

Н. М. Боголюбов, П. П. Кулиш

ТОЧНО-РЕШАЕМЫЕ МОДЕЛИ КВАНТОВОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКИ

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие модели квантовой нелинейной оптики являются точно решаемыми, что позволяет получить описание ряда физических процессов вне рамок теории возмущений. Как правило техника построения решений меняется от модели к модели. Цель настоящей работы – привести ряд моделей, решения которых может быть получено единственно посредством квантового метода обратной задачи и алгебраического ансамбля Бете [1–5]. Это позволяет найти дополнительные связи между моделями, а также отметить возможные деформации моделей вводя дополнительные параметры сохраняя свойство интегрируемости при изменении характеристик физических процессов. Технически это связано с процедурой склейки и скручивания квантовых алгебр симметрии, лежащих в основе свойства интегрируемости.

2. КВАНТОВАЯ ОПТИКА

Квантовая оптика занимается изучением явлений, в которых проявляются квантовые свойства электромагнитного поля. Один из разделов этой науки изучает взаимодействие квантованного поля излучения с атомами. Физика всегда связана с прибором. Идеальный прибор для исследования взаимодействия квантованного излучения с атомами представляет собой следующее устройство. Это резонатор, настроенный на определенную частоту электромагнитного поля. В резонатор влетают двухуровневые атомы в возбужденном состоянии и взаимодействуют с квантованным полем. На выходе стоит детектор, определяющий, в каком состоянии находится атом (рис. 1). Модель, которая описывает этот процесс, называется моделью Джейнса–Каммингса [6].

Ключевые слова: квантовый метод обратной задачи, R -матрица, q -бозон, нелинейная оптика, модель Дикуса.

Работа частично поддержана грантами РФФИ 10-01-00600, 12-01-00207.



Рис. 1. Прибор для исследования взаимодействия квантованного излучения с атомами.

Модель Джейнса–Каммингса описывает взаимодействие одномодового квантованного электромагнитного поля с одним двухуровневым атомом находящимся в резонаторе (описывает мазер и одноатомный лазер в зависимости от частоты резонатора). Гамильтониан модели имеет вид:

$$\mathbf{H}_{JC} = \omega a^\dagger a + \omega_0 s^z + g(as^+ + a^\dagger s^-). \quad (1)$$

Здесь a, a^\dagger операторы уничтожения (рождения) моды (фотона) резонатора

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad (2)$$

ω – частота моды. Двухуровневый атом описывается операторами спина-1/2, удовлетворяющими перестановочным соотношениям алгебры $su(2)$:

$$[s^+, s^-] = 2s^z, \quad [s^z, s^\pm] = \pm s^\pm,$$

частота атомных переходов ω_0 . Член as^+ описывает поглощение фотона и переход атома из основного в возбужденное, а член $a^\dagger s^-$ переход атома в основное состояние с испусканием фотона, g -постоянная взаимодействия.

Модель (1) является модификацией модели Раби [7] с гамильтонианом

$$H_R = \omega a^+ a + gs^x(a + a^+) + \omega_0 s^z,$$

точный спектр которого был получен недавно с использованием дискретной симметрии и рекуррентных соотношений [8].

Модель Джейнса–Каммингса легко обобщается на случай N невзаимодействующих между собой атомов находящихся в резонаторе. Спиновые операторы

$$S^z = \sum_{j=1}^N s_j^z, \quad S^\pm = \sum_{j=1}^N s_j^\pm, \quad (3)$$

$$[s_i^+, s_j^-] = 2s_j^z \delta_{ij}, \quad [s_i^z, s_j^\pm] = \pm s_j^\pm \delta_{ij},$$

являются представлением алгебры $\text{su}(2)$, а модель описываемая гамильтонианом

$$\mathbf{H}_{TC} = \omega a^\dagger a + \omega_0 S^z + g(a^\dagger S^- + a S^+), \quad (4)$$

называется моделью Тэвиса–Каммингса [9].

Оператор Казимира

$$\mathbf{S}^2 = S^+ S^- + S^z(S^z - 1) \quad (5)$$

и оператор числа возбуждений

$$\mathbf{M} = a^\dagger a + S^z, \quad (6)$$

коммутируют с гамильтонианом (4):

$$[\mathbf{H}_{TC}, \mathbf{M}] = [\mathbf{H}_{TC}, \mathbf{S}^2] = 0.$$

Мы будем рассматривать гамильтониан модели в форме

$$\mathbf{H} = \frac{1}{g}(\mathbf{H}_{TC} - \omega \mathbf{M}) = \Delta S^z + a^\dagger S^- + a S^+, \quad (7)$$

где $\Delta = g(\omega_0 - \omega)/2$ называется детьюнингом (расстройкой).

В нашей статье мы сосредоточимся на подходе основанном на квантовом методе обратной задачи. Использование данного метода позволяет не только находить собственные вектора гамильтонианов и вычислять их уровни энергий, но и выявлять связи между различными интегрируемыми моделями.

Определим операторы

$$\begin{aligned} X^z(\lambda) &= \frac{1}{2}(\Delta - \lambda) + \frac{S^z}{\epsilon - \lambda}, \\ X^+(\lambda) &= a^\dagger + \frac{S^+}{\epsilon - \lambda}, \quad X^-(\lambda) = a + \frac{S^-}{\epsilon - \lambda}. \end{aligned} \quad (8)$$

Операторы уничтожения и рождения фотонов a, a^\dagger удовлетворяют коммутационным соотношениям (2), а операторы спина S^z, S^\pm (3), соответственно. Переменные $\lambda, \epsilon \in \mathbb{C}$. Легко проверить, что введенные

операторы удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned}[X^+(\lambda), X^-(\mu)] &= \frac{2}{\lambda - \mu} (X^z(\lambda) - X^z(\mu)), \\ [X^z(\lambda), X^\pm(\mu)] &= \pm \frac{1}{\lambda - \mu} (X^\pm(\lambda) - X^\pm(\mu)), \\ [X^+(\lambda), X^+(\mu)] &= [X^-(\lambda), X^-(\mu)] = [X^z(\lambda), X^z(\mu)] = 0.\end{aligned}\quad (9)$$

По аналогии с оператором Казимира (5) введем семейство операторов, зависящих от произвольного комплексного числа λ

$$t(\lambda) = (X^z(\lambda))^2 + \frac{1}{2} X^+(\lambda) X^-(\lambda) + \frac{1}{2} X^-(\lambda) X^+(\lambda). \quad (10)$$

Наиболее важное свойство этих операторов заключается в том, что они коммутируют между собой при произвольных $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$:

$$[t(\lambda), t(\mu)] = 0.$$

Это свойство проверяется прямым вычислением с помощью коммутационных соотношений (9). Оператор $t(\lambda)$ является производящей функцией интегралов движения.

Если положить $\epsilon = 0$ в (8), то получим следующее представление

$$t(\lambda) = \lambda^{-2} \mathbf{S}^2 - \lambda^{-1} \mathbf{H} + \left(\frac{\Delta^2}{4} + \frac{1}{2} + \mathbf{M} \right) - \frac{\Delta}{2} \lambda + \frac{\lambda^2}{4}, \quad (11)$$

где

$$\mathbf{H} = \Delta S^z + a^\dagger S^- + a S^+,$$

это гамильтониан модели Тэвиса–Каммингса (4), \mathbf{M} – оператор числа возбуждений (6), а \mathbf{S}^2 – оператор Казимира (5).

Поскольку

$$[t(\lambda), \mathbf{H}] = [t(\lambda), \mathbf{M}] = [t(\lambda), \mathbf{S}^2] = 0, \quad (12)$$

то зная собственные вектора и собственные значения оператора $t(\lambda)$ мы решим задачу диагонализации гамильтониана модели Тэвиса–Каммингса.

Заметим, что коммутационные соотношения введенных операторов $X^z(\lambda), X^\pm(\lambda)$ можно записать в более компактной форме, определив операторнозначную матрицу (L – оператор):

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} -X^z(\lambda) & X^+(\lambda) \\ X^-(\lambda) & X^z(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Коммутационные соотношения между её матричными элементами записываются в виде

$$[L(\lambda) \otimes I, I \otimes L(\mu)] = [\mathbf{r}(\lambda, \mu), L(\lambda) \otimes I + I \otimes L(\mu)] \quad (14)$$

с числовой 4×4 *r-матрицей* равной

$$\mathbf{r}(\lambda, \mu) = \frac{1}{\lambda - \mu} \mathcal{P}; \quad \mathcal{P}_{kl}^{ij} = \delta_{il} \delta_{kj}. \quad (15)$$

Оператор (10) представим в виде

$$t(\lambda) = \frac{1}{2} \text{Tr} L^2(\lambda). \quad (16)$$

Различные реализации введенных операторов (8) определяют различные интегрируемые модели. Наиболее известной является модель Годена с гамильтонианом [10]:

$$H_i = \Delta s_i^z - \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{\epsilon_i - \epsilon_j} (2s_i^z s_j^z + s_i^+ s_j^- + s_i^- s_j^+), \quad (17)$$

описывающая взаимодействие изолированного спина с окружающими невзаимодействующими спинами. Операторы $X^z(\lambda)$, $X^\pm(\lambda)$ имеют вид

$$X^z(\lambda) = \frac{\Delta}{2} + \sum_{j=1}^N \frac{s_j^z}{\epsilon_j - \lambda}, \quad X^\pm(\lambda) = \sum_{j=1}^N \frac{s_j^\pm}{\epsilon_j - \lambda}. \quad (18)$$

Другая, не менее известная модель, определяемая данным представлением

$$H = 2 \sum_j \epsilon_j s_j^z - \frac{1}{2} \sum_{j,l} (s_j^+ s_l^- + s_j^- s_l^+), \quad (19)$$

называется моделью Ричардсона [11]. Гамильтониан данной модели, записанный через фермионное представление спиновых операторов

$$\begin{aligned} s_j^- &= c_{j\downarrow} c_{j\uparrow}, & s_j^+ &= c_{j\uparrow}^\dagger c_{j\downarrow}^\dagger, \\ s_j^0 &= \frac{1}{2} (c_{j\uparrow}^\dagger c_{j\uparrow} + c_{j\downarrow}^\dagger c_{j\downarrow} - 1), \end{aligned} \quad (20)$$

используется при описании малых металлических зерен в теории сверхпроводимости [12]. В (20) фермионные операторы удовлетворяют антисимметрическим соотношениям

$$[c_{j\alpha}, c_{k\beta}^+]_+ = \delta_{jk} \delta_{\alpha\beta} \quad (j, k = 1, \dots, N; \alpha, \beta = \uparrow, \downarrow).$$

Возможна также деформация модели Джейнса–Каммингса [13] с заменой осциллятора на q – осцилляторы [14]. В этом случае алгебра токов (9) обобщается на тригонометрический случай.

Уравнения движения модели Тэвиса–Каммингса

$$i\partial_t s_n^{-,z} = [s_n^{-,z}, \mathbf{H}], \quad i\partial_t a = [a, \mathbf{H}],$$

в явном виде

$$\begin{aligned} i\partial_t s_n^z &= s_n^+ a - a^\dagger s_n^-, \\ i\partial_t s_n^- &= \Delta s_n^- - 2s_n^z a, \\ i\partial_t a &= \sum_{j=1}^N s_j^-, \end{aligned} \tag{21}$$

называются квантовыми редуцированными уравнениями Максвелла–Блоха N -атомного лазера, в которых не учитывается зависимость поля от координаты, а атомы находятся в фиксированных точках.

Для того чтобы найти спектр модели ТК методом алгебраического анзатца Бете (КМОЗ) [1–3] определим "вакуумное" состояние

$$|\Omega_S\rangle = |0\rangle \otimes |S, -S\rangle, \tag{22}$$

где $|0\rangle$ – это фоковский вакуум: $a|0\rangle = 0$; состояние $|S, -S\rangle$ есть порождающий вектор неприводимого представления спина S : $S^-|S, -S\rangle = 0$, $0 \leq S \leq \frac{N}{2}$, $\mathbf{S}^2|\Omega_S\rangle = S(S+1)|\Omega_S\rangle$, $\mathbf{M}|\Omega_S\rangle = -S|\Omega_S\rangle$. Данное состояние является собственным вектором оператора $t(\lambda)$:

$$t(\lambda)|\Omega_S\rangle = k(\lambda)|\Omega_S\rangle,$$

где

$$\begin{aligned} k(\lambda) &= x^2(\mu) - \frac{\partial}{\partial \mu} x(\mu) \\ &= \frac{\lambda^2}{4} - \frac{\Delta}{2}\lambda + \left(\frac{\Delta^2}{4} + \frac{1}{2} - S \right) + \lambda^{-1}\Delta S + S(S+1)\lambda^{-2}. \end{aligned} \tag{23}$$

Из определения операторов $X^-(\lambda)$, $X^z(\lambda)$ следует

$$\begin{aligned} X^-(\lambda)|\Omega_S\rangle &= \left(a - \frac{S^-}{\lambda} \right) |\Omega_S\rangle = 0, \\ X^z(\lambda)|\Omega_S\rangle &= \left(\frac{1}{2}(\Delta - \lambda) - \frac{S^z}{\lambda} \right) |\Omega_S\rangle = x(\lambda)|\Omega_S\rangle, \end{aligned} \tag{24}$$

где

$$x(\lambda) = \frac{1}{2} \left(2 \frac{S}{\lambda} - \lambda + \Delta \right). \quad (25)$$

Собственные M -частичные вектора оператора $t(\lambda)$ строятся в традиционной для алгебраического ансатца Бете форме

$$|\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M)\rangle = \prod_{j=1}^M X^+(\lambda_j) |\Omega_S\rangle. \quad (26)$$

Волновая функция $|\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M)\rangle$ является симметрической функцией своих аргументов в силу коммутативности $[X^+(\lambda), X^+(\mu)] = 0$. Состояние (26) удовлетворяет соотношениям:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} |\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M)\rangle &= (M - S) |\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M)\rangle, \\ \mathbf{S}^2 |\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M)\rangle &= S(S + 1) |\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M)\rangle. \end{aligned} \quad (27)$$

Применяя перестановочные соотношения операторов $X^\pm(\lambda)$, $X^z(\lambda)$ можно показать что

$$\begin{aligned} t(\mu) |\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M)\rangle &= \Theta_M(\mu) |\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M)\rangle \\ &+ \sum_{j=1}^M \frac{f_j}{\mu - \lambda_j} |\Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \mu, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_M)\rangle, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\Theta_M(\mu) = x^2(\mu) - \frac{\partial}{\partial \mu} x(\mu) - 2 \sum_{j=1}^M \frac{1}{\mu - \lambda_j} \left\{ x(\mu) - \sum_{k \neq j}^M \frac{1}{\lambda_j - \lambda_k} \right\}, \quad (29)$$

$$f_j = x(\lambda_j) - \sum_{k \neq j}^M \frac{1}{\lambda_j - \lambda_k}. \quad (30)$$

Если все $f_j = 0$, то $|\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M)\rangle$ является собственным вектором $t(\mu)$, а уравнения

$$x(\lambda_j) = \sum_{k \neq j}^M \frac{1}{\lambda_j - \lambda_k} \quad (31)$$

называются уравнениями Бете. Собственные значения оператора $t(\mu)$ на собственном векторе $|\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M)\rangle$ равны

$$\Theta_M(\mu) = x^2(\mu) - \frac{\partial}{\partial \mu} x(\mu) - 2 \sum_{j=1}^M \frac{x(\mu) - x(\lambda_j)}{\mu - \lambda_j}. \quad (32)$$

Для модели ТК уравнения Бете имеют вид

$$\frac{2S}{\lambda_n} - \lambda_n + \Delta = \sum_{j=1, j \neq n}^M \frac{2}{\lambda_n - \lambda_j}; \quad 1 \leq n \leq M. \quad (33)$$

Существует $K = \min(2S, M) + 1$ по модулю группы перестановок решений этих уравнений. Один из наборов решений уравнений Бете [15] приведен на (рис. 2).

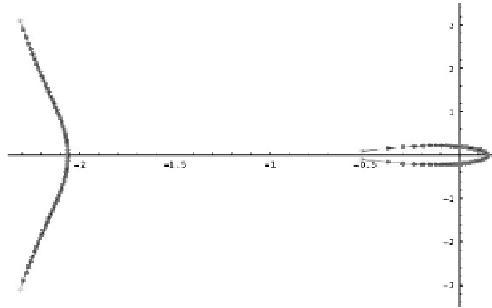


Рис. 2. Один из наборов решений уравнений Бете

Из разложения оператора $t(\lambda)$ (11) следует выражение для собственных значений энергии

$$E_{S,M}^\sigma = -S \left(\Delta + 2 \sum_{j=1}^M \frac{1}{\lambda_j^\sigma} \right). \quad (34)$$

Индекс σ обозначает различные наборы решений уравнений Бете. Заметим, что из равенства $\sum_{n,j=0}^M (\lambda_n - \lambda_j)^{-1} = 0$, и уравнений (33) следует равенство $\sum \frac{2S}{\lambda_n} + M\Delta = \sum \lambda_n$ и альтернативное выражение для собственных значений энергии

$$E_{S,M}^\sigma = \Delta(M - S) - \sum_{j=1}^M \lambda_j^\sigma. \quad (35)$$

Уравнения Бете для модели Годена имеют вид [10]:

$$\Delta - \sum_{j=1}^N \frac{1}{\epsilon_j - \lambda_n} = \sum_{k=1, k \neq n}^M \frac{2}{\lambda_n - \lambda_k},$$

а собственные значения энергии вычисляются по формуле

$$E_i = \frac{1}{2} \left\{ -\Delta - \sum_{n=1, n \neq j}^N \frac{1}{\epsilon_j - \epsilon_n} + 2 \sum_{k=1}^M \frac{1}{\epsilon_j - \lambda_k} \right\}.$$

Рассмотрим полином, определяемый решениями уравнений Бете:

$$P(\lambda) = C \prod_{j=1}^M (\lambda_j - \lambda), \quad C^{-1} = \prod_{j=1}^M \lambda_j. \quad (36)$$

Можно показать что этот полином удовлетворяет следующему уравнению:

$$P''(\lambda) - 2x(\lambda)P'(\lambda) + 2 \sum_{j=1}^M \frac{x(\lambda) - x(\lambda_j)}{\lambda - \lambda_j} P(\lambda) = 0. \quad (37)$$

Для модели ТК данное уравнение приводится к виду

$$\lambda P''(\lambda) + (\lambda^2 - \Delta\lambda - 2S)P'(\lambda) + (E_{S,M} + \Delta S - M\lambda)P(\lambda) = 0. \quad (38)$$

Модель Джейнса–Каммингса (1) является особенно примечательной моделью квантовой оптики. Для неё ответы можно получить в явном виде при произвольной постоянной взаимодействия g . Она демонстрирует некоторые истинно квантово-механические эффекты, такие как коллапс атомной инверсии с последующими периодическими возрождениями.

Воспользуемся уравнением (38) $S = 1/2$ для вычисления спектра модели. Полагая $\lambda = 0$ получим равенство

$$-P'(0) + \left(E + \frac{\Delta}{2} \right) P(0) = 0.$$

Дифференцируя уравнение по λ и полагая в нём $\lambda = 0$ имеем

$$\left(E - \frac{\Delta}{2} \right) P'(0) = M P(0).$$

Из этих равенств следует выражение для спектра модели

$$E_{\frac{1}{2},M}^\pm = \pm \sqrt{\frac{\Delta^2}{4} + M}.$$

Собственные векторы модели равны

$$\begin{aligned}
 |\Phi^\pm(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M)\rangle &= \prod_{j=1}^M \left(a^\dagger - \frac{1}{\lambda_j^\pm} s^+ \right) |\Omega_{\frac{1}{2}}\rangle \\
 &= \left\{ (a^\dagger)^M - (a^\dagger)^{M-1} s^+ \sum_{j=1}^M \frac{1}{\lambda_j^\pm} \right\} |\Omega_{\frac{1}{2}}\rangle \quad (39) \\
 &= \left\{ (a^\dagger)^M + \left[E_{\frac{1}{2}, M}^\pm + \frac{\Delta}{2} \right] (a^\dagger)^{M-1} s^+ \right\} |\Omega_{\frac{1}{2}}\rangle.
 \end{aligned}$$

Вычислим атомную инверсию, которая определяется как среднее $\langle \omega | e^{it\mathbf{H}} S^z e^{-it\mathbf{H}} | \omega \rangle$ по состоянию $|\omega\rangle$, в котором все атомы находятся в основном состоянии $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$, а поле в когерентном $|\alpha\rangle$ ($\alpha \in \mathbb{C}$). Когерентное состояние определяется как собственное состояние оператора уничтожения

$$\begin{aligned}
 a |\alpha\rangle &= \alpha |\alpha\rangle, \\
 |\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.
 \end{aligned}$$

Состояние

$$|\omega\rangle = |\alpha\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle.$$

Для атомной инверсии получим

$$\begin{aligned}
 W(t) &= \langle \omega | e^{it\mathbf{H}} S^z e^{-it\mathbf{H}} | \omega \rangle \\
 &= - \sum_{M=0}^{\infty} \frac{e^{-\langle M \rangle}}{M!} \frac{4}{(M + \frac{\Delta^2}{4})} \left\{ \frac{\Delta^2}{8} + M \cos \left(t \sqrt{M + \frac{\Delta^2}{4}} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Здесь $\langle M \rangle = \langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \rangle$ – среднее число фотонов в системе. На (рис. 3) приведена эволюция атомной инверсии $W(t)$ во времени [16].

В середине прошлого века один из основоположников квантовой оптики Р. Дике указал на возможность существования сверхизлучения [17]. Рассмотрим модель ТК. Интенсивность излучения [18] определяется как среднее

$$J = J_0 \langle S, m | S^+ S^- | S, m \rangle = J_0 (S + m)(S - m + 1) \quad (40)$$

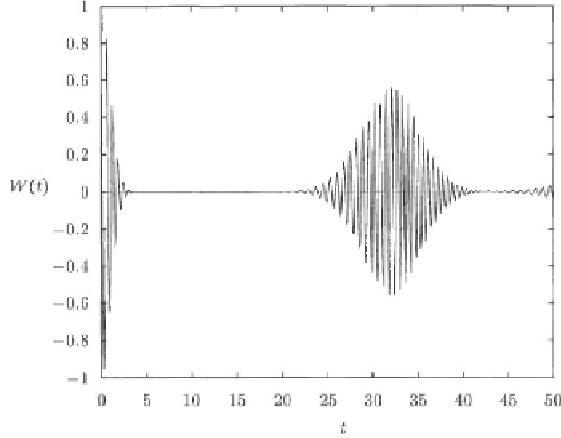


Рис. 3. Эволюция атомной инверсии $W(t)$ во времени.

по состоянию $|S, m\rangle$:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^2 |S, m\rangle &= S(S+1) |S, m\rangle, \\ S^z |S, m\rangle &= m |S, m\rangle. \end{aligned} \tag{41}$$

Спин $0 \leq S \leq N/2$, а $m = -S, -S+1, \dots, S$. Числа m имеют смысл полуразности между населенностями верхнего и нижнего уровней атома $m = (n_\uparrow - n_\downarrow)/2$, причем $n_\uparrow + n_\downarrow = N$. В (40) J_0 – это интенсивность спонтанного излучения одного изолированного атома.

Из (40) следует, что если система инвертирована полностью, т.е., если $S = m = N/2$, то интенсивность излучения в таком состоянии равна

$$J = J_0 \left\langle \frac{N}{2}, \frac{N}{2} | S^+ S^- | \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \right\rangle = J_0 N.$$

Это означает, что каждый атом излучает независимо от других и интенсивности отдельных излучателей складываются. Коллективное излучение в полностью инвертированном состоянии атомной системы отсутствует.

В случае равной заселенности верхнего и нижнего уровней $S = N/2$, $m = 0$ имеем

$$J = J_0 \left\langle \frac{N}{2}, 0 | S^+ S^- | \frac{N}{2}, 0 \right\rangle \approx J_0 \frac{N^2}{4}.$$

Этот результат означает, что возможно коллективное спонтанное излучение N атомов в системе с гамильтонианом (4).

Рассмотрим теперь модель ТК, к гамильтониану которой добавлен член, учитывающий зависимость атомных переходов от числа фотонов [19]:

$$\mathbf{H}_{ST} = \Delta S^z + (a^\dagger S^- + aS^+) + ca^\dagger a S^z, \quad (42)$$

где константа взаимодействия $c \geq 0$. Отметим, что последний член в правой части (42) описывает штарковский сдвиг. Для полу-целого спина ($S=1/2$) гамильтониан (42) легко преобразовать к виду

$$\mathbf{H}_K = \tilde{\Delta} S^z + (a^\dagger S^- + aS^+) - ca^\dagger a^\dagger aa.$$

В этом случае модель описывает систему с керровской нелинейностью.

Для того чтобы применить КМОЗ к решению задачи рассмотрим два L -оператора:

$$\mathbf{L}_B(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - \Delta - c^{-1} - ca^\dagger a & a^\dagger \\ a & -c^{-1} \end{pmatrix}, \quad (43)$$

$$\mathbf{L}_S(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - cS^z & cS^+ \\ cS^- & \lambda + cS^z \end{pmatrix}, \quad (44)$$

где спектральный параметр $\lambda \in \mathbb{C}$. Определим матрицу монодромии

$$\mathbf{T}(\lambda) = \mathbf{L}_B(\lambda)\mathbf{L}_S(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}(\lambda) & \mathbf{B}(\lambda) \\ \mathbf{C}(\lambda) & \mathbf{D}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (45)$$

и матрицу перехода

$$\tau(\lambda) = Tr\mathbf{T}(\lambda) = \mathbf{A}(\lambda) + \mathbf{D}(\lambda). \quad (46)$$

В явном виде

$$\tau(\lambda) = \lambda^2 - \lambda(c\mathbf{M} + \Delta + 2c^{-1}) + c\mathbf{H}, \quad (47)$$

где \mathbf{M} -оператор числа частиц, а $\mathbf{H} = c^{-1}\tau(0)$ гамильтониан модели. Если

$$[\tau(\lambda), \tau(\mu)] = 0 \quad (48)$$

для произвольных $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, то зная собственные вектора матрицы перехода мы решим задачу диагонализации гамильтониана. Введенные L -операторы удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\lambda, \mu) \mathbf{L}_B(\lambda) \otimes \mathbf{L}_B(\mu) &= \mathbf{L}_B(\mu) \otimes \mathbf{L}_B(\lambda) \mathbf{R}(\lambda, \mu), \\ \mathbf{R}(\lambda, \mu) \mathbf{L}_S(\lambda) \otimes \mathbf{L}_S(\mu) &= \mathbf{L}_S(\mu) \otimes \mathbf{L}_S(\lambda) \mathbf{R}(\lambda, \mu), \end{aligned} \quad (49)$$

где числовая R -матрица

$$\mathbf{R}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} f(\mu, \lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(\mu, \lambda) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & g(\mu, \lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(\mu, \lambda) \end{pmatrix}, \quad (50)$$

с матричными элементами

$$f(\mu, \lambda) = 1 - \frac{c}{\mu - \lambda}, \quad g(\mu, \lambda) = -\frac{c}{\mu - \lambda}.$$

Матричные элементы операторнозначных матриц \mathbf{L}_B , \mathbf{L}_S взаимно коммутируют. Из (49) следует, что

$$\mathbf{R}(\lambda, \mu) \mathbf{T}(\lambda) \otimes \mathbf{T}(\mu) = \mathbf{T}(\mu) \otimes \mathbf{T}(\lambda) \mathbf{R}(\lambda, \mu). \quad (51)$$

Данное соотношение определяет алгебру матричных элементов матрицы монодромии $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ [5]. Коммутативность $[\tau(\lambda), \tau(\mu)] = 0$, является его следствием. Для вычисления спектра модели нам понадобятся три коммутационных соотношения из шестнадцати (51):

$$[\mathbf{B}(\lambda), \mathbf{B}(\mu)] = 0$$

$$\mathbf{A}(\mu) \mathbf{B}(\lambda) = f(\mu, \lambda) \mathbf{B}(\lambda) \mathbf{A}(\mu) + g(\lambda, \mu) \mathbf{B}(\mu) \mathbf{A}(\lambda);$$

$$\mathbf{D}(\mu) \mathbf{B}(\lambda) = f(\lambda, \mu) \mathbf{B}(\lambda) \mathbf{D}(\mu) + g(\mu, \lambda) \mathbf{B}(\mu) \mathbf{D}(\lambda).$$

Отметим, что алгебра операторов $X^z(\lambda)$, $X^\pm(\lambda)$ (14) следует из введенной квадратичной в пределе $c \rightarrow 0$.

Собственные векторы матрицы перехода $\tau(\lambda)$ (46) ищутся в виде

$$| \Psi_M(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M) \rangle = \prod_{j=1}^M \mathbf{B}(\lambda_j) | \Omega_S \rangle, \quad (52)$$

где вакуумное состояние $|\Omega_S\rangle = |0\rangle |S, -S\rangle$ является собственным вектором операторов \mathbf{A}, \mathbf{D} :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\lambda) |\Omega_S\rangle &= a(\lambda) |\Omega_S\rangle = (\lambda - \Delta - c^{-1})(\lambda + cS) |\Omega_S\rangle, \\ \mathbf{D}(\lambda) |\Omega_S\rangle &= d(\lambda) |\Omega_S\rangle = -c^{-1}(\lambda - cS) |\Omega_S\rangle; \\ \mathbf{C}(\lambda) |\Omega_S\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (53)$$

Воспользовавшись коммутационными соотношениями операторов \mathbf{B} с операторами \mathbf{A}, \mathbf{D} , получим

$$\begin{aligned} \tau(\mu) \prod_{j=1}^M \mathbf{B}(\lambda_j) |\Omega_S\rangle &= (\mathbf{A}(\mu) + \mathbf{D}(\mu)) \prod_{j=1}^M \mathbf{B}(\lambda_j) |\Omega_S\rangle \\ &= (\Lambda + \tilde{\Lambda}) \prod_{j=1}^M \mathbf{B}(\lambda_j) |\Omega_S\rangle + \sum_{n=1}^M (\Lambda_n + \tilde{\Lambda}_n) \mathbf{B}(\mu) \prod_{j=1, j \neq n}^M \mathbf{B}(\lambda_j) |\Omega_S\rangle. \end{aligned} \quad (54)$$

Коэффициенты равны

$$\begin{aligned} \Lambda &= a(\mu) \prod_{j=1}^M f(\mu, \lambda_j); \quad \Lambda_n = a(\lambda_n) g(\lambda_n, \mu) \prod_{j=1, j \neq n}^M f(\lambda_n, \lambda_j); \\ \tilde{\Lambda} &= d(\mu) \prod_{j=1}^M f(\lambda_j, \mu); \quad \tilde{\Lambda}_n = d(\lambda_n) g(\mu, \lambda_n) \prod_{j=1, j \neq n}^M f(\lambda_j, \lambda_n). \end{aligned} \quad (55)$$

Состояние $|\Psi_M(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M)\rangle$, является собственным вектором матрицы перехода, если $\Lambda_n + \tilde{\Lambda}_n = 0$. Это условие определяют систему уравнений Бете на параметры λ_i :

$$\frac{a(\lambda_n)}{d(\lambda_n)} = \prod_{j=1, j \neq n}^M \frac{f(\lambda_j, \lambda_n)}{f(\lambda_n, \lambda_j)}; \quad n = 1, 2, \dots, M \quad (56)$$

Собственные значения матрицы перехода (46) равны

$$\theta_M(\mu) \equiv \Lambda + \tilde{\Lambda} = a(\mu) \prod_{j=1}^M f(\mu, \lambda_j) + d(\mu) \prod_{j=1}^M f(\lambda_j, \mu). \quad (57)$$

Для рассматриваемой модели матричный элемент R -матрицы (50) $f(\mu, \lambda) = 1 - c/(\mu - \lambda)$ и уравнения Бете имеют вид:

$$(1 + \Delta c - c\lambda_n) \frac{\lambda_n + cS}{\lambda_n - cS} = \prod_{j=1, j \neq n}^M \frac{\lambda_n - \lambda_j + c}{\lambda_n - \lambda_j - c}; \quad 0 \leq S \leq \frac{N}{2}, \quad (58)$$

а M – частичные энергии этого состояния, согласно представлению (47), равны

$$\begin{aligned} E_{S,M} &= c^{-1} \theta_M(0) \\ &= c^{-1} S \left\{ \prod_{j=1}^M \left(1 - \frac{c}{\lambda_j}\right) - (c\Delta + 1) \prod_{j=1}^M \left(1 + \frac{c}{\lambda_j}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (59)$$

Введеная R -матрица (50) удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера. В форме группы кос оно имеет вид

$$\begin{aligned} &(I \otimes R(\lambda, \mu)) (R(\lambda, \nu) \otimes I) (I \otimes R(\mu, \nu)) \\ &= (R(\mu, \nu) \otimes I) (I \otimes R(\lambda, \nu)) (R(\lambda, \mu) \otimes I). \end{aligned}$$

С R -матрицей (50) связаны многие интегрируемые модели 1 + 1-мерной квантовой теории поля и статистической физики. Одна из них это модель Дике, описывающая взаимодействие электромагнитного поля $\mathcal{E}(x)$ ($[\mathcal{E}(x), \mathcal{E}^\dagger(y)] = \delta(x-y)$), зависящего от координаты, с двухуровневыми атомами, расположенными в фиксированных точках. Гамильтониан модели имеет вид [20]:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{i}{2} \int_0^L dx \left[(\partial_x \mathcal{E}^\dagger(x)) \mathcal{E}(x) - \mathcal{E}^\dagger(x) \partial_x \mathcal{E}(x) \right] \\ &+ \sqrt{g} \sum_{j=1}^N [s_n^+ \mathcal{E}(x_n) + \mathcal{E}^\dagger(x_n) s_n^-]. \end{aligned} \quad (60)$$

Собственные M -частичные энергии модели равны

$$E_M(\lambda) = - \sum_{j=1}^M \lambda_j,$$

где λ_j удовлетворяют уравнениям Бете

$$e^{i\lambda_l L} \left(\frac{\lambda_l - i\frac{g}{2}}{\lambda_l + i\frac{g}{2}} \right)^N = \prod_{j=1, j \neq l}^M \frac{\lambda_l - \lambda_j - ig}{\lambda_l - \lambda_j + ig}.$$

Уравнения движения модели имеют вид

$$\begin{aligned}\partial_t s_n^z &= i\sqrt{g} (\mathcal{E}^\dagger(x_n) s_n^- - s_n^+ \mathcal{E}(x_n)), \\ \partial_t s_n^- &= 2i\sqrt{g} s_n^z \mathcal{E}(x_n), \\ \partial_t \mathcal{E}(x) + \partial_x \mathcal{E}(x) &= -i\sqrt{g} s_n^- \delta(x - x_n),\end{aligned}$$

Для непрерывно распределенных атомов гамильтониан модели (60) принимает вид

$$\begin{aligned}\mathbf{H} = & \frac{i}{2} \int_0^L dx [(\partial_x \mathcal{E}^\dagger(x)) \mathcal{E}(x) - \mathcal{E}^\dagger(x) \partial_x \mathcal{E}(x)] \\ & + \sqrt{g} \int_0^L dx [s(x)^+ \mathcal{E}(x) + \mathcal{E}^\dagger(x) s^-(x)],\end{aligned}\quad (61)$$

а уравнения Бете

$$e^{i\lambda_l L} = \prod_{j=1, j \neq l}^N \frac{\lambda_l - \lambda_j - ig}{\lambda_l - \lambda_j + ig}.$$

Уравнения движения

$$\begin{aligned}\partial_t s^z(x) &= i\sqrt{g} (\mathcal{E}^\dagger(x) s^-(x) - s^+(x) \mathcal{E}(x)), \\ \partial_t s^-(x) &= 2i\sqrt{g} s^z(x) \mathcal{E}(x), \\ \partial_t \mathcal{E}(x) + \partial_x \mathcal{E}(x) &= -i\sqrt{g} s^-(x),\end{aligned}$$

в классическом пределе, т.е. после замены операторов на функции, называются редуцированными уравнениями Максвелла–Блоха и являются одними из основных уравнений нелинейной оптики.

Другая известная модель, это изотропный магнетик Гейзенберга или XXX цепочка [1, 4], определяемая гамильтонианом

$$H = \sum_{n=0}^N \left\{ s_n^+ s_{n+1}^- + s_n^- s_{n+1}^+ + s_n^z s_{n+1}^z - \frac{1}{4} \right\}. \quad (62)$$

Собственные энергии модели

$$E_M = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^M \frac{1}{\lambda_n^2 + \frac{1}{4}}.$$

Уравнения Бете

$$\left(\frac{\lambda_n - \frac{i}{2}}{\lambda_n + \frac{i}{2}} \right)^N = \prod_{j=1, j \neq n}^M \frac{\lambda_n - \lambda_j - i}{\lambda_n - \lambda_j + i}; \quad 1 \leq n \leq M. \quad (63)$$

Модель бозе-газа [21] с гамильтонианом

$$\hat{H} = \int \left\{ \psi^\dagger(x) \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi(x) + \frac{g}{2} \psi^\dagger(x) \psi^\dagger(x) \psi(x) \psi(x) \right\} dx, \quad (64)$$

в настоящее время активно используется в теории бозе-энштейновской конденсации в магнитно-оптических ловушках. Собственные энергии модели

$$E_M = \sum_{j=1}^M \lambda_j^2. \quad (65)$$

Уравнения Бете

$$e^{i\lambda_j L} = - \prod_{k=1}^M \frac{\lambda_j - \lambda_k + i\frac{g}{2}}{\lambda_j - \lambda_k - i\frac{g}{2}}; \quad j = 1, \dots, M. \quad (66)$$

Эти уравнения решаются точно в пределах $g \rightarrow \infty$ и $g \rightarrow 0$.

Предел непроницаемых бозонов ($g = \infty$) называется пределом свободных фермионов или газом Тонкса–Жирардо. Уравнения Бете принимают вид

$$e^{i\lambda_j L} = (-1)^{M+1}. \quad (67)$$

Энергия M -частичного состояния с наименьшей энергией равна

$$E_M = \sum_{j=1}^M \lambda_j^2 = \frac{\pi^2}{3L^2} M(M^2 - 1). \quad (68)$$

В пределе свободных бозонов ($g \rightarrow 0$) после замены ($\lambda_j = \sqrt{\frac{g}{L}} \mu_j$) уравнения Бете в скейлинговом пределе становятся уравнениями на нули полиномов Эрмита:

$$\mu_j = \sum_{k \neq j}^M \frac{1}{\mu_j - \mu_k}, \quad j = 1, \dots, M. \quad (69)$$

Энергия основного состояния в этом пределе равна

$$E_M = \frac{g}{2L} M(M - 1). \quad (70)$$

3. АТОМНЫЙ ЛАЗЕР И БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКАЯ КОНДЕНСАЦИЯ

В середине девяностых годов прошлого века был экспериментально реализован бозе конденсат атомарных газов, и появилась возможность создавать ансамбли когерентных атомов – атомов, находящихся в одном квантовом состоянии [22]. На (рис. 4) изображен атомный лазер. Наверху конденсат в магнитно-оптической ловушке. Импульсы когерентных атомов выводятся из бозе-эйнштейновского конденсата и ускоряются вниз гравитационным полем, а их облако расширяется из-за отталкивательного взаимодействия.

Гамильтониан бозе-газа в магнитно оптической ловушке имеет вид

$$H = \int d^3r \left\{ \psi^\dagger(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V^{\text{ext}}(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}) + \frac{g}{2} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \right\}, \quad (71)$$

где потенциал гармонической ловушки

$$V^{\text{ext}}(\mathbf{r}) = \frac{m}{2} (\Omega_1^2 \mathbf{r}_1^2 + \Omega_2^2 \mathbf{r}_2^2 + \Omega_3^2 \mathbf{r}_3^2)$$

с частотами Ω_i^2 . Как показывает эксперимент, в ситуации общего положения потенциал ловушки мало влияет на физику конденсации.

Рассмотрим однородный бозе-газ в кубическом ящике объема $V = L^3$ с периодическими граничными условиями и $V^{\text{ext}}(\mathbf{r}) = 0$. Тогда, представив полевой оператор в виде

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{k}}, \quad (72)$$

получим ($\epsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2m$):

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_k \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{g}{2V} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{k}, \mathbf{k}'} \hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}'}. \quad (73)$$

Предполагаем, что при достаточно низких температурах большинство частиц находятся в состоянии с нулевой модой $\mathbf{k} = 0$, и что частицы с $\mathbf{k} \neq 0$ взаимодействуют только с частицами нулевой моды [23].

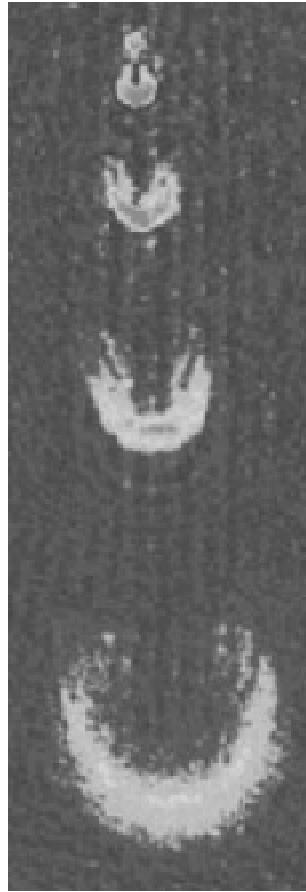


Рис. 4. Атомный лазер [22].

В этом приближении гамильтониан (73) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{g}{2V} \hat{N}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left(\epsilon_k + \frac{g}{V} \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \right) (\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}}) \\
 & + \frac{g}{2V} \left((\hat{a}_0^\dagger)^2 \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{-\mathbf{k}} + \hat{a}_0^2 \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger \right), \tag{74}
 \end{aligned}$$

где

$$\hat{N} = \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} = \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} (\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}}). \quad (75)$$

Уже в этом виде модель является точно-решаемой [24].

Операторы

$$\begin{aligned} K_{\mathbf{k}}^0 &= \frac{1}{2} (\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}} + 1), \\ K_{\mathbf{k}}^+ &= \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger \quad K_{\mathbf{k}}^- = \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{-\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (76)$$

и

$$\begin{aligned} B^0 &= \frac{1}{2} \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 + \frac{1}{4}, \\ B^+ &= -\frac{1}{2} (\hat{a}_0^\dagger)^2 \quad B^- = -\frac{1}{2} \hat{a}_0^2, \end{aligned} \quad (77)$$

образуют различные бозонные реализации $\text{su}(1, 1)$ алгебры: $[K^0, K^\pm] = \pm K^\pm$, $[K^+, K^-] = -2K^0$.

С помощью введенных операторов гамильтониан (74) можно представить в виде

$$H = \frac{g}{2V} \hat{N}^2 + \frac{g}{4} - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \epsilon_k - H_A, \quad [\hat{N}, H_A] = 0, \quad (78)$$

где

$$H_A = -gB^0 + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left(\epsilon_k - \frac{g}{2V} \right) K_{\mathbf{k}}^0 + \frac{g}{V} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} (2B^0 K_{\mathbf{k}}^0 - B^+ K_{\mathbf{k}}^- - B^- K_{\mathbf{k}}^+). \quad (79)$$

Этот гамильтониан принадлежит к классу гамильтонианов рассмотренных в предыдущем параграфе и решается методом алгебраического ансатца Бете. Уравнения Бете имеют вид

$$1 - \frac{1}{2V + 4\lambda_j} + \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{2V \epsilon_k - g(1 + 4\lambda_j)} = \sum_{l \neq j}^N \frac{1}{\lambda_j - \lambda_l}; \quad 1 \leq j \leq N, \quad (80)$$

а N -частичные энергии

$$E_N = C_N - \frac{2g}{v} \sum_{j=1}^N \lambda_j. \quad (81)$$

Так как рассмотренный гамильтониан коммутирует с оператором числа частиц, то в модели отсутствуют аномальные средние полевых операторов, а значит и бозе-конденсат.

Приближение Боголюбова [23] состоит в замене операторов $\hat{a}_0^\dagger, \hat{a}_0 \rightarrow \sqrt{N_0}$ при $N_0 \rightarrow \infty$, где N_0 – число частиц в нулевой моде ($D_0 = N_0/V$). В этой аппроксимации гамильтониан модели (79) принимает вид

$$\begin{aligned} H \simeq \frac{g}{2V} N^2 & - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} (\epsilon_k + gD_0) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} ((\epsilon_k + gD_0) 2K_{\mathbf{k}}^0 + gD_0 (K_{\mathbf{k}}^+ + K_{\mathbf{k}}^-)). \end{aligned} \quad (82)$$

Этот гамильтониан не коммутирует с оператором числа частиц и приводится к диагональному виду преобразованием Боголюбова:

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{k}}^0 &= (K_{\mathbf{k}}^+ + K_{\mathbf{k}}^-) \sinh 2\phi_k + 2K_{\mathbf{k}}^0 \cosh 2\phi_k, \\ J_{\mathbf{k}}^+ + J_{\mathbf{k}}^- &= (K_{\mathbf{k}}^+ + K_{\mathbf{k}}^-) \cosh 2\phi_k + 2K_{\mathbf{k}}^0 \sinh 2\phi_k, \\ J_{\mathbf{k}}^+ - J_{\mathbf{k}}^- &= K_{\mathbf{k}}^+ - K_{\mathbf{k}}^-. \end{aligned} \quad (83)$$

В новых переменных

$$\begin{aligned} H = E_0 + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} ((\epsilon_k + gD_0) \cosh 2\phi_{\mathbf{k}} + gD_0 \sinh 2\phi_{\mathbf{k}}) 2J_{\mathbf{k}}^0 \\ + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} ((\epsilon_k + gD_0) \sinh 2\phi_{\mathbf{k}} + gD_0 \cosh 2\phi_{\mathbf{k}}) (J_{\mathbf{k}}^+ + J_{\mathbf{k}}^-). \end{aligned}$$

Гамильтониан диагонален, если

$$\begin{aligned} (\epsilon_k + gD_0) \cosh 2\phi_k + gD_0 \sinh 2\phi_k &= E_k, \\ (\epsilon_k + gD_0) \sinh 2\phi_k + gD_0 \cosh 2\phi_k &= 0. \end{aligned}$$

Энергия квазичастиц с волновым вектором $\mathbf{k} \neq 0$

$$E_k = \sqrt{\frac{gD_0 \hbar^2 k^2}{m} + \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right)^2}.$$

В пределе $k \rightarrow 0$ возбуждения имеют вид звуковых волн

$$E_k \approx \sqrt{\frac{gD_0}{m}} \hbar k,$$

при $k \rightarrow \infty$ имеем спектр газа свободных частиц

$$E_k \approx \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + gD_0.$$

Температурный коррелятор полей на больших расстояниях при $T < T_c$ ведет себя как

$$\langle \psi^\dagger(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}) \rangle_T \rightarrow D_0 + \frac{k_B T m}{4\pi\hbar^2} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2} \quad (84)$$

и следовательно аномальное среднее

$$\langle \psi(\mathbf{r}) \rangle_T \neq 0.$$

При $T > T_c$ $\langle \psi(\mathbf{r}) \rangle_T = 0$.

Свойства Бозе-конденсата в вытянутых сигарообразных квази-одномерных ловушках хорошо описывается моделью одномерного бозе-газа. В случае малой плотности бозе-газа (сильного отталкивания между частицами) используется модель непроницаемых бозонов, что соответствует $g = \infty$ [26]. В случае высокой плотности (слабого отталкивания между частицами) исследуется предел свободных бозонов $g \sim 0$ [25].

Исследование бозе-конденсации в оптических решетках выявило актуальность решеточных обобщений модели бозе-газа. Одним из таких обобщений является модель сильно скоррелированных бозонов или q -бозонная обменная модель [27–29] с гамильтонианом

$$\hat{H}_q = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^N (B_n^\dagger B_{n+1} + B_n B_{n+1}^\dagger - 2N_n). \quad (85)$$

Три независимых оператора B_n , B_n^\dagger , и $N_n = N_n^\dagger$ q -бозонной алгебры [14] удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$[N_i, B_j^\dagger] = B_i^\dagger \delta_{ij}, \quad [N_i, B_j] = -B_i \delta_{ij}, \quad [B_i, B_j^\dagger] = q^{-2N_i} \delta_{ij}, \quad (86)$$

где $q = e^\gamma$ с вещественной $\gamma > 0$. Введенная алгебра реализуется на пространстве Фока

$$\begin{aligned} B^\dagger | n \rangle &= \sqrt{[n+1]} | n+1 \rangle, \\ B | n \rangle &= \sqrt{[n]} | n-1 \rangle, \\ N | n \rangle &= n | n \rangle, \end{aligned}$$

где $[n] = (1 - q^{-2n})/(1 - q^{-2})$. Существует представление q -бозонов через обычные осцилляторы ($[b_j, b_k^\dagger] = \delta_{jk}$)

$$B_j = (B_j^\dagger)^\dagger = \sqrt{\frac{[N_j + 1]}{N_j + 1}} b_j, \quad N_j = b_j^\dagger b_j.$$

Для $q \rightarrow 1$ ($\gamma \rightarrow 0$) q -бозоны становятся обычными бозонами $B_j \rightarrow b_j$, $B_j^\dagger \rightarrow b_j^\dagger$, и q -бозонная модель становится линейной бозонной моделью

$$\hat{H}_b = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^N (b_n^\dagger b_{n+1} + b_n b_{n+1}^\dagger - 2N_n).$$

В пределе сильной связи $q = \infty$ ($\gamma = \infty$) q -бозонные операторы переходят в операторы экспоненциальной фазы ϕ , ϕ^\dagger , N

$$[N_i, \phi_j] = -\phi_i \delta_{ij}, \quad [N_i, \phi_j^\dagger] = \phi_i^\dagger \delta_{ij}, \quad [\phi_i, \phi_j^\dagger] = \pi_i \delta_{ij}, \quad (87)$$

где $\pi_j = (\langle 0 | 0 \rangle \langle 0 |)_j$. В этом пределе q -бозонный гамильтониан становится гамильтонианом фазовой модели [30]:

$$\hat{H}_{ph} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^N (\phi_n^\dagger \phi_{n+1} + \phi_n \phi_{n+1}^\dagger - 2N_n). \quad (88)$$

В непрерывном пределе, когда постоянная решетки $\delta \rightarrow 0$, причем $n\delta \rightarrow x$, $M\delta \rightarrow L$, $\gamma = \frac{1}{4}\delta g$ из (85) следует гамильтониан бозе-газа (64):

$$\hat{H}_{BG} = \int_0^L \left\{ \psi^\dagger(x) \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi(x) + \frac{g}{2} \psi^\dagger(x) \psi^\dagger(x) \psi(x) \psi(x) \right\} dx.$$

L -оператор q -бозонной модели в n -ом узле решетки

$$L_{QB}(n | u) = \begin{pmatrix} u^{-1} & \sqrt{1 - q^{-2}} B_n^\dagger \\ \sqrt{1 - q^{-2}} B_n & u \end{pmatrix}, \quad (89)$$

удовлетворяет билинейному соотношению

$$R(u, v)L(n | u) \otimes L(n | v) = L(n | v) \otimes L(n | u)R(u, v)$$

с R -матрицей

$$R(u, v) = \begin{pmatrix} f(v, u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(v, u) & q^{-1} & 0 \\ 0 & q & g(v, u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(v, u) \end{pmatrix}, \quad (90)$$

$$f(v, u) = \frac{u^2 q - v^2 q^{-1}}{u^2 - v^2}; \quad g(v, u) = \frac{uv}{u^2 - v^2} (q - q^{-1}).$$

Матрица монодромии

$$T(u) = L(N \mid u) L(N-1 \mid u) \dots L(1 \mid u) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}(u) & \mathbf{B}(u) \\ \mathbf{C}(u) & \mathbf{D}(u) \end{pmatrix}$$

так же удовлетворяет билинейному соотношению

$$R(u, v) T(u) \otimes T(v) = T(v) \otimes T(u) R(u, v).$$

Собственные M -частичные энергии модели вычисляются по формуле

$$E_M = \sum_{j=1}^M \left(1 - \frac{u_j^2 + u_j^{-2}}{2} \right),$$

где параметры u_j удовлетворяют уравнениям Бете

$$u_j^{-2N} = \prod_{k=1, k \neq j}^M \frac{u_j^2 - u_k^2 q^{-2}}{u_k^2 - u_j^2 q^{-2}}.$$

Для фазовой модели (88) L -оператор имеет вид [31]:

$$L(n|u) = \begin{pmatrix} u^{-1} & \phi_n^\dagger \\ \phi_n & u \end{pmatrix}. \quad (91)$$

Соответствующая R -матрица равна

$$R(u, v) = \begin{pmatrix} f(v, u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(v, u) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & g(v, u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(v, u) \end{pmatrix}, \quad (92)$$

где $f(v, u) = u^2/(u^2 - v^2)$, $g(v, u) = uv/(u^2 - v^2)$.

Эту R -матрицу можно получить из (90) в пределе $q \rightarrow \infty$. Отметим возможность добавления дополнительных параметров в R -матрицу, что позволяет произвести скейлинг (контракцию) к новым нетривиальным моделям. Рассмотрим асимметричную R -матрицу шести вершинной модели ($\omega(x) = x - 1/x$) (см. (90))

$$R(u, q, q) = \begin{pmatrix} \omega(uq) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p\omega(u) & u^\alpha \omega(q) & 0 \\ 0 & u^{-\alpha} \omega(q) & \frac{1}{p} \omega(u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega(uq) \end{pmatrix}. \quad (93)$$

Положим $p = q$ и рассмотрим предел $q \rightarrow \infty$ для $(1/q)R$:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{q} R(u, q, q) = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega(u) & u^\alpha & 0 \\ 0 & u^{-\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}. \quad (94)$$

Аналогичные преобразования применимы и к тригонометрическим R -матрицам квантовых алгебр $U_q(\mathrm{sl}(n))$ с $n(n-1)/2$ параметрами.

Вернемся к фазовой модели (88, 91), где уравнения Бете имеют вид в переменных $\exp(-ip) = u^2$:

$$e^{ip_n(M+N+1)} = (-1)^{M-1} e^{iP}, \quad P = \sum_{j=1}^M p_j. \quad (95)$$

Собственные значения гамильтониана

$$E_M = \sum_{k=1}^M (1 - \cos p_k).$$

Основное состояние модели – состояние с наименьшей энергией, определяется следующим набором импульсов [31]:

$$p_j = \frac{2\pi}{M+N+1} \left(M - j - \frac{M-1}{2} \right), \quad 1 \leq j \leq M. \quad (96)$$

Вектор состояния модели

$$\begin{aligned} |\Psi_M(\mathbf{u})\rangle &= \prod_{j=1}^M \mathbf{B}(u_j) |0\rangle \\ &= \sum_{\lambda \subseteq \{N^M\}} S_\lambda(\mathbf{u}^2) (\phi_N^\dagger)^{n_N} \dots (\phi_1^\dagger)^{n_1} (\phi_0^\dagger)^{n_0} |0\rangle, \end{aligned} \quad (97)$$

выражается через симметрическую функцию Шура

$$S_\lambda(\mathbf{x}^2) \equiv S_\lambda(x_1^2, x_2^2, \dots, x_M^2) = \frac{\det \left(x_j^{2(M-i+\lambda_i)} \right)}{\Delta(\mathbf{x}^2)},$$

разбиение $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_M)$ последовательность целых неотрицательных чисел $N \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_M \geq 0$, а

$$\Delta(\mathbf{x}^2) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_i^2 - x_j^2)$$

– определитель Вандермонда. Существует взаимно-однозначное соответствие между конфигурацией чисел заполнения (n_N, \dots, n_1, n_0) , $0 \leq n_0, n_1, \dots, n_N \leq M$, $n_0 + n_1 + \dots + n_N = M$, и разбиением $\lambda = (N^{n_N}, (N-1)^{n_{N-1}}, \dots, 1^{n_1}, 0^{n_0})$, где каждое число S имеет кратность n_S . Суммирование ведется по всем разбиениям λ , состоящие из не более чем M частей с $\lambda_i \leq N$. Вектор состояния (97) является собственным вектором гамильтониана (88), если параметры \mathbf{u} удовлетворяют уравнениям Бете (95). На (рис. 5) приведена диаграмма разбиения $\lambda = (6, 5, 3, 3, 2, 1, 1, 1)$ соответствующая распределению восьми бозонов на цепочке из восьми узлов с числами заполнения $n_7 = 0$, $n_6 = 1$, $n_5 = 1$, $n_4 = 0$, $n_3 = 2$, $n_2 = 1$, $n_1 = 3$, $n_0 = 0$.

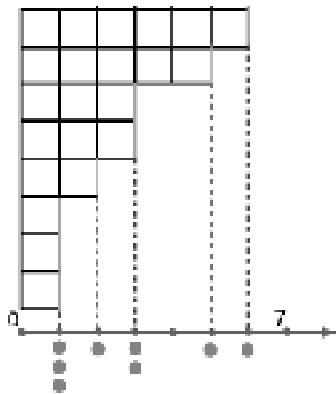


Рис. 5. Диаграмма разбиения.

Скалярные произведения векторов состояний (97) вычисляются по формуле Бине–Коши [34]:

$$\sum_{\lambda \subseteq \{N^M\}} S_\lambda(\mathbf{x}^2) S_\lambda(\mathbf{y}^2) = \Delta^{-1}(\mathbf{x}^2) \Delta^{-1}(\mathbf{y}^2) \det(H_{jk})_{1 \leq j, k \leq M}.$$

Матричные элементы $M \times M$ матрицы H_{jk}

$$H_{jk} = \frac{1 - (x_k y_j)^{2(N+M)}}{1 - (x_k y_j)^2}.$$

Зная выражения для скалярных произведений можно вычислять корреляционные функции модели. Приведем ответы асимптотического поведения температурных корреляционных функций при малых температурах и при $M \ll N$ [32]:

$$\begin{aligned} \langle \phi_0^K e^{-tH} (\phi_0^\dagger)^K \rangle &\equiv \frac{\langle \Psi_M(\mathbf{u}) | \phi_0^K e^{-tH} (\phi_0^\dagger)^K | \Psi_M(\mathbf{u}) \rangle}{\langle \Psi_M(\mathbf{u}) | e^{-tH} | \Psi_M(\mathbf{u}) \rangle} \\ &\simeq A^2(M - K, M, N) t^{-\frac{M^2}{2}}, \\ \langle \Pi_n e^{-tH_{ph}} \Pi_n \rangle &\simeq A^2(M, M, N - n) t^{-\frac{M^2}{2}}. \end{aligned}$$

Здесь среднее берется по основному состоянию модели (96), проектор $\Pi_n = \prod_{j=M-n+1}^M \pi_j$. Заметим, что критические экспоненты в этих формулах одинаковы, а амплитуды выражаются через число плоских разбиений [34]

$$A(P, R, S) = \prod_{j=1}^P \prod_{k=1}^R \frac{S + j + k - 1}{j + k - 1}$$

в ящике конечного размера $P \times R \times S$. На (Рис. 6) приведен пример плоского разбиения (трехмерной диаграммы Юнга) в ящике размера $P \times R \times S$.

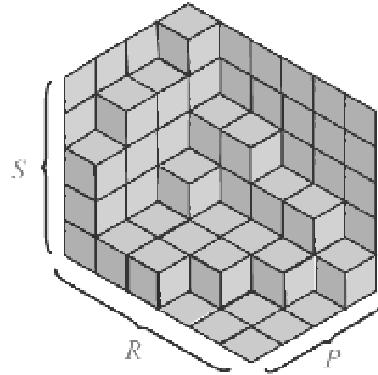


Рис. 6. Трехмерная диаграмма Юнга или плоское разбиение.

Рассмотрим еще одну модель [33], динамическими переменными которой являются элементы квантовых алгебр:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = & \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M iq^{2H_n} (B_n^\dagger B_{n-1} - B_n B_{n-1}^\dagger) \\ & + \sqrt{\eta} \left((B_n^\dagger + B_{n-1}^\dagger) K_n^- + K_n^+ (B_n + B_{n-1}) \right). \end{aligned}$$

Здесь операторы B_n , B_n^\dagger , и N_n – это q -бозоны

$$[B_n, B_m^\dagger] = q^{2N_n} \delta_{nm}, \quad [N_n, B_m^\dagger] = B_n^\dagger \delta_{nm}, \quad B_n = (B_n^\dagger)^\dagger,$$

а q -спиновые операторы, являются генераторами $U_q[\text{su}(2)]$ алгебры:

$$q^2 K_n^+ K_m^- - K_n^- K_m^+ = [2H_n] \delta_{nm}, \quad [H_n, K_m^\pm] = \pm K_n^\pm \delta_{nm}.$$

Здесь $[x] = (q^{2x} - 1)/(q^2 - 1)$, $q = e^\gamma > 1$, постоянная взаимодействия $\eta = (q^2 - 1)$.

Эта модель связана с R -матрицей (90). Непрерывным пределом модели является модель Дике (61).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Фаддеев, Л. А. Тахтаджян, — Усп. Мат. Наук **34** (1979), 13.
2. Е. К. Склянин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, — Теор. Мат. Физ. **40** (1979), 194.
3. L. D. Faddeev, *Quantum completely integrable models of field theory*. — Sov. Sci. Rev. Math. C **1** (1980), 107–160.
4. P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, *Quantum spectral transform method. Recent developments*. — Lect Notes Phys. **151** (1982), 61–119.
5. V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, *Quantum inverse scattering method and correlation functions*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
6. E. T. Jaynes, F. W. Cummings, — Proc. IEEE **51** (1963), 89.
7. I. Rabi, — Phys. Rev. **49** (1936), 324.
8. D. Braak, — Phys. Rev. **107** (2011), 100401.
9. M. Tavis, F. W. Cummings, — Phys. Rev. **170** (1968), 379.
10. М. Годен, *Волновая функция Бете*. Мир, Москва, 1987.
11. R. W. Richardson, — J. Math. Phys. **9** (1968), 1327.
12. L. Amico, A. Di Lorenzo, A. Osterloh, — Nucl. Phys. B **614** (2001), 449.
13. M. Chaichian, D. Ellinas, P. P. Kulish, — Phys. Rev. Lett. **65** (1990), 980.
14. P. P. Kulish, E. V. Damaskinsky, — J. Phys. A **23** (1990), L415.
15. O. Babelon, D. Talalaev, — J. Stat. Mech. 0706:P06013 (2007).
16. М. О. Скалли, М. С. Зубайри, *Квантовая оптика*. Физматлит, Москва, 2003.
17. R. H. Dicke, — Phys. Rev. **93** (1954), 99.
18. V. N. Popov, V. S. Yarunin, *Collective Effects in Quantum Statistics of Radiation and Matter*. Kluwer, Dordrecht, 1988.

19. N. M. Bogoliubov, R. K. Bullough, J. Timonen, — J. Phys. A **29** (1996), 6305.
20. В. И. Рупасов, В. И. Юдсон, — ЖЭТФ **86** (1984), 819.
21. E. Lieb, W. Liniger, — Phys. Rev. **130** (1963), 1605.
22. В. Кеттерле, — УФН **173** (2003), 1339.
23. Н. Н. Боголюбов, — Изв. АН СССР **11** (1947), 77.
24. J. Dukelsky, P. Schuck, — Phys. Rev. Lett. **86** (2001), 4206.
25. S. E. Pollack et al., — Phys. Rev. Lett. **102** (2009), 090402.
26. E. Haller et al., — Science **325** (2009), 1224.
27. P. P. Kulish, — Lett. Math. Phys. **5** (1981), 191.
28. V. S. Gerdjikov, M. Ivanov, P. P. Kulish, — J. Math. Phys. **25** (1984), 25.
29. N. M. Bogoliubov, R. K. Bullough, G. D. Pang, — Phys. Rev. B **47** (1993), 11495.
30. N. M. Bogoliubov, R. K. Bullough, J. Timonen, — Phys. Rev. Lett. **72** (1994), 3933.
31. N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, N. A. Kitanine, — Nucl. Phys. B **516** (1998), 501.
32. N. Bogoliubov, J. Timonen, — Philosophical Transactions A **369** (2011), 1319.
33. N. M. Bogoliubov, A. V. Rybin, J. Timonen, — J. Phys. A **27** (1994), L363.
34. И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла*. Мир, Москва, 1985.

Bogoliubov N. M., Kulish P. P. Exactly solvable models of quantum nonlinear optics.

There are many models in quantum nonlinear optics which are exactly solvable and permit to describe physical phenomena beyond perturbation theory. It is pointed out that variety of these models can be solved in the framework of the quantum inverse scattering method.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
Санкт-Петербург 191023, Россия
E-mail: bogoliub@pdmi.ras.ru
kulishg@pdmi.ras.ru

Поступило 15 декабря 2011 г.