\sqrt{3})^2\Big)\Big\}.
\end{aligned}
$$

Уравнение (64) имеет только регулярные особые точки

$$x_{k+1} = \sqrt[3]{2}e^{ik\pi/3},\ k=0,1,2,3,4,5, \quad x_{13}=\infty;$$

и точки x_l, $l=7,8,9,10,11,12$, которые являются корнями полинома $P_4(x)$ (65). Все особые точки фуксовы и уравнение (64) тоже фуксово. Особые точки x_l, $l=7,8,9,10,11,12$ при $m\to\infty$ стремятся к корням уравнения (44). Как и выше, мы опускаем вычисление $\rho_m^{(l)}$, $l=7,8,9,10,11,12$. Остальные индексы Фробениуса равны

$$\rho_1^{(k)} = -\frac{1}{2},\ \ \rho_2^{(k)}=0,\ \ k=1,2,3,4,5,6; \quad \rho_1^{(13)} = -3m-1,\ \ \rho_2^{(13)} = 3m+3. \tag{66}$$

Отметим, что точки x_k, $k=1,2,3,4,5,6$ являются элементарными особыми точками уравнения (64).

3.4. Дифференциальные уравнения для простейших 3-симметричных полиномов Чебышева $\psi_n(2;x)$. а) Сначала рассмотрим случай $k=2$. Из (13) и (19) имеем

$$
\begin{aligned}
A_2 &= 3x^2Q_1(x)(x^2+xi\sqrt{3}-1)^2; \\
B_2 &= 3x(x^2+xi\sqrt{3}-1)^2Q_2(x) \\
&+ 6Q_1(x)x^2(x^2-xi\sqrt{3}-1)(2x-i\sqrt{3}); \qquad (67)\\
C_2 = 3x\Big[&9m(m+2)x^5(x^2-xi\sqrt{3}-1)^2+8x^9-15i\sqrt{3}x^8-31x^7 \\
&+7i\sqrt{3}x^6+40x^3-48i\sqrt{3}x^2-56x+8i\sqrt{3}\Big].
\end{aligned}
$$

Из (18) и (67) получаем дифференциальное уравнение для $z_m=\psi_{3m+2}(2;x)$:

$$P_5(x)z_m''(x)+S_5(x)z_m'(x)+R_5(x)z_m(x)=0, \tag{68}$$

где

$$P_5(x) = xQ_1(x)(x^2 - xi\sqrt{3} - 1)^2;$$
$$S_5(x) = -(x^2 - xi\sqrt{3} - 1)\left(3x^8 - 5i\sqrt{3}x^7 - 7x^6 + 24x^2 - 16i\sqrt{3}x - 8\right);$$

$$R_5 = 9m(m+2)x^5(x^2 - xi\sqrt{3} - 1)^2 + 8x^9 - 15i\sqrt{3}x^8 - 31x^7 + 7i\sqrt{3}x^6 + 40x^3 - 48i\sqrt{3}x^2 - 56x + 8i\sqrt{3}.$$

Уравнение (68) имеет 10 регулярных особых точек

$$x_1 = 0,\ x_{k+2} = \sqrt[3]{2}e^{ik\pi/3},\ k = 0,1,2,3,4,5, \quad x_{8,9} = \pm\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad x_{10} = \infty.$$

Индексы Фробениуса равны

$$\begin{gathered}\rho_1^{(1)} = 0, \quad \rho_2^{(1)} = 3; \quad \rho_1^{(k)} = -\frac{1}{2}, \quad \rho_2^{(k)} = 0, \quad k = 2,3,4,5,6,7;\\ \rho_1^{(8)} = \rho_1^{(9)} = 1, \quad \rho_2^{(8)} = \rho_2^{(9)} = 2;\\ \rho_1^{(10)} = -2 - 3m, \quad \rho_2^{(10)} = 4 + 3m.\end{gathered} \tag{69}$$

Все особые точки уравнения (68) фуксовы и, следовательно, и само уравнение является фуксовым. Точки x_l, $l = 2,3,4,5,6,7$ являются элементарными особыми точками, а точки $x_8 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ и $x_9 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ – "ложными" и могут быть устранены заменой неизвестной функции

$$z_m(x) = (x^2 - xi\sqrt{3} - 1)y_m(x). \tag{70}$$

После этой замены уравнение (68) приводится к каноническому виду (38).

b) Теперь рассмотрим серию с $k = 0$. Из (13) и (22)-(27) имеем

$$\begin{gathered}\alpha = \frac{Q_1(x)}{3x^2}, \qquad \beta_2^{(0)} = x - i\sqrt{3};\\ b_m^{(2)}(1;0) = \frac{1}{2}x^3 + x - i\sqrt{3}, \qquad b_m^{(2)}(2;0) = \frac{3(m+1)}{2}x^2 + 1;\\ c_m^{(2)}(1;0) = -\frac{Q_1(x)}{6mx^2}, \qquad c_m^{(2)}(2;0) = \frac{m+1}{2m}x^3 + x - i\sqrt{3};\\ u_m^{(2)}(1;0) = -3x(x^2 - i\sqrt{3}x - 1)^2\end{gathered} \tag{71}$$

$$\times\left[Q_2(x)\Big(\frac{1}{2}x^3+x-i\sqrt{3}\Big)+xQ_1(x)\left(\frac{3(m+2)}{2}x^2+2\right)\right];$$

$$u_m^{(2)}(2;0)=-3x(x^2-i\sqrt{3}x-1)^2\left[\frac{3(m+1)}{2}x^2Q_2(x)-\sigma\right].$$

где

$$\sigma=9(m+1)x^5\left((m-1)(x-i\sqrt{3})+\frac{m+2}{2}x^3\right). \tag{72}$$

Учитывая (71) из (20) и (21) получаем дифференциальное уравнение для $z_m(x)=\psi_{3m}(2;x)$:

$$Q_1(x)P_6(x)z_m''(x)+S_6(x)z_m'(x)+R_6(x)z_m(x)=0, \tag{73}$$

где

$$P_6(x)=\frac{3m+1}{3m}x^6-\frac{2m+1}{2m}i\sqrt{3}x^5+x^4-2i\sqrt{3}x^3+\frac{1-2m}{m}x^2+\frac{2}{3m}; \tag{74}$$

$$S_6(x)=-x\Bigg\{\left[Q_2(x)\Big(\frac{1}{2}x^3+x-i\sqrt{3}\Big)+Q_1(x)\Big(\frac{3(m+2)}{2}x^2+2\Big)\right]$$
$$\times\left(\frac{m+1}{2m}x^3+x-i\sqrt{3}\right)+\frac{Q_1(x)}{6mx^2}\left[\frac{3(m+1)}{2}Q_2(x)x^2-\sigma\right]\Bigg\};$$

$$R_6(x)=-x\Bigg\{\left(\frac{x^3}{2}+x-i\sqrt{3}\right)\left[\frac{3(m+1)}{2}\ Q_2(x)x^2-\sigma\right]$$
$$-\left(\frac{3(m+1)}{2}x^2+1\right)\Bigg[Q_2(x)\Big(\frac{1}{2}x^3+x-i\sqrt{3}\Big)$$
$$+xQ_1(x)\Big(\frac{3(m+2)}{2}x^2+2\Big)\Bigg].$$

Уравнение (73) имеет только регулярные особые точки

$$x_{k+1}=\sqrt[3]{2}e^{ik\pi/3},\ k=0,1,2,3,4,5,\quad x_{13}=\infty;$$

и точки x_l, $l=7,8,9,10,11,12$, которые являются корнями полинома $P_6(x)$ (74). Все особые точки фуксовы и уравнение (73) тоже фуксово. Особые точки x_l, $l=7,8,9,10,11,12$ при $m\to\infty$ стремятся к корням уравнения (51). Как и выше, мы опускаем вычисление $\rho_m^{(l)}$, $l=$

$7, 8, 9, 10, 11, 12$. Остальные индексы Фробениуса равны

$$\begin{aligned} &\rho_1^{(k)} = -\frac{1}{2},\ \rho_2^{(k)} = 0, \quad k = 1,2,3,4,5,6; \\ &\rho_1^{(13)} = -3m,\ \rho_2^{(13)} = 3m+2. \end{aligned} \tag{75}$$

Отметим, что точки x_k, $k = 1,2,3,4,5,6$ являются элементарными особыми точками уравнения (73).

c) Рассмотрим теперь последнюю серию с $k = 1$. Из (13) и (22)–(27) имеем

$$\begin{aligned} &\alpha = \frac{Q_1(x)}{3x^2}, \qquad \beta_1^{(2)} = 1; \\ &b_m^{(2)}(1;1) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{Q_1(x)}{6mx^2} + 1, \qquad b_m^{(2)}(2;1) = \frac{(m+1)(3m+1)}{2m}x^3; \\ &c_m^{(2)}(1;1) = -\frac{Q_1(x)}{6mx^2}x, \qquad c_m^{(2)}(2;1) = \frac{m+1}{2m}x^4 + 1; \\ &u_m^{(2)}(1;1) = -3x(x^2 - i\sqrt{3}x - 1)^2 \\ &\qquad \times \left[Q_2(x)\Big(\frac{1}{2}x^4 + 1\Big) + Q_1(x)\Big(x^4 + \frac{3(m+2)}{2}x^4\Big)\right]; \\ &u_m^{(2)}(2;1) = -3x(x^2 - i\sqrt{3}x - 1)^2 \left[\frac{3(m+1)}{2}Q_2(x) + \frac{3(m+1)}{m}Q_1(x)x^3 \right. \\ &\qquad \left. -9(m+1)x^5\Big(m - 1 + \frac{m+2}{2}x^4\Big)\right]. \end{aligned} \tag{76}$$

Учитывая (76), из (18) и (21) получаем дифференциальное уравнение для $z_m(x) = \psi_{3m+1}(2;x)$:

$$Q_1(x)P_7(x)z_m''(x) + S_7(x)z_m'(x) + R_7(x)z_m(x) = 0, \tag{77}$$

где

$$P_7(x) = \frac{2m+1}{2m}x^6 + \frac{m+1}{m}x^4 + x^2 - \frac{Q_1(x)}{6m}; \tag{78}$$

$$\begin{aligned} S_7(x) = -x\left\{Q_2(x)\left(\frac{2m+1}{2m}x^4 + \frac{m+1}{m}x^2 + 1\right)\right. \\ \left. +Q_1(x)\left[x^4 + \frac{x^2}{m}\left(\frac{3(2m+1)}{2}x^2 + 2(m+1)\right)\right]\right\}; \end{aligned}$$

$$R_7(x) = -\frac{m+1}{m}x\left\{-\frac{Q_2(x)}{m}(x^3+2x) + \frac{Q_1(x)x}{m}(3(3m-1)x^2-4) \right.$$
$$\left. -18x^5\left(\frac{2m+1}{2}x^4 + (m+2)x^2 + m - 1\right)\right\}.$$

Уравнение (77) имеет только регулярные особые точки

$$x_{k+1} = \sqrt[3]{2}e^{ik\pi/3},\ k = 0,1,2,3,4,5, \quad x_{13} = \infty;$$

и точки x_l, $l = 7,8,9,10,11,12$, которые являются корнями полинома $P_7(x)$ (78). Все особые точки фуксовы и уравнение (77) тоже фуксово. Особые точки x_l, $l = 7,8,9,10,11,12$ при $m \to \infty$ стремятся к корням уравнения (61). Как и выше, мы опускаем вычисление $\rho_m^{(l)}$, $l = 7,8,9,10,11,12$. Остальные индексы Фробениуса равны

$$\rho_1^{(k)} = -\frac{1}{2},\ \rho_2^{(k)} = 0,\ k = 1,2,3,4,5,6; \quad \rho_1^{(13)} = -3m-1,\ \rho_2^{(13)} = 3m+3. \tag{79}$$

Отметим, что точки x_k, $k = 1,2,3,4,5,6$ являются элементарными особыми точками уравнения (77).

3.5. Дифференциальные уравнения для систем $\{\psi_n(3;x)\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\psi_n(4;x)\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\psi_n(5;x)\}_{n=0}^{\infty}$ простейших 3-симметричных полиномов Чебышева.

1) Рассмотрим систему $\{\psi_n(3;x)\}_{n=0}^{\infty}$. Используя соотношения (14), (15) и дифференциальное уравнение (29), мы получаем дифференциальное уравнение для $z_m = \psi_{3m+2}(3;x)$, которое совпадает с уравнением (29) и весь анализ, проведенный в секции a) параграфа 3.2 остается справедливым.

Далее, используя соотношения (14), (15) и дифференциальное уравнение (41) мы получаем дифференциальное уравнение для $z_m = \psi_{3m}(3;x)$, которое совпадает с уравнением (73) и весь анализ, проведенный в секции b) параграфа 3.4 остается справедливым.

Уравнение для $z_m = \psi_{3m+1}(3;x)$ получается из (14), (15) и дифференциального уравнения (48). Оно совпадает с уравнением (64) и весь анализ, проведенный в секции c) параграфа 3.3 остается справедливым.

2) Рассмотрим далее систему $\{\psi_n(4;x)\}_{n=0}^{\infty}$. Используя соотношения (14), (16) и дифференциальное уравнение (55) мы получаем дифференциальное уравнение для $z_m = \psi_{3m+2}(4;x)$, которое совпадает с

уравнением (68) и весь анализ, проведенный в секции a) параграфа 3.4 остается справедливым.

Аналогично, используя соотношения (14), (16) и дифференциальное уравнение (59), мы получаем дифференциальное уравнение для $z_m = \psi_{3m}(4;x)$, которое совпадает с уравнением (59) и весь анализ, проведенный в секции b) параграфа 3.3 остается справедливым.

Последнее уравнение с $k = 1$ для $z_m = \psi_{3m+1}(4;x)$, получается из (14), (16) и дифференциального уравнения (64). Это уравнение совпадает с (48) и весь анализ, проведенный в секции b) параграфа 3.2 остается справедливым.

3) Наконец рассмотрим последний случай, т.е. систему $\{\psi_n(5;x)\}_{n=0}^{\infty}$. Используя соотношения (14), (17) и дифференциальное уравнение (68), мы получаем дифференциальное уравнение для $z_m = \psi_{3m+2}(5;x)$, которое совпадает с уравнением (55) и весь анализ, проведенный в секции a) параграфа 3.3 остается справедливым.

Далее, используя соотношения (14), (17) и дифференциальное уравнение (73), мы получаем дифференциальное уравнение для $z_m = \psi_{3m}(5;x)$, которое совпадает с уравнением (41) и весь анализ, проведенный в секции b) параграфа 3.2 остается справедливым.

Последнее уравнение с $k = 1$ для $z_m = \psi_{3m+1}(5;x)$, получается из (14), (17) и дифференциального уравнения (77). Это уравнение совпадает с (77) и весь анализ, проведенный в секции c) параграфа 3.4 остается справедливым.

Литература

1. V. V. Borzov, E. V. Damaskinsky, *Connection between representations of Heisenberg and $su(1,1)$ algebra.* — In: Days on Diffraction (2009), pp. 49–53.
2. В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский, *N-симметричные полиномы Чебышева в составной модели обобщенного осциллятора.* — ТМФ **169**, No. 2 (2011), 229–240.
3. В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский, *Составная модель обобщенного осциллятора.* I. — ЗНС ПОМИ **374** (2010), 58–81.
4. B. Beckermann, J. Gilewicz, E. Leopold, *Recurrence relation with periodic coefficients and Chebyshev polynomials.* — Applicationes Mathematicae **23** (1995), 319–323.
5. V. V. Borzov, E. V. Damaskinsky, *Connection between representations of nonstandard and standard Chebyshev oscillators.* — In: Days on Diffraction (2010), pp. 28–34.
6. V. V. Borzov, E. V. Damaskinsky, *Дифференциальные уравнения для полиномов, определяемых рекурентными соотношениями с периодическими коэффициентами.* — In: Days on Diffraction (2011) (в печати).

7. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов.* Наука, М., 1965.
8. С. Ю. Славянов, В. Лай, *Специальные функции: Единая теория, основанная на анализе особенностей.* "Невский диалект", СПб., 2002

Borzov V. V., Damaskinsky E. V. Differential equations for the elementary 3-symmetric Chebyshev polynomials.

We continue the study of "composed model of generalized oscillator" and related simplest 3-symmetric Chebyshev polynomials. For this polynomials we obtain the second order differential equations which are of the fuchsian type. These equations have 13 singular points. The obtained results gives (in the considered simplest case) the answer on the more general question. What changes appears in the differential equations for polynomials of the Askey–Wilson scheme when the Jacobi matrix related with these polynomials was distributed by diagonal matrix with complex diagonal.

С.-Петербургский университет
телекоммуникаций,
наб. реки Мойки, 61, Санкт-Петербург 191186, Россия
E-mail: borzov.vadim@yandex.ru

Поступило 20 октября 2011г.

Военный инженерный технический институт
Захарьевская ул. 22, Санкт-Петербург 191123, Россия
E-mail: evd@pdmi.ras.ru