Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 398, 2012 г.

Т. А. Болохов

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДЕЙСТВИЯ ЭЙНШТЕЙНА–КАРТАНА

Действие Гильберта–Эйнштейна для гравитационного поля [1] записывается через Риманову связность $\Gamma_{\lambda,\nu\mu}$:

$$S_\Gamma = \int d^4x\sqrt{g}g^{\beta\nu}(\partial_\alpha\Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu\Gamma^\alpha_{\beta\alpha} + \Gamma^\alpha_{\sigma\alpha}\Gamma^\sigma_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\beta\alpha}). \tag{1}$$

Риманова связность (или связность Леви–Чивита), в свою очередь, является суммой производных метрического тензора $g_{\mu\nu}$:

$$\Gamma_{\rho,\beta\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\beta g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\beta} - \partial_\rho g_{\beta\nu}). \tag{2}$$

Такая связность зависит от 10 параметров (компонент тензора $g_{\mu\nu}$) и, как следствие, удовлетворяет соотношениям:

$$\nabla^\Gamma_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}g_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda}g_{\mu\sigma} = 0, \tag{3}$$

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma_{\nu\mu}. \tag{4}$$

В работе [2] Картан рассматривает действие (1) для связности $\Omega^\lambda_{\nu\mu}$, удовлетворяющей только условию согласованности с метрикой:

$$\nabla^\Omega_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Omega^\sigma_{\mu\lambda}g_{\sigma\nu} - \Omega^\sigma_{\nu\lambda}g_{\mu\sigma} = 0. \tag{5}$$

Можно показать, что такое действие является суммой действия Гильберта–Эйнштейна, зависящего от метрического тензора $g_{\mu\nu}$, и квадратичной формы некоторого антисимметричного тензора, который, в свою очередь, является линейной комбинацией кручения

$$T_{\alpha,\beta\gamma} = \Omega_{\alpha,\beta\gamma} - \Omega_{\alpha,\gamma\beta}.$$

Вследствие этого уравнения движения в переменных g, T при отсутствии взаимодействия совпадают с уравнениями Гильберта–Эйнштейна для поля g и аннулируют кручение T. Подробный обзор результатов теории Эйнштейна–Картана приводится в работе [3].

Ключевые слова: действие Эйнштейна–Картана, риманова связность, кручение, гравитационное поле.

Работа написана при поддержке гранта РФФИ 11-01-00570.

В этой статье мы повторим выкладки по преобразованию действия Эйнштейна–Картана к указанному выше виду и рассмотрим алгебраические аспекты вывода уравнений движения. Разновидность действия Эйнштейна–Картана появилась в недавних работах [4, 5], где метрический тензор и связность задаются через набор векторных полей f^A_μ, $A = 1, \dots 10$

$$g_{\mu\nu} = \sum_A f^A_\mu f^A_\nu$$
$$\Omega^\alpha_{\beta\nu} = \sum_A f^{\alpha A} \partial_\nu f^A_\beta .$$

И, таким образом, приведенные здесь вычисления оказываются удобными для исследования свойств лагранжиана записанного в терминах f^A_μ.

Мы используем стандартные обозначения с суммированием по повторяющимся верхним и нижним индексам, подъем и опускание индексов производятся с помощью метрического тензора $g_{\mu\nu}$ и обратной к нему матрицы $g^{\lambda\rho}$:

$$V_\mu = g_{\mu\lambda} V^\lambda, \quad g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta^\lambda_\mu .$$

Сигнатуру метрического тензора будем считать положительной, величина $\ln\sqrt{g}$ определяется как первообразная 1-формы $\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\lambda g_{\alpha\beta} dx^\lambda$.

1. Выражение действия через Риманову связность и деформацию

Перепишем условие согласованности связности и метрики (5) в следующем виде:

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} = \Omega_{\nu,\mu\lambda} + \Omega_{\mu,\nu\lambda} .$$

С помощью этой формулы представим $\Omega_{\lambda,\nu\mu}$ в виде суммы 12 слагаемых, таким образом, чтобы выделить Риманову связность $\Gamma_{\lambda,\nu\mu}$:

$$\begin{aligned}
\Omega_{\lambda,\nu\mu} &= \frac{1}{2}(\Omega_{\lambda,\mu\nu} + \Omega_{\mu,\lambda\nu} + \Omega_{\lambda,\nu\mu} + \Omega_{\nu,\lambda\mu} - \Omega_{\nu,\mu\lambda} - \Omega_{\mu,\nu\lambda}) \\
&+ \frac{1}{2}(\Omega_{\lambda,\nu\mu} - \Omega_{\lambda,\mu\nu} - \Omega_{\nu,\lambda\mu} + \Omega_{\nu,\mu\lambda} - \Omega_{\mu,\lambda\nu} + \Omega_{\mu,\nu\lambda}) \\
&= \frac{1}{2}(\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda g_{\nu\mu}) + \mathcal{T}_{\lambda,\nu\mu} = \Gamma_{\lambda,\nu\mu} + \mathcal{T}_{\lambda,\nu\mu} .
\end{aligned}$$

Здесь мы обозначили 6 слагаемых стоящих во второй строке как $\mathcal{T}_{\lambda,\nu\mu}$:

$$\mathcal{T}_{\lambda,\nu\mu} = \frac{1}{2}(\Omega_{\lambda,\nu\mu} - \Omega_{\lambda,\mu\nu} - \Omega_{\nu,\lambda\mu} + \Omega_{\nu,\mu\lambda} - \Omega_{\mu,\lambda\nu} + \Omega_{\mu,\nu\lambda}).$$

Эта величина, называемая деформацией (contortion), является тензором, антисимметричным по первым двум индексам, и зависит от 24 параметров. Кроме того, она взаимно однозначно связана с кручением:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\lambda,\nu\mu} =& \frac{1}{2}(T_{\lambda,\nu\mu} - T_{\nu,\lambda\mu} - T_{\mu,\lambda\nu}), \\ T_{\lambda,\nu\mu} =& \mathcal{T}_{\lambda,\nu\mu} - \mathcal{T}_{\lambda,\mu\nu}. \end{aligned} \tag{6}$$

Подставим выражение для Ω через Γ и $\mathcal{T}$ в исходное действие и соберем слагаемые, содержащие только g и Γ, в действие Гильберта–Эйнштейна S_Γ:

$$\begin{aligned} S_\Omega &= \int d^4x\sqrt{g}g^{\beta\nu}\left(\partial_\alpha\Omega^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu\Omega^\alpha_{\beta\alpha} + \Omega^\alpha_{\sigma\alpha}\Omega^\sigma_{\beta\nu} - \Omega^\alpha_{\sigma\nu}\Omega^\sigma_{\beta\alpha}\right) \\ &= \int d^4x\sqrt{g}g^{\beta\nu}\big(\partial_\alpha\Gamma^\alpha_{\beta\nu} + \partial_\alpha\mathcal{T}^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu\Gamma^\alpha_{\beta\alpha} - \partial_\nu\mathcal{T}^\alpha_{\beta\alpha} \\ &+ (\Gamma^\alpha_{\sigma\alpha} + \mathcal{T}^\alpha_{\sigma\alpha})(\Gamma^\sigma_{\beta\nu} + \mathcal{T}^\sigma_{\beta\nu}) - (\Gamma^\alpha_{\sigma\nu} + \mathcal{T}^\alpha_{\sigma\nu})(\Gamma^\sigma_{\beta\alpha} + \mathcal{T}^\sigma_{\beta\alpha})\big) \\ &= S_\Gamma + \int d^4x\sqrt{g}g^{\beta\nu}\big(\partial_\alpha\mathcal{T}^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu\mathcal{T}^\alpha_{\beta\alpha} + \Gamma^\alpha_{\sigma\alpha}\mathcal{T}^\sigma_{\beta\nu} + \mathcal{T}^\alpha_{\sigma\alpha}\Gamma^\sigma_{\beta\nu} + \mathcal{T}^\alpha_{\sigma\alpha}\mathcal{T}^\sigma_{\beta\nu} \\ &- \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\mathcal{T}^\sigma_{\beta\alpha} - \mathcal{T}^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\beta\alpha} - \mathcal{T}^\alpha_{\sigma\nu}\mathcal{T}^\sigma_{\beta\alpha}\big). \end{aligned}$$

Для третьего и четвертого слагаемого под интегралом проведем следующие вычисления:

$$\Gamma^\nu_{\beta\nu} = g^{\rho\nu}\Gamma_{\rho,\beta\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\nu}(\partial_\beta g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\beta} - \partial_\rho g_{\beta\nu}) = \frac{1}{2}g^{\rho\nu}\partial_\beta g_{\rho\nu} = \frac{\partial_\beta\sqrt{g}}{\sqrt{g}},$$

$$g^{\beta\nu}\Gamma^\sigma_{\beta\nu} = g^{\sigma\lambda}\partial_\beta g_{\lambda\nu}g^{\beta\nu} - g^{\sigma\lambda}\frac{\partial_\lambda\sqrt{g}}{\sqrt{g}} = -\frac{\partial_\lambda(g^{\lambda\sigma}\sqrt{g})}{\sqrt{g}}.$$

Далее, воспользуемся антисимметрией $\mathcal{T}_{\rho,\beta\alpha}$ после поднятия индексов ρ, β и симметрией Γ:

$$g^{\beta\nu}\Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\mathcal{T}^\sigma_{\beta\alpha} = g^{\beta\nu}\Gamma^\alpha_{\sigma\nu}g^{\rho\sigma}\mathcal{T}_{\rho,\beta\alpha} = 0.$$

А здесь, кроме того, воспользуемся определением (2)

$$g^{\beta\nu}\Gamma^\sigma_{\beta\alpha}\mathcal{T}^\alpha_{\sigma\nu} = \frac{1}{2}g^{\beta\nu}g^{\sigma\lambda}(\partial_\beta g_{\lambda\alpha} + \partial_\alpha g_{\lambda\beta} - \partial_\lambda g_{\beta\alpha})\mathcal{T}_{\rho,\beta\alpha}g^{\rho\alpha} = -\partial_\alpha g^{\sigma\nu}\mathcal{T}^\alpha_{\sigma\nu}.$$

После подстановки проделанных вычислений в действие S_Ω получаем:

$$S_\Omega = S_\Gamma + \int d^4x\sqrt{g}\big(g^{\beta\nu}\partial_\alpha\mathcal{T}^\alpha_{\beta\nu} - g^{\beta\nu}\partial_\nu\mathcal{T}^\alpha_{\beta\alpha} - \frac{\partial_\lambda(g^{\lambda\sigma}\sqrt{g})}{\sqrt{g}}\mathcal{T}^\alpha_{\sigma\alpha}$$
$$+ g^{\beta\nu}\frac{\partial_\sigma\sqrt{g}}{\sqrt{g}}\mathcal{T}^\sigma_{\beta\nu} + \partial_\alpha g^{\beta\nu}\mathcal{T}^\alpha_{\beta\nu} + g^{\beta\nu}\mathcal{T}^\alpha_{\sigma\alpha}\mathcal{T}^\sigma_{\beta\nu} - g^{\beta\nu}\mathcal{T}^\alpha_{\sigma\nu}\mathcal{T}^\sigma_{\beta\alpha}\big)$$
$$= S_\Gamma + \int d^4x\big(\partial_\alpha(\sqrt{g}g^{\beta\nu}\mathcal{T}^\alpha_{\beta\nu}) - \partial_\nu(\sqrt{g}g^{\beta\nu}\mathcal{T}^\alpha_{\beta\alpha}) - g^{\sigma\rho}\mathcal{T}^\alpha_{\sigma\alpha}\mathcal{T}^\lambda_{\rho\lambda} + g^{\sigma\rho}\mathcal{T}^\alpha_{\sigma\lambda}\mathcal{T}^\lambda_{\rho\alpha}\big).$$

Первые два слагаемых под интегралом являются полными производными, их можно опустить, тогда

$$S_\Omega = S_\Gamma + \int d^4x\sqrt{g}\big(g^{\sigma\rho}\mathcal{T}^\alpha_{\sigma\lambda}\mathcal{T}^\lambda_{\rho\alpha} - g^{\sigma\rho}\mathcal{T}^\alpha_{\sigma\alpha}\mathcal{T}^\lambda_{\rho\lambda}\big) \equiv S_\Gamma + S_{\mathcal{T}}. \qquad (7)$$

Таким образом, действие S_Ω является суммой действия Гильберта–Эйнштейна S_Γ, зависящего только от метрического тензора $g_{\mu\nu}$ и квадратичной формы $S_{\mathcal{T}}$ от деформации $\mathcal{T}$.

2. Уравнения движения

При выводе уравнений движения добавим к действию S_Ω абстрактное слагаемое S_{Int} отвечающее за взаимодействие с полями материи.

Первая часть уравнений движения (вариация по тензору $g^{\mu\nu}$) следует непосредственно из формулы (7):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\big(R + g^{\sigma\rho}\mathcal{T}^\alpha_{\sigma\lambda}\mathcal{T}^\lambda_{\rho\alpha} - g^{\sigma\rho}\mathcal{T}^\alpha_{\sigma\alpha}\mathcal{T}^\lambda_{\rho\lambda}\big) + \mathcal{T}^\alpha_{\mu\lambda}\mathcal{T}^\lambda_{\nu\alpha} - \mathcal{T}^\alpha_{\mu\alpha}\mathcal{T}^\lambda_{\nu\lambda} = 0,$$

здесь

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} + \Gamma^\alpha_{\sigma\alpha}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\alpha},$$
$$R = g^{\rho\sigma}(\partial_\alpha\Gamma^\alpha_{\rho\sigma} - \partial_\sigma\Gamma^\alpha_{\rho\alpha} + \Gamma^\alpha_{\lambda\alpha}\Gamma^\lambda_{\rho\sigma} - \Gamma^\alpha_{\lambda\sigma}\Gamma^\lambda_{\rho\alpha})$$

— тензор и скаляр Риччи, соответственно.

Для исследования второй части уравнений, вариации по $\mathcal{T}$, введем скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$, действующее в линейном пространстве тензоров ранга 3:

$$\big(X, Y\big) = X^\sigma_{\alpha\beta}Y^\rho_{\mu\nu}g_{\sigma\rho}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} \qquad (8)$$

и симметричные операторы

$$
\begin{aligned}
M^{\rho\ \alpha\beta}_{\mu\nu\sigma} &= g^{\rho\alpha} g_{\mu\sigma} \delta^{\beta}_{\nu}, & \big(MX\big)^{\rho}_{\mu\nu} &= g^{\rho\alpha} g_{\mu\sigma} X^{\sigma}_{\alpha\nu},\\
R^{\rho\ \alpha\beta}_{\mu\nu\sigma} &= \delta^{\rho}_{\sigma} \delta^{\alpha}_{\nu} \delta^{\beta}_{\mu}, & \big(RX\big)^{\rho}_{\mu\nu} &= X^{\rho}_{\nu\mu},\\
N^{\rho\ \alpha\beta}_{\mu\nu\sigma} &= \delta^{\rho}_{\mu} \delta^{\beta}_{\nu} \delta^{\alpha}_{\sigma}, & \big(NX\big)^{\rho}_{\mu\nu} &= \delta^{\rho}_{\mu} X^{\alpha}_{\alpha\nu},\\
I^{\rho\ \alpha\beta}_{\mu\nu\sigma} &= \delta^{\rho}_{\sigma} \delta^{\alpha}_{\mu} \delta^{\beta}_{\nu}, & \big(IX\big)^{\rho}_{\mu\nu} &= X^{\rho}_{\mu\nu}.
\end{aligned}
$$

Тогда действие $S_{\mathcal{T}}$ можно записать в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
S_{\Omega} &= S_{\Gamma} + \int d^4x \sqrt{g} \big(g^{\sigma\rho} \mathcal{T}^{\alpha}_{\sigma\lambda} \mathcal{T}^{\lambda}_{\rho\alpha} - g^{\sigma\rho} \mathcal{T}^{\alpha}_{\sigma\alpha} \mathcal{T}^{\lambda}_{\rho\lambda} \big)\\
&= S_{\Gamma} + \int d^4x \sqrt{g} \big(\mathcal{T}, (RMR - RNR) \mathcal{T} \big). \qquad (9)
\end{aligned}
$$

При вычислении вариации по тензору $\mathcal{T}$ следует помнить, что реальное число уравнений определяется не количеством комбинаций индексов $(4 \times 4 \times 4)$, а числом независимых компонент тензора. В нашем случае тензор $\mathcal{T}_{\lambda,\nu\mu}$, как видно из определения (6), антисимметричен по первым двум индексам λ, ν, то есть имеет только 24 независимые компоненты. Как следствие, тензор $\mathcal{T}^{\sigma}_{\alpha\beta} = g^{\sigma\lambda} \mathcal{T}_{\lambda,\alpha\beta}$ инвариантен относительно действия проектора $M^{-} = \frac{1}{2}(I - M)$:

$$
\begin{aligned}
\big(M^{-}\mathcal{T}\big)^{\rho}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (\delta^{\rho}_{\sigma} \delta^{\alpha}_{\mu} \delta^{\beta}_{\nu} - g^{\rho\alpha} g_{\mu\sigma} \delta^{\beta}_{\nu}) g^{\sigma\lambda} \mathcal{T}_{\lambda,\alpha\beta}\\
&= \frac{1}{2} (g^{\rho\lambda} \mathcal{T}_{\lambda,\mu\nu} - g^{\rho\alpha} \mathcal{T}_{\mu,\alpha\nu}) = \mathcal{T}^{\rho}_{\mu\nu}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, действие (9) можно переписать, поставив перед $\mathcal{T}$ оператор M^{-}:

$$
S_{\Omega} = S_{\Gamma} + \int d^4x \sqrt{g} \big(M^{-}\mathcal{T}, (RMR - RNR) M^{-}\mathcal{T} \big)_{g}.
$$

Такое выражение можно варьировать по $\mathcal{T}$ уже не заботясь о количестве уравнений, так как проектор M^{-} отсекает все лишнее. Следовательно, вторая часть уравнений движения будет выглядеть следующим образом:

$$
M^{-}(RMR - RNR) M^{-}\mathcal{T} = G, \qquad (10)
$$

здесь G это транспонированная относительно скалярного произведения (8) вариация S_{Int}:

$$
G^{\rho}_{\mu\nu} = -g^{\sigma\rho} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \frac{\delta S_{\mathrm{Int}}}{2\delta \mathcal{T}^{\sigma}_{\alpha\beta}}.
$$

3. Алгебраические свойства

Для того чтобы обратить оператор, действующий на $\mathcal{T}$ в уравнениях (10), и иметь возможность получать решения в случае если S_{Int} линейно или квадратично по $\mathcal{T}$, необходимо исследовать свойства операторов M, N, R. Несложно проверить, что соответствующие им матрицы удовлетворяют следующим алгебраическим соотношениям:

$$M^2 = I, \quad R^2 = I, \quad N^2 = 4N, \quad MN = NM = N \tag{11}$$

$$MRM = RMR, \quad NRN = N. \tag{12}$$

И, таким образом, порождают представление некоторой ассоциативной алгебры с единицей. Размерность этой алгебры равна 15, так как, с одной стороны, можно убедиться, что матрицы операторов

$$I,\ M,\ N,\ R,\ MR,\ RM,\ MRM,\ NR,\ RN,\ RNR, \tag{13}$$

$$MRN,\ NRM,\ MRNR,\ RNRM,\ MRNRM \tag{14}$$

различны, а, с другой стороны, в силу соотношений (11)–(12), умножение на M, N или R не выводит этот набор из своей линейной оболочки.

Далее, можно заметить, что при действии на тензоры инвариантные относительно умножения на M^- набор (13)–(14) сокращается до линейной оболочки трех элементов:

$$\widehat{I} = M^-, \quad \widehat{R} = 2M^-RM^-, \quad \widehat{N} = 2M^-RNRM^-,$$

которые удовлетворяет соотношениям:

$$\widehat{I}\widehat{R} = \widehat{R}\widehat{I} = \widehat{R}, \quad \widehat{I}\widehat{N} = \widehat{N}\widehat{I} = \widehat{N}, \quad \widehat{I}^2 = \widehat{I},$$

$$\widehat{R}^2 = 2\widehat{I} - \widehat{R}, \quad \widehat{N}^2 = 3\widehat{N}, \quad \widehat{R}\widehat{N} = \widehat{N}\widehat{R} = \widehat{N}.$$

То есть любая возможная комбинация I, M, N, R в слагаемом S_{Int} сведется к действию линейной оболочки $\widehat{I}$, $\widehat{R}$, $\widehat{N}$. В соответствии с классификацией [6], эта алгебра является трехмерной ассоциативной алгеброй с единицей первого типа, так как замена

$$1 = \widehat{I}, \quad A = \frac{2}{3}\widehat{I} + \frac{1}{3}\widehat{R} - \frac{1}{3}\widehat{N}, \quad B = \frac{1}{3}\widehat{N}$$

приводит к определяющим соотношениям

$$1A = A1 = A, \quad 1B = B1 = B, \quad 1^2 = 1,$$

$$A^2 = A, \quad B^2 = B, \quad AB = BA = 0.$$

Для такой алгебры существет простая формула для обратного элемента:

$$(\alpha A + \beta B + \gamma 1)^{-1} = \gamma^{-1} 1 - \frac{\alpha}{\gamma(\alpha+\gamma)} A - \frac{\beta}{\gamma(\beta+\gamma)} B. \qquad (15)$$

То есть, обратный существует, если

$$\gamma \neq 0, \quad \alpha \neq -\gamma, \quad \beta \neq -\gamma.$$

В противном случае элемент имеет нетривиальное ядро:

$$\begin{aligned} (\alpha A + \beta B)(1 - A - B) &= 0, \quad \text{если } \gamma = 0, \\ (\gamma 1 + \alpha A + \beta B) A &= 0, \quad \text{если } \alpha = -\gamma, \\ (\gamma 1 + \alpha A + \beta B) B &= 0, \quad \text{если } \beta = -\gamma. \end{aligned}$$

Таким образом, приведенные здесь замечания, позволяют обратить или найти тривиальное решение для произвольного взаимодействия, содержащего квадратичные и линейные по T слагаемые, образованные с помощью операторов I, M, N, R.

4. Перестановки индексов

Алгебра элементов (13)–(14) имеет три естественных автоморфизма связанных с перестановкой индексов. Для произвольного элемента X их действие выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}: &\quad X \to RXR, \\ \mathcal{M}: &\quad X \to MXM, \\ \mathcal{L}: &\quad X \to RMRXRMR, \end{aligned}$$

в частности

$$M^- \xrightarrow{\mathcal{R}} \frac{1}{2}(I - RMR) \equiv L^-, \quad M^- \xrightarrow{\mathcal{M}} M^-, \quad M^- \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{2}(I - M) \equiv R^-.$$

Элементы $\hat{I}$, $\hat{R}$, $\hat{N}$ под действием $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ переходят в

$$\begin{gathered} \hat{I} \xrightarrow{\mathcal{R}} L^-, \quad \hat{R} \xrightarrow{\mathcal{R}} 2L^- R L^-, \quad \hat{N} \xrightarrow{\mathcal{R}} 2L^- N L^-, \\ \hat{I} \xrightarrow{\mathcal{L}} R^- \equiv \check{I}, \quad \hat{R} \xrightarrow{\mathcal{L}} 2R^- M R^- \equiv \check{M}, \quad \hat{N} \xrightarrow{\mathcal{L}} 2R^- N R^- \equiv \check{N}, \end{gathered}$$

с сохранением коммутационных соотношений. Таким образом, формулу (15) можно перенести на тензоры ранга 3 антисимметричные по любой паре индексов.

В качестве примера перепишем слагаемое $S_{\mathcal{T}}$ в терминах кручения T. Согласно формуле (6)

$$\mathcal{T}^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda}(T_{\lambda,\nu\mu} - T_{\nu,\lambda\mu} - T_{\mu,\lambda\nu}) = \frac{1}{2}(I - M - RM)T.$$

Здесь можно отметить, что если кручение T антисимметрично по нижним индексам, то деформация $\mathcal{T}$ инвариантна относительно действия M^-:

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &= \frac{1}{2}(I-M)T - \frac{1}{2}RMT = \frac{1}{2}(I-M)T - \frac{1}{4}RM(I-R)T \\ &= \frac{1}{2}(I-M)T - \frac{1}{4}(I-M)RMT = \frac{1}{2}M^-(I-M-RM)T = M^-\mathcal{T}.\end{aligned}$$

Теперь запишем выражение стоящее под интегралом в $S_{\mathcal{T}}$:

$$\begin{aligned}&\big(\mathcal{T},(MRM - RNR)\mathcal{T}\big) \\ &\quad= \frac{1}{4}\big((I-M-RM)T,(R-RNR)(I-M-RM)T\big) \\ &\quad= \frac{1}{4}\big(T,(I-M-MR)(R-RM-M-RNR+RNRM+RN)T\big) \\ &\quad= \frac{1}{4}\big(T,(I-M-MR)(2RN-RM)T\big) \\ &\quad= \frac{1}{4}\big(T,(2RN-2MRN-2N-RM+RMR+I)T\big) \\ &\quad= \big(T,(\frac{1}{4}I+\frac{1}{2}M-N)T\big),\end{aligned}$$

здесь мы пользовались следствиями инвариантности тензоров T и $\mathcal{T}$:

$$M\mathcal{T} = -\mathcal{T}, \quad RT = -T, \quad RNRMR^- = 0.$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned}S_{\mathcal{T}} &= \int d^4x\sqrt{g}\big(T,(\frac{1}{4}I+\frac{1}{2}M-N)T\big) = \\ &= \int d^4x\sqrt{g}\big(\frac{1}{4}g^{\sigma\rho}g^{\nu\beta}g_{\alpha\lambda}T^{\alpha}_{\sigma\nu}T^{\lambda}_{\rho\beta} + \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}T^{\alpha}_{\sigma\nu}T^{\nu}_{\rho\alpha} - g^{\sigma\rho}T^{\alpha}_{\sigma\alpha}T^{\nu}_{\rho\nu}\big).\end{aligned}$$

5. Уравнения движения для линейного взаимодействия

Применим проведенные выше алгебраические вычисления для случая когда взаимодействие S_{Int} линейно по $\mathcal{T}$. Проведем замены:

$$M^-(RMR - RNR)M^- = \frac{1}{2}(\hat{R} - \hat{N}) = \frac{3}{2}A - 1$$

и воспользуемся формулой (15):

$$(\frac{3}{2}A-1)^{-1} = 3A-1 = 1+\widehat{R}-\widehat{N} = M^{-}(1+2R-2RNR)M^{-}.$$

Последнюю формулу можно также проверить непосредственно, воспользовавшись соотношениями (11)–(12) для операторов I, M, N, R.

Теперь уравнение (10) можно умножить на $M^{-}(1+2R-2RNR)M^{-}$ слева, тогда получим

$$\mathcal{T} = M^{-}(1+2R-2RNR)G$$

(здесь мы считаем, что G инвариантно относительно действия M^{-}). В индексах эта формула выглядит следующим образом:

$$\mathcal{T}^{\rho}_{\mu\nu} = G^{\rho}_{\mu\nu} + G^{\rho}_{\nu\mu} - g^{\rho\sigma}g_{\mu\alpha}G^{\alpha}_{\nu\sigma} - \delta^{\rho}_{\nu}G^{\lambda}_{\mu\lambda} + g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}G^{\lambda}_{\sigma\lambda},$$

что согласуется с результатами [3]. В частности, в случае отсутствия взаимодействия, из уравнений движения следает, что кручение равно нулю.

Литература

1. A. Einstein, *The foundation of the general theory of relativity.* — Annalen Phys. **49**, 769 (1916) [Annalen Phys. **14**, 517 (2005)].
2. Elie Cartan, *Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion.* — C. R. Acad. Sci. (Paris), 174:593–595 (1922).
3. F. Hehl, Paul von der Heyde, G. Kerlick, and J. Nester, *General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects.* — Rev. Mod. Phys. **48**, 393–416 (1976).
4. L. D. Faddeev, *New variables for the Einstein theory of gravitation.* `arXiv:0911.0282 [hep-th]`.
5. Л. Д. Фаддеев, *Новые динамические переменные в теории тяготения Эйнштейна.* — ТМФ, **166**:3, 323–335 (2011).
6. E. Study, *Über Systeme complexer Zahlen und ihre Anwendungen in der Theorie der Transformationsgruppen.* — Monatshefte für Mathematik 1 (1): 283–354 (1890).

Bolokhov T. A. Algebraic properties of the Einstein–Cartan action.

Algebraic properties of the matrix operators which act on the torsion in the Einstein-Cartan action are studied. Multiplication rules are written and corresponding equations of motion are explored in different variables.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
Санкт-Петербург 191023, Россия
E-mail: `timur@euclid.pdmi.ras.ru`

Поступило 12 декабря 2011 г.