

Н. М. Боголюбов

СКАЛЯРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ СОСТОЯНИЙ В ПОЛНОСТЬЮ АСИММЕТРИЧНЫХ ТОЧНО РЕШАЕМЫХ МОДЕЛЯХ НА КОЛЬЦЕ

1. ПОЛНОСТЬЮ АСИММЕТРИЧНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Полностью асимметричные процессы являются базовыми статистико-механическими моделями низкой-размерной неравновесной физики [1–4]. Они описывают систему неразличимых частиц на одномерной решётке, движущихся случайным образом в одном направлении справа налево с одинаковой постоянной перескока по кольцу.

В случае, когда частицы обладают отталкивательным взаимодействием с твёрдой сердцевиной, принцип исключения запрещает более чем одной частице находиться в узле решётки. В этом случае модель называется “полностью асимметричный простой процесс с запретом” (общепринятое сокращённое названия модели: TASEP – totally asymmetric simple exclusion process). Схематически процесс представлен на рис. 1.

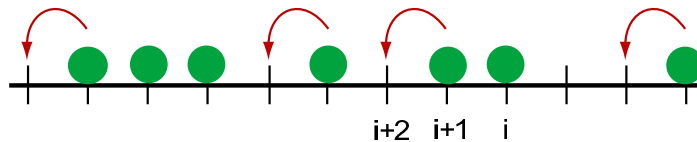


Рис. 1. Полностью асимметричный простой процесс с запретом. Стрелками показаны разрешённые переходы.

Если частицы обладают нулевым радиусом взаимодействия, то каждый узел решётки может содержать любое целое число частиц. Эта модель называется “полностью асимметричным простым процессом нулевого радиуса” (общепринятое сокращённое названия модели:

Ключевые слова: квантовая интегрируемость, корреляционные функции, стохастическая динамика, полностью асимметричные процессы.

Эта работа была частично поддержана РФФИ проектом 10-01-00600.

TAZRP – totally asymmetric simple zero range process). Схематически процесс представлен на рис. 2.

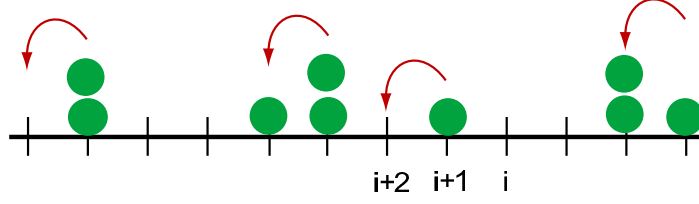


Рис. 2. Полностью асимметричный простой процесс нулевого радиуса. Стрелками показаны возможные переходы

Конфигурация системы X характеризуется набором всех допустимых размещений N частиц по M узлам решётки. Полное число конфигураций для TASEP модели равно

$$\Omega_T = \frac{M!}{N!(M-N)!}. \quad (1)$$

Для TAZRP модели ограничение на число частиц в узле решётки отсутствует, и число конфигураций равно

$$\Omega_Z = \frac{(N+M-1)!}{(N)!(M-1)!}. \quad (2)$$

Эволюция частиц описывается согласно следующему динамическому закону. За интервал времени $[t, t+dt]$ частица из узла i перескакивает с вероятностью dt в соседний узел $i+1$. Вероятность $P_t(X)$ обнаружить систему в конфигурации X во время t удовлетворяет основному кинетическому уравнению

$$\frac{dP_t(X)}{dt} = \sum_{\{X'\}} \mathcal{M}(X, X') P_t(X'), \quad (3)$$

где \mathcal{M} это $\Omega \times \Omega$ Марковская матрица. Суммирование ведётся по всем допустимым конфигурациям X' . Для $X \neq X'$ матричный элемент $\mathcal{M}(X, X')$ определяет переход из X' в X . Он равен 1, если переход разрешен, и 0, если нет. Диагональный матричный элемент с отрицательным знаком $-\mathcal{M}(X, X)$ равен числу разрешённых прыжков из X .

Сумма матричных элементов по строкам и по столбцам матрицы \mathcal{M} равна нулю, и вероятность сохраняется:

$$\sum_C P_t(X) = 1. \quad (4)$$

Описываемый процесс стохастичен. Единственным стационарным состоянием системы является состояние, в котором Ω допустимых конфигураций X обладают одинаковым весом $P(X) = 1/\Omega$. Это состояние сохраняется во времени

$$\frac{dP_t(X)}{dt} = 0. \quad (5)$$

Описанные модели интенсивно исследовались с помощью различных методов [5–26] (подробный список работ можно найти в статье [26]). В нашей статье мы сосредоточимся на подходе основанном на Квантовом методе обратной задачи (КМОЗ) [27–30] к решению моделей. К исследованию TASEP модели КМОЗ применялся в [31–35]. КМОЗ применялся к TAZRP модели в [34], эту модель можно рассматривать как специальный случай более общей q -бозонной модели [9, 36].

В данной статье мы вычислим скалярные произведения векторов состояний моделей TASEP, TAZRP и представим ответы в виде определителей. Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы приведем краткое квантово-механическое описание TASEP модели. В разделе 3 будет описана TAZRP модель. Подход КМОЗ к решению моделей будет дан в разделе 4. В заключение в разделе 5 исследуются свойства скалярных произведений векторов состояний.

2. ПОЛНОСТЬЮ АСИММЕТРИЧНЫЙ ПРОСТОЙ ПРОЦЕСС С ЗАПРЕТОМ

Альтернативным способом описания полностью асимметричного простого процесса с запретом является спиновое описание – состояние со спином вверх $|\uparrow\rangle$ в каждом узле решетки соответствует пустому узлу, а состояние со спином вниз $|\downarrow\rangle$ – заполненному (см. рис. 3). Конфигурации из N частиц ($2N \leq M$), расположенных в узлах m_i , и образующих строгую последовательность $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_N)$, $M \geq m_1 > m_2 > \dots > m_N \geq 1$, ставится в соответствие базисный вектор

$$|m_1, m_2, \dots, m_N\rangle = \sigma_{m_1}^- \sigma_{m_2}^- \dots \sigma_{m_N}^- |\Omega\rangle,$$

где $|\Omega\rangle$ является состоянием со всеми спинами вверх

$$|\Omega\rangle = \otimes_{i=1}^M |\uparrow\rangle_i. \quad (6)$$

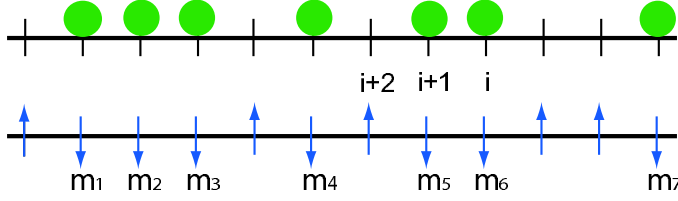


Рис. 3. Спиновое описание модели TASEP. Частице соответствует состояние со спином вниз, а состояние со спинов вверх соответствует пустому узлу.

Генератором описанного ранее процесса с запретом является неэрмитовый гамильтониан [5]:

$$H = - \sum_{j=1}^M \left\{ \sigma_{j+1}^- \sigma_j^+ + \frac{1}{4} (\sigma_{j+1}^z \sigma_j^z - 1) \right\}. \quad (7)$$

Здесь $\sigma^{\pm, z}$ – это матрицы Паули, матрица с индексом j действует нетривиально только в j -том спиновом подпространстве полного спинового пространства решетки $(\mathbb{C}^2)^{\otimes M}$: $s_j = I \otimes \dots \otimes I \otimes s \otimes I \otimes \dots \otimes I$. Наложены периодические граничные условия: $\sigma_n = \sigma_{n+M}$.

Первый член гамильтониана описывает перескоки частиц обладающих отталкивательным взаимодействием с твердой сердцевиной

$$\sigma_{j+1}^- \sigma_j^+ |\uparrow\rangle_{j+1} |\downarrow\rangle_j = |\downarrow\rangle_{j+1} |\uparrow\rangle_j.$$

Следующий член перечисляет разрешённые перескоки частиц.

Если ввести вектор вероятности

$$|\Psi_N\rangle_t = \sum_{\mathbf{m}} P_t(m_1, \dots, m_N) |m_1, m_2, \dots, m_N\rangle, \quad (8)$$

где суммирование ведется по Ω_T (1) строгим разбиениям \mathbf{m} , то уравнение (3) можно переписать в виде уравнения Шредингера по мнимому времени

$$\frac{d}{dt} |\Psi_N\rangle_t = -H |\Psi_N\rangle_t. \quad (9)$$

В явном виде

$$\frac{dP_t(m_1, \dots, m_N)}{dt} = \sum_{j=1}^N \{P_t(m_1, \dots, m_{j-1}, m_j - 1, m_{j+1}, \dots, m_N) - P_t(m_1, \dots, m_N)\}, \quad (10)$$

где суммирование ведётся по индексам удовлетворяющих условию $m_{j-1} > m_j - 1$, таким что соответствующий прыжок допустим. Соответствующее уравнение на собственные значения записывается в виде

$$EP(m_1, \dots, m_N) = \sum_{j=1}^N \{P(m_1, \dots, m_{j-1}, m_j - 1, m_{j+1}, \dots, m_N) - P(m_1, \dots, m_N)\}. \quad (11)$$

В матричном представлении $(-H)$ (7) является Марковской матрицей (3). Так как Марковская матрица \mathcal{M} является вещественной несимметричной матрицей, её собственные значения либо вещественны, либо представляют комплексно сопряжённые пары. Теорема Перрона-Фробениуса [37] утверждает что нулевое собственное значение невырождено, а остальные собственные значения имеют строго отрицательную часть.

Уравнения (10) и (11) имеют постоянное решение $P(m_1, \dots, m_N) = 1/\Omega_T$ для всех разбиений \mathbf{m} с собственной энергией $E = 0$. Состояние (8), которое соответствует этому решению, является правым стационарным состоянием:

$$|S_N^T\rangle = \frac{1}{\Omega_T} \sum_{\mathbf{m}} |m_1, m_2, \dots, m_N\rangle. \quad (12)$$

В стационарном состоянии каждая спиновая конфигурация N спинов имеет одинаковый вес. Данное состояние является основным состоянием гамильтониана (7) с собственным значением равным нулю:

$$H|S_N^T\rangle = 0. \quad (13)$$

Левый собственный вектор H с нулевым собственным значением равен

$$\langle S_N^T| = \sum_{\mathbf{m}} \langle m_1, \dots, m_N|. \quad (14)$$

Уравнения (11) обычно используются при вычислении собственных значений гамильтониана(7) методом координатного анзаца Бете [5, 11].

3. ПОЛНОСТЬЮ АСИММЕТРИЧНЫЙ ПРОСТОЙ ПРОЦЕСС НУЛЕВОГО РАДИУСА

Конфигурация X частиц в модели TAZRP может быть представлена набором $\mathbf{k} = (k_M, \dots, k_2, k_1)$ чисел заполнения k_j , удовлетворяющих условию $0 \leq k_1, k_2, \dots, k_M \leq N$, $k_1 + k_2 + \dots + k_M = N$.

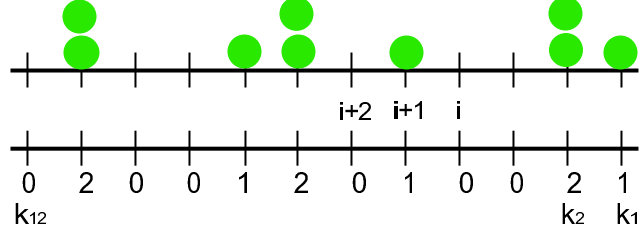


Рис. 4. Соответствие конфигурации частиц в модели TAZRP с набором чисел заполнения. Число заполнения с номером узла решётки равно числу частиц в данном узле.

Для того чтобы описать динамику системы с помощью квантовой механической модели, следует представить конфигурацию частиц как фокковский вектор $|k_1, \dots, k_M\rangle$ и определить вектор вероятности

$$|\Psi_N\rangle_t = \sum_{\mathbf{k}} P_t(k_1, \dots, k_M) |k_1, \dots, k_M\rangle, \quad (15)$$

где суммирование ведется по Ω_Z наборам (2) чисел заполнения \mathbf{k} , а $P_t(k_1, \dots, k_M)$ есть вероятности распределений (k_1, \dots, k_M) .

Генератор модели TAZRP можно представить в виде [34]:

$$H = - \sum_{m=1}^M \left(\phi_m \phi_{m+1}^\dagger - \phi_m^\dagger \phi_m \right) = - \sum_{m=1}^M \left(\phi_{m+1}^\dagger - \phi_m^\dagger \right) \phi_m, \quad (16)$$

Фазовые операторы ϕ_n, ϕ_n^\dagger удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\widehat{N}_i, \phi_j] = -\phi_i \delta_{ij}, \quad [\widehat{N}_i, \phi_j^\dagger] = \phi_i^\dagger \delta_{ij}, \quad [\phi_i, \phi_j^\dagger] = \pi_i \delta_{ij}, \quad (17)$$

где \widehat{N}_j – это оператор числа частиц, а $\pi_i = 1 - \phi_i^\dagger \phi_i$ – вакуумный проектор. Данная алгебра имеет представление в пространстве Фока

$$\begin{aligned}\phi_j |k_1, \dots, 0_j, \dots, k_M\rangle &= 0, \\ \phi_j^\dagger |k_1, \dots, k_j, \dots, k_M\rangle &= |k_1, \dots, k_j + 1, \dots, k_M\rangle, \\ \phi_j |k_1, \dots, k_j, \dots, k_M\rangle &= |k_1, \dots, k_j - 1, \dots, k_M\rangle, \\ \widehat{N}_j |k_1, \dots, k_j, \dots, k_M\rangle &= k_j |k_1, \dots, k_j, \dots, k_M\rangle.\end{aligned}\quad (18)$$

Состояния $|k_1, \dots, k_M\rangle$ ортогональны

$$\langle p_1, \dots, p_M | k_1, \dots, k_M \rangle = \delta_{p_1 k_1} \dots \delta_{p_M k_M}.$$

Фоковские вектора порождаются из вакуумного состояния

$$|0\rangle = \prod_{j=1}^M |0\rangle_j \quad (19)$$

действием повышающих операторов ϕ_j^\dagger :

$$|k_1, \dots, k_M\rangle = \prod_{j=1}^M (\phi_j^\dagger)^{k_j} |0\rangle; \quad 0 \leq k \leq N, \quad \sum_{j=1}^M k_j = N.$$

Оператор $\widehat{K} = \sum_{m=1}^M (1 - \pi_m) = \sum_{m=1}^M \phi_m^\dagger \phi_m$ определяет число K оккупированных узлов решётки в конфигурации (k_1, k_2, \dots, k_M) :

$$\widehat{K} |k_1, \dots, k_M\rangle = K |k_1, \dots, k_M\rangle.$$

Эволюция квантовой системы определяется уравнением Шредингера по мнимому времени (9), которое в матричном представлении

$$\begin{aligned}\frac{dP_t(k_1, \dots, k_M)}{dt} &= \sum_{m=1}^M P_t(k_1, \dots, k_m + 1, k_{m+1} - 1, \dots, k_M) \\ &\quad - K P_t(k_1, \dots, k_M),\end{aligned}\quad (20)$$

эквивалентно уравнению (3). Постоянное стационарное решение этого уравнения соответствует установившемуся состоянию $|S_N^Z\rangle$, в котором все наборы \mathbf{k} чисел заполнения имеют одинаковый вес

$$|S_N^Z\rangle = \frac{1}{\Omega_Z} \sum_{\mathbf{k}} |k_1, \dots, k_M\rangle. \quad (21)$$

Данное состояние является основным состоянием гамильтониана (16) с нулевым собственным значением:

$$H|S_N^Z\rangle = 0. \quad (22)$$

Левое стационарное состояние имеет вид:

$$\langle S_N^Z| = \sum_{\mathbf{k}} \langle k_1, \dots, k_M|. \quad (23)$$

4. РЕШЕНИЕ ПОЛНОСТЬЮ АСИММЕТРИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ

С точки зрения квантового метода обратной задачи описанные модели связаны с R -матрицей вида

$$R(u, v) = \begin{pmatrix} f(v, u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(v, u) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & g(v, u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(v, u) \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где

$$f(v, u) = \frac{u^2}{u^2 - v^2}, \quad g(v, u) = \frac{uv}{u^2 - v^2}, \quad (25)$$

параметры $u, v \in \mathbb{C}$.

L -операторы моделей удовлетворяют сплетающему условию

$$R(u, v) (L(n|u) \otimes L(n|v)) = (L(n|v) \otimes L(n|u)) R(u, v). \quad (26)$$

Произведение L -операторов образует матрицу монодромии

$$T(u) = L(M|u)L(M-1|u)\dots L(1|u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Перестановочные соотношения матричных элементов матрицы монодромии определяются той же R -матрицей (24):

$$R(u, v) (T(u) \otimes T(v)) = (T(v) \otimes T(u)) R(u, v). \quad (28)$$

Наиболее важными соотношениями являются

$$\begin{aligned} C(u)B(v) &= g(u, v) \{A(u)D(v) - A(v)D(u)\} \\ A(u)B(v) &= f(u, v)B(v)A(u) + g(v, u)B(u)A(v), \\ D(u)B(v) &= f(v, u)B(v)D(u) + g(u, v)B(u)D(v), \\ [B(u), B(v)] &= [C(u), C(v)] = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Матрица перехода $\tau(u)$ определяется как матричный след матрицы монодромии

$$\tau(u) = \text{tr } T(u) = (A(u) + D(u)) . \quad (30)$$

Соотношение (28) означает, что $[\tau(u), \tau(v)] = 0$ при произвольных значениях параметров $u, v \in \mathbb{C}$.

L -оператор модели TASEP [32, 34] есть 2×2 матрица с матричными элементами, действующими на пространстве состояний спиновой ($s = \frac{1}{2}$) цепочки из M -узлов:

$$\begin{aligned} L(n|u) &= \begin{pmatrix} us_n & \sigma_n^- \\ \sigma_n^+ & uI - u^{-1}s_n \end{pmatrix} \\ &= ss_n + (I - s)(uI - u^{-1}s_n) + \sigma^- \sigma_n^+ + \sigma^+ \sigma_n^- , \end{aligned} \quad (31)$$

где проекторы $s = (I - \sigma^z)/2$, $s_n = (I_n - \sigma_n^z)/2$, а параметр $u \in \mathbb{C}$.

Оператор циклического сдвига в спиновом пространстве $(\mathbb{C}^2)^{\otimes M}$ выражается через матрицу перехода:

$$\tau \equiv \tau(1) = \Pi_{12}\Pi_{23} \dots \Pi_{M-1M} . \quad (32)$$

Здесь

$$\Pi_{mn} = s_m s_n + (I - s_m)(I - s_n) + \sigma_m^- \sigma_n^+ + \sigma_m^+ \sigma_n^- ,$$

оператор перестановки: $\Pi_{mn}\sigma_m = \sigma_n\Pi_{mn}$. Оператор сдвига смещает индексы узлов

$$\tau^{n-1}\sigma_1\tau^{1-n} = \sigma_n \quad (33)$$

и обладает свойством $\tau^M = I$.

В терминах матрицы перехода гамильтониан (7) имеет вид:

$$H = -\frac{1}{2}\tau^{-1}(1)\frac{\partial}{\partial u}\tau(u)|_{u=1} + M . \quad (34)$$

Правые вектора состояний строятся путем последовательного применения операторов $\tilde{B}(u) \equiv u^{-(M-1)}B(u)$ к производящему состоянию $|\Omega\rangle$ (6):

$$|\Psi(u_1, u_2, \dots, u_N)\rangle = \prod_{i=1}^N \tilde{B}(u_i)|\Omega\rangle . \quad (35)$$

Здесь u_j – произвольные параметры. Производящее состояние $|\Omega\rangle$ уничтожается оператором $C(u)$

$$C(u)|\Omega\rangle = 0 ,$$

и является собственным вектором операторов $A(u)$ и $D(u)$,

$$A(u)|\Omega\rangle = \alpha(u)|\Omega\rangle; \quad D(u)|\Omega\rangle = \delta(u)|\Omega\rangle \quad (36)$$

с собственными значениями равными

$$\alpha(u) = u^M, \quad \delta(u) = (u - u^{-1})^M. \quad (37)$$

Левые вектора равны соответственно

$$\langle\Psi(u_1, u_2, \dots, u_N)| = \langle\Omega| \prod_{i=1}^N \tilde{C}(u_i), \quad (38)$$

где $\tilde{C}(u_i) = u^{-(M-1)}C(u)$, причем $\langle\Omega|B(u) = 0$.

Из определений (31) and (27) следуют разложения

$$\begin{aligned} u^{M-1}B(u) &= u^{2(M-1)}\mathcal{P}_R^T + \dots + (-1)^{M-1}\sigma_M^- s_{M-1} \dots s_1, \\ u^{M-1}C(u) &= u^{2(M-1)}\mathcal{P}_L^T + \dots + (-1)^{M-1}s_M \dots s_2\sigma_1^+, \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$\mathcal{P}_R^T = \sum_{k=1}^M s_M \dots s_{k+1} \sigma_k^-, \quad (40)$$

и

$$\mathcal{P}_L^T = \sum_{k=1}^M \sigma_k^+ s_{k-1} \dots s_1. \quad (41)$$

Согласно методу Алгебраического Бете анзаца [27] вектора состояний (35) и (38) являются правыми и левыми собственными векторами матрицы перехода (30) с одинаковыми собственными значениями

$$\begin{aligned} \tau(v)|\Psi(u_1, u_2, \dots, u_N)\rangle &= \Theta_N(v, \{u\})|\Psi(u_1, u_2, \dots, u_N)\rangle, \\ \langle\Psi(u_1, u_2, \dots, u_N)|\tau(v) &= \langle\Psi(u_1, u_2, \dots, u_N)|\Theta_N(v, \{u\}), \end{aligned} \quad (42)$$

если параметры u_1, u_2, \dots, u_N удовлетворяют уравнениям Бете. В общем виде данные уравнения могут быть выражены через вакуумные собственные значения операторов $A(u)$, $D(u)$ (36) и матричные элементы $f(v, u)$ R -матрицы (24) [29]:

$$\frac{\alpha(u_n)}{\delta(u_n)} = \prod_{m \neq n}^N \frac{f(u_m, u_n)}{f(u_n, u_m)}. \quad (43)$$

Для рассматриваемых моделей

$$\frac{\alpha(u_n)}{\delta(u_n)} = (-1)^{N-1} \prod_{m=1}^N \frac{u_n^2}{u_m^2} \equiv (-1)^{N-1} \frac{u_n^{2N}}{U^2}. \quad (44)$$

Подставляя (37) в уравнения (44), мы получим уравнения Бете для модели TASEP:

$$(1 - u_n^{-2})^M u_n^{2N} = (-1)^{N-1} U^2. \quad (45)$$

Собственные значения $\Theta_N(v, \{u\})$ матрицы перехода (30) в общем виде равны [29]:

$$\Theta_N(v, \{u\}) = \alpha(v) \prod_{j=1}^N f(v, u_j) + \delta(v) \prod_{j=1}^N f(u_j, v). \quad (46)$$

Для модели TASEP мы имеем соответственно

$$\Theta_N^T(v, \{u\}) = v^M \prod_{j=1}^N \frac{u_j^2}{u_j^2 - v^2} + (v - v^{-1})^M \prod_{j=1}^N \frac{v^2}{v^2 - u_j^2}. \quad (47)$$

Из определения (34) следует, что собственные энергии гамильтониана (7) имеют вид:

$$E_N = -\frac{1}{2} \Theta_N^{-1}(1, \{u\}) \frac{\partial}{\partial v} \Theta_N(v, \{u\})|_{v=1} + M = -\sum_{j=1}^N \frac{1}{u_j^2 - 1}. \quad (48)$$

Решение $u_1 = u_2 = \dots = u_N = \infty$ уравнения (45) соответствует стационарному состоянию $|S_N\rangle$ с собственным значением $E_N = 0$. Из определения (35) следует представление для стационарного состояния:

$$\begin{aligned} |S_N^T\rangle &= \frac{1}{\Omega_T} \lim_{\{u\} \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N \tilde{B}(u_i) |\Omega\rangle, \\ \langle S_N^T| &= \lim_{\{u\} \rightarrow \infty} \langle \Omega| \prod_{i=1}^N \tilde{C}(u_i). \end{aligned} \quad (49)$$

Подставляя в эти формулы разложение (39), получим следующее представление для стационарных векторов [38]:

$$|S_N^T\rangle = \frac{1}{\Omega_T} (\mathcal{P}_R^T)^N |\Omega\rangle, \quad (50)$$

$$\langle S_N^T| = \langle \Omega| (\mathcal{P}_L^T)^N. \quad (51)$$

Матрица перехода (30) $\tau(u)$ стохастична:

$$v^{-M} \tau(v) |S_N^T\rangle = v^{-M} \Theta_N^T(v, \{\infty\}) |S_N^T\rangle = |S_N^T\rangle. \quad (52)$$

L -оператор модели TAZRP – это 2×2 матрица с матричными элементами действующими в пространстве Фока (18) [34]:

$$L_n(u) \equiv \begin{pmatrix} u^{-1} + u\pi_n & \phi_n^\dagger \\ \phi_n & u \end{pmatrix}. \quad (53)$$

Следующие разложения элементов матрицы монодромии получены из определений (31) и (27) путем прямого вычисления:

$$\begin{aligned} u^M A(u) &= 1 + u^2 \left(\sum_{m=1}^{M-1} (\phi_m \phi_{m+1}^\dagger + \pi_m) \right) + \dots + u^{2M} \prod_{m=1}^M \pi_m, \\ u^M D(u) &= u^2 \phi_1^\dagger \phi_M + \dots + u^{2M}. \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} u^{M-1} B(u) &= \phi_1^\dagger + \dots + u^{2(M-1)} \mathcal{P}_R^Z, \\ u^{M-1} C(u) &= \phi_M + \dots + u^{2(M-1)} \mathcal{P}_L^Z. \end{aligned} \quad (55)$$

Здесь

$$\mathcal{P}_R^Z = \sum_{k=1}^M \phi_k^\dagger \pi_{k+1} \dots \pi_M, \quad (56)$$

а

$$\mathcal{P}_L^Z = \sum_{k=1}^M \pi_1 \dots \pi_{k-1} \phi_k. \quad (57)$$

Представление (54) позволяет выразить гамильтониан модели (16) через матрицу перехода (30):

$$H = - \frac{\partial u^M \tau(u)}{\partial u^2} \Big|_{u=0} + M = - \frac{\partial (A(u) + D(u))}{\partial u^2} \Big|_{u=0} + M. \quad (58)$$

По построению гамильтониан коммутирует с матрицей перехода:

$$[H, \tau(u)] = 0.$$

N -частичные вектора состояния модели записываются в традиционной форме

$$|\Psi(u_1, \dots, u_N)\rangle = \prod_{j=1}^N \tilde{B}(u_j) |0\rangle, \quad (59)$$

где оператор $B(u)$ есть матричный элемент матрицы монодромии (27), построенной по L -оператору (31), $\tilde{B}(u) = u^{-(M-1)}B(u)$, а u_j – произвольные параметры. Левые вектора состояния равны

$$\langle \Psi(u_1, \dots, u_N) | = \langle 0 | \prod_{j=1}^N \tilde{C}(u_j), \quad (60)$$

где $\tilde{C}(u) = u^{-(M-1)}C(u)$. Вакуумное состояние $|0\rangle$ определяется формулой (19) и является собственным вектором операторов $A(u)$ и $D(u)$:

$$A(u)|0\rangle = \alpha(u)|0\rangle; \quad D(u)|0\rangle = \delta(u)|0\rangle \quad (61)$$

с собственными значениями равными

$$\alpha(u) = (u^{-1} + u)^M, \quad \delta(u) = u^M. \quad (62)$$

Вектора состояния (59) и (60) становятся собственными векторами матрицы перехода $\tau(u)$, а следовательно, и гамильтониана (16), если переменные u_j удовлетворяют уравнениям Бете (44):

$$(1 + u_n^{-2})^M u_n^{-2N} = (-1)^{N-1} U^{-2}. \quad (63)$$

Собственные значения $\Theta_N^Z(v)$ матрицы перехода $\tau(v)$ имеют вид

$$\Theta_N^Z(v) = (v^{-1} + v)^M \prod_{m=1}^N \frac{u_m^2}{u_m^2 - v^2} + v^M \prod_{m=1}^N \frac{v^2}{v^2 - u_m^2}. \quad (64)$$

Формула (58) позволяет вычислить спектр гамильтониана (16). N -частичные собственные энергии равны

$$E_N(u_1, \dots, u_N) = -\frac{\partial u^M \Theta_N^Z(u)}{\partial u^2} + M = \sum_{m=1}^N u_m^{-2}. \quad (65)$$

Как и в случае модели TASEP, существует решение $u_1 = u_2 = \dots = u_N = \infty$, соответствующее собственному вектору $|S_N^Z\rangle$ с нулевым собственным значением $E_N = 0$. Из разложения (55) следует представление для стационарных состояний:

$$|S_N^Z\rangle = \frac{1}{\Omega_Z} \lim_{\{u\} \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N \tilde{B}(u_j)|0\rangle = \frac{1}{\Omega_Z} (\mathcal{P}_R^Z)^N |0\rangle, \quad (66)$$

$$\langle S_N^Z | = \lim_{\{u\} \rightarrow \infty} \langle 0 | \prod_{j=1}^N \tilde{C}(u_j) = \langle 0 | (\mathcal{P}_L^Z)^N. \quad (67)$$

Матрица перехода модели TAZRP также стохастична:

$$(v + v^{-1})^{-M} \tau(v) |S_N^Z\rangle = (v + v^{-1})^{-M} \Theta_N^Z(v, \{\infty\}) |S_N^Z\rangle = |S_N^Z\rangle. \quad (68)$$

5. СКАЛЯРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Перечислим известные свойства уравнений Бете (45) и (63), которые нам понадобятся в дальнейшем. Уравнения для модели TASEP были детально исследованы в [11]. Заметим, что правая часть уравнений (45) не зависит от индекса n . При заданном комплексном параметре U^2 уравнения можно рассматривать как полиномиальные уравнения на u^2 порядка M . Выбирая наборы из N различных корней этих уравнений, мы получаем решения уравнений Бете (45). Число решений уравнений Бете для модели TASEP равно числу таких наборов и в точности равно числу конфигураций Ω_T (1). Порядок соответствующих полиномиальных уравнений для модели TAZRP равен $M + N - 1$. Таким образом, число решений уравнений Бете (63) при заданном U^2 равно Ω_Z (2).

Скалярные произведения векторов состояния вычисляются с помощью коммутационных соотношений (29). В простейшем ($N = 1$) случае скалярное произведение равно

$$\langle \Psi(v) | \Psi(u) \rangle = g(v, u) \{ \alpha(v) \delta(u) - \alpha(u) \delta(v) \},$$

где $g(v, u)$ – это матричный элемент R -матрицы, $\alpha(u)$, $\delta(u)$ вакуумные собственные значения операторов $A(u)$ и $D(u)$ (37), (62). Для произвольного N из формулы ([29, Chap. IX, 6.27]) можно получить общую формулу для скалярных произведений векторов состояния интегрируемых моделей, связанных с R -матрицей (24):

$$\begin{aligned} & \langle \Psi(v_1, v_2, \dots, v_N) | \Psi(u_1, u_2, \dots, u_N) \rangle \\ &= \left\{ \prod_{n=1}^N \frac{1}{(v_n^2 u_n^2)^{(M-1)}} \prod_{j>k} \frac{v_j v_k}{v_k^2 - v_j^2} \prod_{l>m} \frac{u_l u_m}{u_l^2 - u_m^2} \right\} \det Q, \quad (69) \end{aligned}$$

где матричные элементы $N \times N$ матрицы Q равны

$$Q_{jk} = \frac{\alpha(v_j) \delta(u_k) \left(\frac{u_k}{v_j} \right)^{N-1} - \alpha(u_k) \delta(v_j) \left(\frac{u_k}{v_j} \right)^{-N+1}}{\frac{u_k}{v_j} - \frac{v_j}{u_k}}. \quad (70)$$

В явном виде для модели TASEP

$$Q_{jk} = \frac{v_j^M (u_k - u_k^{-1})^M \left(\frac{u_k}{v_j}\right)^{N-1} - u_k^M (v_j - v_j^{-1})^M \left(\frac{u_k}{v_j}\right)^{-N+1}}{\frac{u_k}{v_j} - \frac{v_j}{u_k}}, \quad (71)$$

для модели TAZRP

$$Q_{jk} = \frac{(v_j + v_j^{-1})^M u_k^M \left(\frac{u_k}{v_j}\right)^{N-1} - (u_k + u_k^{-1})^M v_j^M \left(\frac{u_k}{v_j}\right)^{-N+1}}{\frac{u_k}{v_j} - \frac{v_j}{u_k}}. \quad (72)$$

При исследовании пределов более удобным является следующее представление формулы (69):

$$\begin{aligned} & \langle \Psi(v_1, v_2, \dots, v_N) | \Psi(u_1, u_2, \dots, u_N) \rangle \\ &= (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \Delta^{-1}(v^{-2}) \Delta^{-1}(u^{-2}) \prod_{j=1}^N (v_j^2 u_j^2)^{-(N+M)} \det Q, \end{aligned} \quad (73)$$

где $\Delta(x)$ – это определитель Вандермонда: $\Delta(x) = \prod_{j>k} (x_k - x_j)$.

Рассмотрим случай, когда параметры u_j и v_j принадлежат различным наборам решений уравнений Бете, определяемых заданным параметром $U^2 = \prod_{m=1}^N u_m^2 = \prod_{m=1}^N v_m^2$. В этом случае матрица Q (70) принимает вид:

$$\begin{aligned} Q_{jk} &= (-1)^N \delta(v_j) \delta(u_k) u_k^N v_j^N \frac{U^{-2} \frac{u_k}{v_j} - U^{-2} \frac{v_j}{u_k}}{\frac{u_k}{v_j} - \frac{v_j}{u_k}} \\ &= (-1)^N \delta(v_j) \delta(u_k) u_k^N v_j^N U^{-2} E_{jk}, \end{aligned} \quad (74)$$

где матричные элементы $E_{jk} = 1$ для всех $1 \leq j, k \leq N$. В этом случае $\det Q = 0$, и, следовательно собственные вектора, принадлежащие различным решениям уравнений Бете, ортогональны:

$$\langle \Psi(v_1, v_2, \dots, v_N) | \Psi(u_1, u_2, \dots, u_N) \rangle = 0. \quad (75)$$

Так как число решений уравнений Бете (45) и (63) равны числу возможных размещений частиц на решётке, то собственные вектора моделей TASEP и TAZRP образуют полную ортогональную систему.

Если решения уравнений Бете принадлежат одному набору $u_j = v_j$, тогда недиагональные матричные элементы матрицы Q будут равны (74). Диагональные элементы матрицы (70) следует понимать в смысле правила Лопиталья:

$$Q_{jj} = \frac{u_j}{2} \left[\alpha(u_j) \delta'(u_j) - \alpha'(u_j) \delta(u_j) + 2(N-1)u_j^{-1} \alpha(u_j) \delta(u_j) \right]. \quad (76)$$

Подставляя явные выражения для $\alpha(u)$ и $\delta(u)$ в (74) и (76), мы получим следующее выражение для норм. Для модели TASEP:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^2(u_1, u_2, \dots, u_N) &= \langle \Psi(u_1, u_2, \dots, u_N) | \Psi(u_1, u_2, \dots, u_N) \rangle \\ &= U^{2N} \prod_{l \neq n} \frac{1}{u_l^2 - u_n^2} \det \tilde{Q}. \quad (77) \end{aligned}$$

Матричные элементы матрицы \tilde{Q} равны

$$\tilde{Q}_{jk} = \frac{N-1 + (M-N+1)u_j^{-2}}{1 - u_j^{-2}} \delta_{jk} - (1 - \delta_{jk}).$$

Для модели TAZRP ответ для нормы записывается в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^2(u_1, u_2, \dots, u_N) &= \langle \Psi(u_1, u_2, \dots, u_N) | \Psi(u_1, u_2, \dots, u_N) \rangle \\ &= U^{-2N} \prod_{l \neq n} \frac{1}{u_l^2 - u_n^2} \det \tilde{Q}. \quad (78) \end{aligned}$$

Матричные элементы матрицы \tilde{Q} равны

$$\tilde{Q}_{jk} = \frac{N-1 + (M+N-1)u_j^{-2}}{1 + u_j^{-2}} \delta_{jk} - (1 - \delta_{jk}).$$

Формулы (77) и (78) для норм собственных векторов справедливы для всех решений уравнений Бете за исключением тех, которые соответствуют стационарному состоянию.

При вычислении различных корреляционных функций моделей нам необходимо знать проекции векторов состояния на стационарные состояния. Эти проекции можно определить исходя из формулы (69) и представлений (49), (67). Для левого стационарного состояния имеем

$$\begin{aligned} &\langle S_N | \Psi(u_1, u_2, \dots, u_N) \rangle \\ &= \lim_{\{v\} \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N \langle \Psi(v_1, v_2, \dots, v_N) | \Psi(u_1, u_2, \dots, u_N) \rangle. \quad (79) \end{aligned}$$

Этот предел можно вычислить по формуле

$$\lim_{v_j \rightarrow v} \frac{\det \{\Phi(v_j, u_k)\}}{\Delta(v)} = \det \left\{ \frac{1}{(j-1)!} \frac{\partial^{j-1}}{\partial v^{j-1}} \Phi(v, u_k) \right\}, \quad (80)$$

где $\Phi(v, u)$ – произвольная дифференцируемая по крайней мере N раз функция от двух переменных.

Взяв предел в (79), получим

$$\langle S_N | \Phi_N(u_1, \dots, u_N) \rangle = \prod_{N \geq l > n \geq 1} \frac{u_l^2 u_n^2}{u_l^2 - u_n^2} \det U. \quad (81)$$

Матричные элементы $N \times N$ матрицы U равны

$$\begin{aligned} U_{jk} &= \sum_{n=0}^{j-1} (-1)^n \binom{M}{n} u_k^{-2(N-j-1+n)}, \quad 1 \leq j \leq N-1; \\ U_{Nk} &= - \sum_{n=N}^M (-1)^n \binom{M}{n} u_k^{-2(n-1)}. \end{aligned} \quad (82)$$

для модели TASEP, и

$$U_{jk} = u_k^{-2(N-j-1)} [(1 + u_k^{-2})^M - \delta_{jN}]. \quad (83)$$

для модели TAZRP.

Переходя к пределу $u_j \rightarrow \infty$ в (81), получим:

$$\langle S_N | S_N \rangle = \frac{1}{\Omega_{T,Z}} \lim_{\{u\} \rightarrow \infty} \langle S_N | \Phi_N(u_1, \dots, u_N) \rangle.$$

Этот предел может быть вычислен с помощью формулы (80). Применяя её к (82), получим для модели TASEP:

$$\Omega_T \langle S_N^T | S_N^T \rangle = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \det \mathbb{C}_T,$$

где

$$\mathbb{C}_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -C_M^1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -C_M^1 & C_M^2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -C_M^1 & \cdots & (-1)^{N-3} C_M^{N-3} & (-1)^{N-2} C_M^{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-1)^{N+1} C_M^N \end{pmatrix}. \quad (84)$$

Мы использовали обозначение $C_M^n \equiv \binom{M}{n}$ для биномиальных коэффициентов. Принимая во внимание, что

$$\det \mathbb{C}_T = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \binom{M}{N},$$

получим $\langle S_N^T | S_N^T \rangle = 1$, как и должно быть.

Для модели TAZRP применение формулы (80) к (83) даёт

$$\Omega_Z \langle S_N^Z | S_N^Z \rangle = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \det \mathbb{C}_Z,$$

где

$$\mathbb{C}_Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & C_M^1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & C_M^1 & C_M^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_M^1 & C_M^2 & C_M^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & C_M^1 & \cdots & C_M^{N-4} & C_M^{N-3} & C_M^{N-2} \\ 1 & C_M^1 & C_M^2 & \cdots & C_M^{N-3} & C_M^{N-2} & C_M^{N-1} \\ C_M^1 & C_M^2 & C_M^3 & \cdots & C_M^{N-2} & C_M^{N-1} & C_M^N \end{pmatrix}. \quad (85)$$

Определитель этой матрицы равен

$$\det \mathbb{C}_Z = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \binom{M+N-1}{N}$$

и, $\langle S_N^Z | S_N^Z \rangle = 1$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предыдущем разделе было показано, что собственные вектора моделей TASEP и TAZRP образуют полный ортонормированный базис. Это означает, что существует разложение единичного оператора:

$$I = \sum_{\{u\}} \frac{|\Psi(u_1, u_2, \dots, u_N)\rangle \langle \Psi(u_1, u_2, \dots, u_N)|}{\mathcal{N}^2(u_1, u_2, \dots, u_N)}, \quad (86)$$

где суммирование ведётся по всем различным решениям уравнения Бете (45) или (63). Воспользовавшись этим разложением, можно вычислять различные корреляционные функции для моделей на кольце [24, 39].

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. Лигgett, *Марковские процессы с локальным взаимодействием*. Мир, Москва, 1989.
2. H. Spohn, *Large Scale Dynamics of Interacting Particles*. Springer, Berlin, 1991.
3. G. Schutz, *Exactly solvable models for many-body systems far from equilibrium*. — In: Phase Transitions and Critical Phenomena, C. Domb and J. L. Lebowitz (eds.) **19** (2001)).
4. M. R. Evans, R. A. Blythe, *Nonequilibrium dynamics in low dimensional systems*. — Physica **313** (2002), 110.
5. L.-H. Gwa, H. Spohn, *Bethe solution for the dynamical-scaling exponent of the noisy Burgers equation*. — Phys. Rev. A **46** (1992), 844.
6. B. Derrida, J. Lebowitz, *Exact Large Deviation Function in the Asymmetric Exclusion Process*. — Phys. Rev. Lett. **80** (1998), 209.
7. M. R. Evans, *Phase Transitions in One-Dimensional Nonequilibrium Systems*. — Brazilian J. Physics **30** (2000), 42.
8. V. B. Priezzhev, *Exact Nonstationary Probabilities in the Asymmetric Exclusion Process on a Ring*. — Phys. Rev. Lett. **91** (2003), 050601.
9. A. M. Povolotsky, *Bethe ansatz solution of zero-range process with nonuniform stationary state*. — Phys. Rev. E **69** (2004), 061109.
10. M. Prahofer, H. Spohn, *Exact Scaling Functions for One-Dimensional Stationary KPZ Growth*. — J. Stat. Phys. **115** (2004), 255.
11. O. Golinelli, K. Mallick, *Bethe ansatz calculation of the spectral gap of the asymmetric exclusion process*. — J. Phys. A: Math. Gen. **37** (2004), 3321.
12. M. R. Evans, T. Hanney, *Nonequilibrium Statistical Mechanics of the Zero-Range Process and Related Models*. — J. Phys. A: Math. Gen. **38** (2005), R195.
13. T. Sasamoto, *Spatial correlations of the 1D KPZ surface on a flat substrate*. — J. Phys. A: Math. Gen. **38** (2005), L549.
14. O. Golinelli, K. Mallick, *Spectral gap of the totally asymmetric exclusion process at arbitrary filling*. — J. Phys. A: Math. Gen. **38** (2005), 1419.
15. J. de Gier, F. Essler, *Bethe Ansatz Solution of the Asymmetric Exclusion Process with Open Boundaries*. — Phys. Rev. Lett. **95** (2005), 240601.
16. V. B. Priezzhev, *Nonstationary probabilities for the asymmetric exclusion process on a ring*. — Pramana J. Phys. **64** (2005), 915.
17. M. Kanai, K. Nishinari, T. Tokihiro, *Analytical study on the criticality of the stochastic optimal velocity model*. — J. Phys. A: Math. Gen. **39** (2006), 9071.
18. A. M. Povolotsky, J. F. F. Mendes, *Bethe Ansatz Solution of Discrete Time Stochastic Processes with Fully Parallel Update*. — J. Stat. Phys. **123** (2006), 125.
19. A. M. Povolotsky, V. B. Priezzhev, *Determinant solution for the Totally Asymmetric Exclusion Process with parallel update*. — J. Stat. Mech. (2006), P07002.
20. M. Kanai, *Exact solution of the zero-range process: fundamental diagram of the corresponding exclusion process*. — J. Phys. A: Math. Gen. **40** (2007), 7127.
21. A. Borodin, P. Ferrari, M. Prahofer, T. Sasamoto, *Fluctuation Properties of the TASEP with Periodic Initial Configuration*. — J. Stat. Phys. **129** (2007), 1055.

22. A. M. Povolotsky, V. B. Priezzhev, *Determinant solution for the Totally Asymmetric Exclusion Process with parallel update. II. Ring geometry.* — J. Stat. Mech. (2007), P08018.
23. S. Prolhac, K. Mallick, *Current fluctuations in the exclusion process and Bethe ansatz.* — J. Phys. A: Math. Gen. **41** (2008), 175002.
24. N. Bogoliubov, *Determinantal Representation of the Time-Dependent Stationary Correlation Function for the Totally Asymmetric Simple Exclusion Model.* — SIGMA **5** (2009), 052.
25. Y. Yamada, M. Katori, *Velocity correlations of a discrete-time totally asymmetric simple-exclusion process in stationary state on a circle.* — Phys. Rev. E **84** (2011), 041141.
26. K. Mallick, *Some Exact Results for the Exclusion Process.* arXiv:1101.2849.
27. L. D. Faddeev, *Quantum completely integrable models of field theory.* — Sov. Sci. Rev. Math. C **1** (1980), 107–160; In: 40 Years in Mathematical Physics, World Sci. Ser. 20th Century Math., vol. 2, World Sci., Singapore (1995), pp. 187–235.
28. P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, *Quantum spectral transform method. Recent developments.* — Lect. Notes Phys. **151** (1982), 61–119.
29. V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions.* — Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
30. Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи.* Наука, Москва, 1992.
31. J. D. Noh, D. Kim, *Interacting domain walls and the five-vertex model.* — Phys. Rev. E **49** (1995), 1943.
32. D. Kim, *Bethe Ansatz solution for crossover scaling functions of the asymmetric XXZ chain and the Kardar–Parisi–Zhang–type growth model.* — Phys. Rev. E **52** (1995), 3512.
33. D. S. Lee, D. Kim, *Large deviation function of the partially asymmetric exclusion process.* — Phys. Rev. E **59** (1999), 6476.
34. N. M. Bogoliubov, T. Nassar, *On the spectrum of the non-Hermitian phase-difference model.* — Phys. Lett. A **234** (1997), 345.
35. O. Golinelli, K. Mallick, *The asymmetric simple exclusion process: an integrable model for non-equilibrium statistical mechanics.* — J. Phys. A: Math. Gen. **39** (2006), 12679.
36. N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, N. A. Kitanine, *Correlation functions for a strongly correlated boson system.* — Nucl. Phys. B **516** (1998), 501.
37. Ф. П. Гантмахер, *Теория матриц.* Наука, Москва, 1966.
38. G. Schütz, *Duality relations for asymmetric exclusion processes.* — J. Stat. Phys. **86** (1997), 1265.
39. K. Motegi, K. Sakai, J. Sato, *Exact relaxation dynamics of the totally asymmetric simple exclusion process.* arXiv: 1201.2749.

Bogoliubov N. M. Scalar products of the state vectors in the totally asymmetric exactly solvable models on a ring.

The exactly solvable totally asymmetric models of the low dimensional non-equilibrium physics on a ring, namely the totally asymmetric simple exclusion process and the totally asymmetric simple zero range process, are considered. The Quantum Inverse Method allows to calculate the scalar products of the state vectors of the models and to represent the answers in the determinantal form. It is shown that the eigenvectors of the models form a complete orthogonal basis. The projections of the state vectors on a stationary states, time independent ones, are studied.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
Санкт-Петербург 191023, Россия
E-mail: bogoliub@pdmi.ras.ru

Поступило 2 февраля 2012 г.