Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 397, 2011 г.

Ш. Сахаев, В. А. Солонников

О НЕКОТОРЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧАХ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

1. Введение

Рассматриваются следующие две стационарные задачи.

I. Вязкая несжимаемая проводящая жидкость заполняет ограниченный сосуд $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^3$ с идеально проводящей границей S_1. В Ω_1 задана внешняя сила $\vec{f}(x)$, действующая на жидкость, и электрический ток плотности $\vec{j}(x)$. Следует определить векторное поле скоростей $\vec{v}(x)$ и давление $p(x)$, а также магнитное поле $\vec{H}(x)$ и электрическое поле $\vec{E}(x)$, $x \in \Omega_1$.

II. Сосуд с жидкостью Ω_1 окружен диэлектриком или вакуумом $\Omega_2 = \Omega \setminus \overline{\Omega}_1$, где Ω – ограниченная область с идеально проводящей границей S. Внешняя сила $\vec{f}(x)$ и ток $\vec{j}(x)$ заданы в Ω_1. Вектор $\vec{v}(x)$ и функция $p(x)$ подлежат определению в Ω_1, а $\vec{H}(x)$ и $\vec{E}(x)$ в $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

Установившееся движение вязкой несжимаемой проводящей жидкости описывается системой уравнений магнитной гидродинамики, состоящей из уравнений Навье–Стокса

$$\begin{aligned} &-\nu\nabla^2\vec{v}(x) + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} - \frac{\mu}{\rho}(\vec{H}\cdot\nabla)\vec{H} \\ &+\frac{1}{\rho}\nabla\Big(p(x) + \frac{\mu}{2}|\vec{H}(x)|^2\Big) = \vec{f}(x), \quad \operatorname{div}\vec{v}(x) = 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

и уравнений Максвелла с исключенным током смещения

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\vec{H}(x) - \sigma(\vec{E}(x) + \mu(\vec{v}\times\vec{H})) = \vec{j}(x), \\ &\operatorname{div}\vec{H}(x) = 0, \\ &\operatorname{rot}\vec{E}(x) = 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, коэрцитивные оценки, пространства Соболева и Гёльдера.

Работа поддержана грантом РФФИ 11-01-00324-а и грантом ведущей научной школы НШ-4210.2010.1.

при заданных $\vec{f}(x)$ и $\vec{j}(x)$, $x \in \Omega_1$.

Магнитная проницаемость жидкости μ_1, проводимость σ, вязкость ν и плотность ρ являются положительными постоянными. Задача I состоит в нахождении решений уравнений (1.1) и (1.2) в области Ω_1, удовлетворяющих следующим краевым условиям на S_1:

$$\vec{v}(x) = 0, \tag{1.3}$$

$$\vec{H} \cdot \vec{n} = 0, \quad \vec{E}_\tau = 0, \tag{1.4}$$

где $\vec{n}$ – внешняя единичная нормаль к S_1, а $\vec{E}_r = \vec{E} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{E})$. В задаче II область Ω_1 ограничена замкнутой поверхностью S_1, разделяющей две среды с разными электромагнитными свойствами: жидкость Ω_1 и вакуум (или диэлектрик) Ω_2. Они имеют различные магнитные проницаемости μ_1 и μ_2; кроме того, электропроводность вакуума σ равна нулю, и поэтому уравнения (1.2) в Ω_2 сводятся к

$$\operatorname{rot} \vec{H}(x) = 0, \quad \operatorname{div} \vec{H}(x) = 0, \tag{1.5}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}(x) = 0, \quad \operatorname{div} \vec{E}(x) = 0. \tag{1.6}$$

На поверхности S_1 должны быть выполнены условия сопряжения

$$[\mu \vec{H} \cdot \vec{n}] = 0, \quad [\vec{H}_\tau] = 0, \tag{1.7}$$

$$[\vec{E}_\tau] = 0, \tag{1.8}$$

где $[u] = u^{(1)} - u^{(2)}$ – скачок функции $u(x)$, $x \in \Omega_1 \cup \Omega_2$, на S_1, $u^{(i)} = u|_{x \in \overline{\Omega_i}}$, а $\vec{H}_\tau = \vec{H} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{H})$ и $\vec{E}_\tau = \vec{E} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{E})$ – тангенциальные компоненты $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Наконец, должны быть выполнены уравнения (1.1), (1.2) в Ω_1 и условия (1.3), (1.4) на S.

Существование обобщенного (слабого) решения задач I и II было доказано в [1,2], причем область Ω_2 могла быть и бесконечной (внешней по отношению к Ω_1). Краевые условия (1.3), (1.4), (1.7), (1.8) для $\vec{H}$ и $\vec{E}$ являются стандартными (см. [3]). Другие варианты краевых условий рассмотрены в работах [4–7] и в других.

Приведем определение обобщенных решений задач I и II для случая односвязных областей Ω_1 и Ω.

Определение 1. *Пространством* $\mathbb{H}(\Omega_1)$ *назовем множество соленоидальных векторных полей* $\vec{\varphi} \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega_1)$ *(т.е. таких что* $\vec{\varphi}|_{S_1} = 0$*).*

Определение 2. *Пространством* $\mathbb{H}_1(\Omega_1)$ *назовем множество соленоидальных векторых полей* $\vec{\psi} \in W_2^1(\Omega_1)$, *удовлетворяющих краевому условию* $\vec{\psi} \cdot \vec{n}|_{S_1} = 0$.

Определение 3. *Пространством* $\mathbb{H}_2(\Omega)$ *назовем множество соленоидальных векторных полей* $\vec{H} \in W_2^1(\Omega_1) \cap W_2^1(\Omega_2)$, *удовлетворяющих уравнениям* (1.5) *в* Ω_2, *а также условию* $\vec{H} \cdot \vec{n}|_S = 0$ *и условиям* (1.7) *на* S_1.

Определение 4. *Обобщенным решением задачи* I *назовем пару векторных полей* $\vec{v} \in \mathbb{H}(\Omega_1)$ *и* $\vec{H} \in \mathbb{H}_1(\Omega_1)$, *удовлетворяющих интегральным тождествам*

$$v \int\limits_{\Omega_1} \nabla\vec{v} \cdot \nabla\vec{\varphi} dx - \int\limits_{\Omega_1} \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{\varphi} dx, + \frac{\mu}{\rho} \int\limits_{\Omega_1} \vec{H} \cdot (\vec{H} \cdot \nabla)\vec{\varphi} dx = \int\limits_{\Omega_1} \vec{f} \cdot \vec{\varphi} dx \tag{1.9}$$

$$\frac{1}{\sigma} \int\limits_{\Omega_1} \operatorname{rot} \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{\psi} dx - \int\limits_{\Omega_1} \mu(\vec{v} \times \vec{H}) \cdot \operatorname{rot} \vec{\psi} dx = \frac{1}{\sigma} \int\limits_{\Omega_1} \vec{j} \cdot \operatorname{rot} \vec{\psi} dx \tag{1.10}$$

при произвольных $\vec{\varphi} \in \mathbb{H}(\Omega_1)$, $\vec{\psi} \in \mathbb{H}_1(\Omega_1)$.

Определение 5. *Обобщенным решением задачи* II *называется пара векторных полей* $\vec{v} \in \mathbb{H}(\Omega_1)$ *и* $\vec{H} \in \mathbb{H}_2(\Omega)$, *удовлетворяющих интегральным тождествам* (1.9) *и* (1.10) *при произвольных* $\vec{\varphi} \in \mathbb{H}(\Omega_1)$, $\vec{\psi} \in \mathbb{H}_2(\Omega)$.

Соотношения (1.9), (1.10) легко получаются умножением уравнения (1.1_1) на $\vec{\varphi}$ и уравнения (1.2_1) на $\operatorname{rot} \vec{\psi}$ и интегрированием с последующим применением формулы интегрирования по частям и использованием краевых условий.

Опираясь на вспомогательные предложения §2, мы показываем, что по любому обобщенному решению задач I или II можно построить векторное поле $\vec{E}$, удовлетворяющее уравнениям (1.2), (1.6) и условиям (1.4), (1.8). Если S_1, $S \in C^2$, а $\vec{f}$, $\vec{j} \in L_q(\Omega_1)$ с $q > 3$, то $\vec{H} \in W_q^1(\Omega_1)$, $\vec{E} \in L_q(\Omega_1)$ в случае задачи I, причем $\vec{E}$ удовлетворяет (1.4), и $\vec{H} \in$

$W_q^1(\Omega_1)\cap W_q^1(\Omega_2)$, $\vec{E}\in L_q(\Omega)$ в случае задачи II. Более того, $\vec{v}\in W_q^2(\Omega_1)$ и существует $\nabla p\in L_q(\Omega_1)$ такое, что выполняется (1.1). Если же S_1, $S\in C^{2+\alpha}$, $\alpha\in(0,1)$, а $\vec{f}$, $\vec{j}\in C^{\alpha}(\Omega_1)$, то $\vec{v}\in C^{2+\alpha}(\Omega_1)$, $\nabla p\in C^{\alpha}(\Omega_1)$, $\vec{H}\in C^{1+\alpha}(\Omega_1)$, $\vec{E}\in C^{\alpha}(\Omega_1)$ в случае задачи I и $\vec{H}\in C^{1+\alpha}(\Omega_1)\cap C^{1+\alpha}(\Omega_2)$, $\vec{E}\in C^{\alpha}(\Omega_1)\cap C^{\alpha}(\Omega_2)$ в случае задачи II. Наконец, при S_1 $S\in C^3$, $\vec{f}\in L_q(\Omega_1)$, $\quad q\geqslant\frac{6}{5}$, $\vec{j}\in W_q^1(\Omega_1)$ имеем $\vec{v}\in W_q^2(\Omega_1)$, $\nabla p\in L_q(\Omega_1)$, $\vec{H}\in W_q^2(\Omega_1)$, $\vec{E}\in W_q^1(\Omega_1)$ в случае задачи I и $\vec{H}\in W_q^2(\Omega_1)\cap W_q^2(\Omega_2)$, $\vec{E}\in W_q^1(\Omega_1)\cap W_q^1(\Omega_2)$ в случае задачи II. Если же S_1, $S\in C^{3+\alpha}$, $\alpha\in(0,1)$, $\vec{f}\in C^{\alpha}(\Omega_1)$, $\vec{j}\in C^{1+\alpha}(\Omega_1)$, то $\vec{v}\in C^{2+\alpha}(\Omega_1)$, $\nabla p\in C^{\alpha}(\Omega_1)$, $\vec{H}\in C^{2+\alpha}(\Omega_1)$, $\vec{E}\in C^{1+\alpha}(\Omega_1)$ в случае задачи I и $\vec{v}\in C^{2+\alpha}(\Omega_1)$, $\nabla p\in C^{\alpha}(\Omega_1)$, $\vec{H}\in C^{2+\alpha}(\Omega_1)\cap C^{2+\alpha}(\Omega_2)$, $E\in C^{1+\alpha}(\Omega_1)\cap C^{1+\alpha}(\Omega_2)$ в случае задачи II.

Под $W_p^k(\Omega)$ и $C^{k+\alpha}(\Omega)$, $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, $\alpha\in(0,1)$ мы понимаем стандартные пространства Соболева и Гельдера с нормами

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)}=\sum_{|j|\leqslant k}\|\mathcal{D}^j u\|_{L_p(\Omega)},$$

$$\|u\|_{C^{k+\alpha}}(\Omega)=\sum_{|j|\leqslant k}\sup_{\Omega}|\mathcal{D}^j u(x)|+\sum_{|j|=k}\sup_{\Omega\times\Omega}\frac{|\mathcal{D}^j u(x)-\mathcal{D}^j u(y)|}{|x-y|^{\alpha}}.$$

Мы считаем области Ω_1 и Ω многосвязными и показываем, что в этом случае само определение обобщенного решения нуждается в уточнении: вектор $\vec{H}$ должен удовлетворять дополнительным условиям ортогональности.

2. Вспомогательные предложения

Следуя [8,9], мы приведем необходимые сведения относительно ортогонального разложения пространства квадратично суммируемых векторных полей $L_2(\mathcal{D})$, заданных в ограниченной многосвязной области $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^3$. Мы начнем с определений векторных полей Неймана и Дирихле и введем конечномерные пространства

$$U_n(\mathcal{D})=\{\vec{u}\in W_2^1(\mathcal{D}),\ \operatorname{div}\vec{u}=0,\ \operatorname{rot}\vec{u}=0,\ \vec{u}\cdot\vec{n}|_{\partial\mathcal{D}}=0\}$$

$$U_d(\mathcal{D})=\{\vec{u}\in W_2^1(\mathcal{D}),\ \operatorname{div}\vec{u}=0,\ \operatorname{rot}\vec{u}=0,\ \vec{u}_{\tau}|_{\partial\mathcal{D}}=0\}.$$

Размерности этих пространств равны первому и второму числу Бетти области $\mathcal{D}$, $b_1(\mathcal{D})$ и $b_2(\mathcal{D})$, соответственно.

Если $b_1(\mathcal{D}) > 0$, то существуют $b_1(\mathcal{D})$ гладких замкнутых кривых в $\mathcal{D}^c = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{D}}$, порождающие первую группу гомологии $\mathcal{D}^c$, и каждая такая кривая Λ порождает векторное поле Неймана, имеющее вид

$$\vec{u}(x) = \vec{u}_1(x) + \vec{u}_2(x) \tag{2.1}$$

где

$$\vec{u}_1(x) = \int\limits_{\Lambda} \frac{x-y}{|x-y|^3} \times d\vec{l}_y$$

и $\vec{u}_2 = \nabla\varphi$,

$$\nabla^2\varphi(x) = 0, \quad x \in \mathcal{D}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}|_{\partial\mathcal{D}} = -\vec{u}_1 \cdot \vec{n}|_{\partial\mathcal{D}}.$$

Что касается $b_2(\mathcal{D})$, то это число равно числу связных компонент границы $\partial\mathcal{D}$ минус 1, и если $\partial\mathcal{D} = \bigcup\limits_{k=0}^{b_2(\mathcal{D})} S_k$, то базис в $U_d(\mathcal{D})$ образуют векторные поля $\vec{v}_k = \nabla\Phi_k$, где Φ_k – решения задач

$$\nabla^2\Phi_k = 0, \ \Phi_k|_{S_j} = \delta_{jk}, \quad k, j = 1, \dots, b_2(\mathcal{D}), \quad \Phi_k|_{S_0} = 0. \tag{2.2}$$

Если $S_k \in C^m$, то $\vec{v}_k$, $\vec{u}_j \in W_q^{m+1}(\mathcal{D})$ при любом $q > 1$, а если $S_k \in C^{m+\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, то $\vec{v}_k$, $\vec{u}_j \in C^{m+1+\alpha}(\mathcal{D})$.

Для многосвязных областей формула ортогонального разложения пространства векторных полей из $L_2(\mathcal{D})$ имеет вид

$$L_2(\mathcal{D}) = \overset{\circ}{G}(\mathcal{D}) \oplus U_d(\mathcal{D}) \oplus U'(\mathcal{D}) \oplus U_n(\mathcal{D}) \oplus \overset{\circ}{J'}(\mathcal{D}), \tag{2.3}$$

где $\overset{\circ}{G}(\mathcal{D}) = \{\vec{u} = \nabla\varphi, \ \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\mathcal{D})\}$, $U'(\mathcal{D}) = \{\vec{u} = \nabla\psi \in W_2^1(\mathcal{D})$: $\Delta\psi = 0$, $\int_{S_k} \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0$, $k = 1, \dots, b_2(\mathcal{D})\}$, причем ψ – однозначные гармонические функции,

$$\overset{\circ}{J'}(\mathcal{D}) = \{\vec{u} \in L_2(\mathcal{D}) : \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad \vec{u} \cdot \vec{n}|_{\partial\mathcal{D}} = 0, \int\limits_{\Sigma_k} \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0, \}$$

где Σ_j, $j = 1, ..., b_1(\mathcal{D})$ – разрезы области $\mathcal{D}$, которые делают ее односвязной.

Как известно, функция $\vec{u} \cdot \vec{n}|_{\partial\mathcal{D}}$ определена для любого соленоидального векторного поля $\vec{u} \in L_2(\mathcal{D})$. Она удовлетворяет соотношению

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \vec{u} \cdot \vec{n}\phi dS = \int_{\mathcal{D}} \vec{u} \cdot \nabla\phi(x) dx$$

при любой $\phi \in W_2^1(\mathcal{D})$ и принадлежит пространству $W_2^{-1/2}(\partial\mathcal{D})$.

Полагая в (2.3)

$$U_n(\mathcal{D}) \oplus \overset{\circ}{J}{}'(\mathcal{D}) = \overset{\circ}{J}(\mathcal{D}), \quad U_d(\mathcal{D}) \oplus U'(\mathcal{D}) = U(\mathcal{D}),$$
$$\overset{\circ}{G}(\mathcal{D}) \oplus U_d(\mathcal{D}) \oplus U'(\mathcal{D}) = G(\mathcal{D}),$$
$$U_d(\mathcal{D}) \oplus U'(\mathcal{D}) \oplus U_n(\mathcal{D}) \oplus \overset{\circ}{J}{}'(\mathcal{D}) = J(\mathcal{D}),$$

мы получаем разложение пространства $L_2(\mathcal{D})$ в его классической форме [10]:

$$L_2(\mathcal{D}) = \overset{\circ}{G}(\mathcal{D}) \oplus U(\mathcal{D}) \oplus \overset{\circ}{J}(\mathcal{D}) = G(\mathcal{D}) \oplus \overset{\circ}{J}(\mathcal{D}) = \overset{\circ}{G}(\mathcal{D}) \oplus J(\mathcal{D}) \quad (2.4)$$

Предложение 2.1 [8]. *Пусть $\partial\mathcal{D} \in C^2$. При любом $\vec{j} \in \overset{\circ}{J}{}'(\mathcal{D})$ задача*

$$\operatorname{rot} \vec{w} = \vec{j}, \ \operatorname{div} \vec{w} = 0, \ x \in \mathcal{D}, \ \vec{w}_\tau|_{\partial\mathcal{D}} = 0 \quad (2.5)$$

имеет единственное решение $\vec{w} \in W_2^1(\mathcal{D}) \cap (U'(\mathcal{D}) \oplus \overset{\circ}{J}(\mathcal{D}))$ и

$$\|\vec{w}\|_{W_2^1(\mathcal{D})} \leqslant c\|\vec{j}\|_{L_2(\mathcal{D})}. \quad (2.6)$$

При любом $\vec{h} \in J(\mathcal{D}) \ominus U_d(\mathcal{D}) = \overset{\circ}{J}(\mathcal{D}) \oplus U'(\mathcal{D})$ задача

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{h}, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad x \in \mathcal{D}, \quad \vec{v} \cdot \vec{n}|_{\partial\mathcal{D}} = 0 \quad (2.7)$$

имеет единственное решение $\vec{v} \in \overset{\circ}{J}{}'(\mathcal{D}) \cap W_2^1(\mathcal{D})$ и

$$\|\vec{v}\|_{W_2^1(\mathcal{D})} \leqslant c\|\vec{h}\|_{L_2(\mathcal{D})}. \quad (2.8)$$

Доказательство. Приведем явные формулы для решения задач (2.5) и (2.7), следуя [8]. Пусть

$$\vec{w}_1(x) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \int\limits_{\mathcal{D}} \frac{\vec{j}(y)}{|x-y|} dy, \quad x \in \mathcal{D}.$$

Ясно, что $\operatorname{rot} \vec{w}_1(x) = \vec{j}(x)$ и $\operatorname{div} \vec{w}_1 = 0$. Кроме того, т.к. $\vec{j} \in \overset{\circ}{J}{}'(\Omega)$, мы имеем

$$\int\limits_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{w}_1(x) \cdot \vec{n} dS = \int\limits_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{n} dS = 0$$

для любой поверхности $\Sigma \subset \partial\mathcal{D}$ и для $\Sigma = \Sigma_k$. Поэтому, вследствие формулы Стокса, $\int\limits_{\ell} \vec{w}_1(x) \cdot d\vec{l} = 0$ для любого замкнутого контура $\ell \subset \partial\mathcal{D}$, а это значит, что $\vec{w}_1(x)|_{\partial\mathcal{D}} = \nabla_\tau a(x)$, где $a(x)$ – однозначная функция, определенная на $\partial\mathcal{D}$. Пусть $\vec{w}_2(x) = \nabla\varphi(x)$, где φ – решение задачи

$$\nabla^2\varphi(x) = 0, \quad x \in \mathcal{D}, \quad \varphi|_{\partial\mathcal{D}} = -a(x). \tag{2.9}$$

Ясно, что $\vec{w}_1(x)+\vec{w}_2(x)$ удовлетворяет соотношениям (2.5). Кроме того, в силу теоремы Кальдерона–Зигмунда,

$$\|\vec{w}_1\|_{W_2^1(\mathcal{D})} \leqslant c\|\vec{j}\|_{L_2(\mathcal{D})},$$

а из коэрцитивной оценки решения задачи Дирихле (2.9) следует

$$\|\vec{w}_2\|_{W_2^1(\mathcal{D})} \leqslant c\|\nabla_\tau a\|_{W_2^{1/2}(\partial\mathcal{D})} \leqslant c\|\vec{w}_1\|_{W_2^1(\mathcal{D})} \leqslant c\|\vec{j}\|_{L_2(\mathcal{D})}.$$

Добавив к $\vec{w}_1+\vec{w}_2$ линейную комбинацию $\vec{w}_3(x) = \sum\limits_{j=1}^{b_2(\mathcal{D})} a_j\nabla\Phi_j$ с подходящими постоянными a_j, можно добиться того, что $\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \vec{w}_3$ принадлежит $U'(\mathcal{D}) \oplus \overset{o}{J}(\mathcal{D}) = J(\mathcal{D}) \ominus U_d(\mathcal{D})$ и удовлетворяет (2.6) (ср. доказательство (2.19) ниже).

Построенное решение единственно, т.к. при $\vec{j} = 0$ равенства (2.5) влекут за собой $\vec{w} \in U_d(\mathcal{D})$, но поскольку $\vec{w} \in \overset{o}{J}(\mathcal{D}) \oplus U'(\mathcal{D}) = J(\mathcal{D}) \ominus U_d(\mathcal{D})$, то $\vec{w} = 0$.

Решение задачи (2.7) имеет вид $\vec{v}(x) = \vec{v}_1(x) + \vec{v}_2(x) + \sum\limits_{j=1}^{b_1(\mathcal{D})} a'_j\vec{u}_j(x)$, где

$$\vec{v}_1(x) = \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\int\limits_{\mathcal{D}_1}\frac{\vec{h}^*(y)}{|x-y|}dy,$$

$\vec{v}_2(x) = \nabla\psi$, ψ – решение задачи Неймана

$$\nabla^2\psi = 0 \quad x \in \mathcal{D}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial n}|_{\partial\mathcal{D}} = -\vec{v}_1\cdot\vec{n},$$

а $\vec{u}_j(x)$ – векторные поля Неймана в $\mathcal{D}$. Под $\vec{h}^*$ понимается соленоидальное продолжение $\vec{h}$ из $\mathcal{D}$ в более широкую область $\mathcal{D}_1$, а именно $\vec{h}^*(x) = \vec{h}(x)$ при $x \in \mathcal{D}$, $\vec{h}^*(x) = \nabla\psi_1(x)$ при $x \in \mathcal{D}_1 \setminus \bar{\mathcal{D}}$, где ψ_1 – решение задачи

$$\nabla^2\psi_1(x) = 0, \quad x \in \mathcal{D}_1 \setminus \bar{\mathcal{D}}, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial n}|_{\partial\mathcal{D}} = \vec{h}\cdot\vec{n}, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial n}|_{\partial\mathcal{D}_1} = 0.$$

Оно удовлетворяет неравенству

$$\|\nabla\psi_1\|_{L_2(\mathcal{D}_1\setminus\bar{\mathcal{D}})} \leqslant c\|\vec{h}\|_{L_2(\mathcal{D})},$$

следовательно,

$$\|\vec{v}_1\|_{W_2^1(\mathcal{D})} \leqslant c\|\vec{h}^*\|_{L_2(\mathcal{D}_1)} \leqslant c\|\vec{h}\|_{L_2(\mathcal{D})},$$
$$\|\vec{v}_2\|_{W_2^1(\mathcal{D})} \leqslant c\|\vec{v}_1\|_{W_2^1(\mathcal{D})} \leqslant c\|\vec{h}\|_{L_2(\mathcal{D})},$$
$$\|\vec{v}\|_{W_2^1(\mathcal{D})} \leqslant c\|\vec{h}\|_{L_2(\mathcal{D})}.$$

Построенное решение задачи (2.7) единственно, т.к. при $\vec{h} = 0$ имеем $\vec{v} \in U_n(\mathcal{D})$, а так как , с другой стороны, $\vec{v} \in \overset{\circ}{J}(\mathcal{D}) \ominus U_n(\mathcal{D})$, то $\vec{v} = 0$. Таким образом, предложение 2.1 доказано.

Приведенные выше результаты распространяются на пространства $L_p(\mathcal{D})$ и $C^\alpha(\mathcal{D})$, $p > 1$, $\alpha \in (0,1)$.

Предложение 2.2. *Пусть $\partial\mathcal{D} \in C^1$. Пространство $L_p(\mathcal{D})$ векторных полей, определенных в $\mathcal{D}$, разлагается в прямую сумму*

$$L_p(\mathcal{D}) = \overset{\circ}{G}_p(\mathcal{D}) \dot{+} U_d(\mathcal{D}) \dot{+} U_p'(\mathcal{D}) \dot{+} U_n(\mathcal{D}) \dot{+} \overset{\circ}{J}'_p(\mathcal{D}) \tag{2.10}$$

Кроме того, при $\partial\mathcal{D} \in C^{1+\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$

$$C^\alpha(\mathcal{D}) = \overset{\circ}{G}^{(\alpha)}(\mathcal{D}) \dot{+} U_d(\mathcal{D}) \dot{+} U'^{(\alpha)}(\mathcal{D}) \dot{+} U_n(\mathcal{D}) \dot{+} \overset{\circ}{J}^{(\alpha)}(\mathcal{D}) \tag{2.11}$$

где

$$\overset{\circ}{G}_p(\mathcal{D}) = \{\vec{u} = \nabla\varphi, \quad \varphi \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)\},$$

$U_p'(\mathcal{D})$ – множество градиентов однозначных гармонических функций, принадлежащих $W_p^1(\mathcal{D})$ и таких что $\int\limits_{S_k} \vec{u}\cdot\vec{n}dS = 0$, $k = 1, \ldots, b_2(\mathcal{D})$,

$$\overset{\circ}{J}'_p(\mathcal{D}) = \{\vec{u} \in L_p(\mathcal{D}) : \nabla \cdot \vec{u} = 0,\ \vec{u} \cdot \vec{n}|_{\partial\mathcal{D}} = 0, \int\limits_{\Sigma_j} \vec{u} \cdot \vec{n}dS = 0\},$$
$$j = 1, \ldots, b_1(\mathcal{D}),$$

$$\overset{\circ}{G}^{(\alpha)}(\mathcal{D}) = \{\vec{u} = \nabla\varphi, \quad \varphi \in C^{1+\alpha}(\mathcal{D}), \quad \varphi|_{\partial\mathcal{D}} = 0\},$$

$U'^{(\alpha)}(\mathcal{D})$ – множество градиентов однозначных гармонических функций, принадлежащих $C^{1+\alpha}(\mathcal{D})$ и удовлетворяющих условию

$$\int\limits_{S_k} \vec{u} \cdot \vec{n}dS = 0$$

и

$$\overset{\circ}{J}{}'^{\alpha)}(\mathcal{D}) = \{\vec{u} \in C^{\alpha}(\mathcal{D}), \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad \vec{u} \cdot \vec{n}|_{\partial(\mathcal{D})} = 0, \quad \int\limits_{\Sigma_j} \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0\}.$$

Доказательство. Проверим, что операторы проектирования на любое из подпространств X в разложении (2.3) ограничены в нормах $L_p(\mathcal{D})$ и $C^{\alpha}(\mathcal{D})$.

Пусть P_X – ортогональный проектор на X. Докажем ограниченность проекторов P_G и $P_{\overset{\circ}{G}}$. Мы имеем

$$P_{\overset{\circ}{G}} \vec{u} = \nabla \varphi, \quad P_G \vec{u} = \nabla \psi,$$

где φ и ψ – решения задач

$$\nabla^2 \varphi = \operatorname{div} \vec{u}, \ x \in \mathcal{D}, \ \varphi|_{\partial \mathcal{D}} = 0,$$
$$\nabla^2 \psi = \operatorname{div} \vec{u}, \ x \in \mathcal{D}, \ \frac{\partial \psi}{\partial n}|_{\partial \mathcal{D}} = \vec{u} \cdot \vec{n}.$$

Они удовлетворяют соотношениям

$$\int\limits_{\mathcal{D}} \nabla \varphi \cdot \nabla \eta dx = \int\limits_{\mathcal{D}} \vec{u} \cdot \nabla \eta dx,$$
$$\int\limits_{\mathcal{D}} \nabla \psi \cdot \nabla \eta_1 dx = \int\limits_{\mathcal{D}} \vec{u} \cdot \nabla \eta_1 dx,$$

где η и η_1 – произвольные гладкие функции, удовлетворяющие условиям $\eta|_{\partial \mathcal{D}} = 0$ и $\int\limits_{\mathcal{D}} \eta_1 dx = 0$. Как известно, при $\vec{u} \in L_p(\mathcal{D})$ справедливы неравенства

$$\|\nabla \varphi\|_{L_p(\mathcal{D})} \leqslant c \|\vec{u}\|_{L_p(\mathcal{D})}$$
$$\|\nabla \psi\|_{L_p(\mathcal{D})} \leqslant c \|\vec{u}\|_{L_p(\mathcal{D})} \tag{2.12}$$

Кроме того, если $\partial \mathcal{D} \in C^{1+\alpha}$, то

$$\|\nabla \varphi\|_{C^{\alpha}(\mathcal{D})} \leqslant c \|\vec{u}\|_{C^{\alpha}(\mathcal{D})}$$
$$\|\nabla \psi\|_{C^{\alpha}(\mathcal{D})} \leqslant c \|\vec{u}\|_{C^{\alpha}(\mathcal{D})} \tag{2.13}$$

(см. по этому поводу работы [11-13] и имеющуюся в них библиографию). Это доказывает ограниченность в $L_p(\mathcal{D})$ и в $C^{\alpha}(\mathcal{D})$ операторов P_G и $P_{\overset{\circ}{G}}$, а следовательно и $P_{\overset{\circ}{J}} = I - P_G$, $P_J = I - P_{\overset{\circ}{G}}$, $P_U = I - P_{\overset{\circ}{G}} - P_{\overset{\circ}{J}}$. Рассмотрим теперь проекторы P_{U_d} и P_{U_n}. Так как $U_d \subset U$, то $P_{U_d} \vec{u} =$

$P_{U_d}P_U\vec{u}$. Векторное поле $\vec{v}=P_U\vec{u}$ соленоидально, поэтому $\vec{v}\cdot\vec{n}|_{\partial\mathcal{D}}$ имеет смысл, кроме того, $\vec{v}=\vec{v}'+\vec{v}_d$, где $\vec{v}'\in U'(\mathcal{D})$, $\vec{v}_d\in U_d(\mathcal{D})$, а следовательно

$$\vec{v}\cdot\vec{n}=\vec{v}'\cdot\vec{n}+\vec{v}_d\cdot\vec{n}.$$

Пусть $\vec{v}_d=\sum\limits_{k=1}^{b_2(\mathcal{D})}c_k\nabla\Phi_k$, где Φ_k – решение задачи (2.2). Так как $\int\limits_{S_k}\vec{v}'\cdot\vec{n}dS=0$, мы получаем для c_j линейную систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{b_2}\int\limits_{S_k}c_j\frac{\partial\Phi_j}{\partial n}dS=\int\limits_{S_k}\vec{v}\cdot\vec{n}dS,\quad k=1,\ldots,b_2(\mathcal{D}). \tag{2.14}$$

Матрица с элементами $\int\limits_{S_k}\frac{\partial\Phi_j}{\partial n}dS$ невырождена, т.к. если бы существовали c_j^0 такие, что $\sum\limits_{j=1}^{b_2}\int\limits_{S_k}c_j^0\frac{\partial\Phi_j}{\partial n}dS=0$, то тогда функция $\Phi_0=\sum\limits_{j=0}^{b_2}c_j^0\Phi_j$ обладала бы свойством $\int\limits_{S_k}\frac{\partial\Phi_0}{\partial n}dS=0$ для всех связных компонент $\partial\mathcal{D}$: $k=0,\ldots,b_2(\mathcal{D})$, и следовательно мы бы имели $0=\sum\limits_{k=0}^{b_2}\int\limits_{S_k}\frac{\partial\Phi_0}{\partial n}\Phi_0dS=-\int\limits_{\mathcal{D}}|\nabla\Phi_0|^2dx$, что влечет за собой $c_j^0=0$. Таким образом, система (2.14) однозначно разрешима, и

$$\sum_{j=1}^{b_2}|c_j|\leqslant c\sum_{k=1}^{b_2}|\int\limits_{S_k}\vec{v}\cdot\vec{n}dS|. \tag{0.1}$$

Так как

$$\int_{S_k}\vec{v}\cdot\vec{n}dS=\int_{\mathcal{D}}\vec{v}\cdot\nabla\eta_k(x)dx,$$

где $\eta_k(x)$ – непрерывно дифференциремая функция, равная единице на S_k, мы имеем

$$\sum_{j=1}^{b_2}|c_j|\leqslant c\|\vec{v}\|_{L_p(\mathcal{D})}\leqslant c\|\vec{u}\|_{L_p(\mathcal{D})}\leqslant c\|\vec{u}\|_{C^\alpha(\mathcal{D})}, \tag{2.15}$$

а это доказывает ограниченность P_{U_d} в $L_p(\mathcal{D})$ и в $C^\alpha(\mathcal{D})$.

Переходим, наконец, к доказательству ограниченности P_{U_n}. Вектор $\vec{w} = P_{\overset{\circ}{J}}\vec{u}$ является суммой

$$\vec{w} = P_{U_n}\vec{u} + P_{\overset{\circ}{J'}}\vec{u} = \vec{w}_n + \vec{w}'$$

Пусть $\vec{w}_n = \sum\limits_{j=1}^{b_1(\mathcal{D})} c_j'\vec{u}_j$, где $\vec{u}_j$ – векторные поля Неймана (2.1). Так как $\int\limits_{\Sigma_k} \vec{w}' \cdot \vec{n} dS = 0$, то

$$\int\limits_{\Sigma_k} \vec{w} \cdot \vec{n} dS = \sum_{j=1}^{b_1} c_j' \int\limits_{\Sigma_k} \vec{u}_j \cdot \vec{n} dS, \quad k = 1, \ldots, b_1(\mathcal{D}) \tag{2.16}$$

Разрезы Σ_k и поля $\vec{u}_j$ могут быть выбраны таким образом, что $\int\limits_{\Sigma_k} \vec{u}_j \cdot \vec{n} dS = 4\pi\delta_{jk}$, (см. [8]) и поэтому система (2.16) однозначно разрешима и

$$\sum_{j=1}^{b_1} |c_j'| \leqslant \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{b_1} |\int_{\Sigma_k} \vec{w} \cdot \vec{n} dS| \leqslant c\|\vec{w}\|_{L_p(\mathcal{D})} \leqslant c\|\vec{w}\|_{C^\alpha(\mathcal{D})} \tag{2.17}$$

Это доказывает ограниченность P_{U_n} в $L_p(\mathcal{D})$ и в $C^\alpha(\mathcal{D})$ и завершает доказательство предложения.

Предложение 2.3. *Если $\partial\mathcal{D} \in C^2$, то проекторы P_X ограничены в $W_p^1(\mathcal{D})$, а при $\partial\mathcal{D} \in C^{2+\alpha}$ также в $C^{1+\alpha}(\mathcal{D})$.*

Действительно, наряду с (2.12), (2.13) мы имеем

$$\begin{aligned} \|\nabla\varphi\|_{W_p^1(\mathcal{D})} &\leqslant c\|\vec{u}\|_{W_p^1(\mathcal{D})}, \\ \|\nabla\psi\|_{W_p^1(\mathcal{D})} &\leqslant c\|\vec{u}\|_{W_p^1(\mathcal{D})}, \\ \|\nabla\varphi\|_{C^{1+\alpha}(\mathcal{D})} &\leqslant c\|\vec{u}\|_{C^{1+\alpha}(\mathcal{D})} \\ \nabla\varphi\|_{C^{1+\alpha}(\mathcal{D})} &\leqslant c\|\vec{u}\|_{C^{1+\alpha}(\mathcal{D})}, \end{aligned} \tag{2.18}$$

что доказывает ограниченность операторов P_G, $P_{\overset{\circ}{G}}$, P_J, P_U, а ограниченность P_{U_d} и P_{U_n} следует из (2.15), (2.17).

Предложение 2.4. . *Если $\partial\mathcal{D} \in C^2$, $\vec{j} \in \overset{o}{J'}_p(\mathcal{D})$, $\vec{h} \in \overset{o}{J}_p(\mathcal{D}) \dot{+} U_p'(\mathcal{D})$, $p > 1$, то решения задач* (2.5), (2.7) $\vec{w} \in W_p^1(\mathcal{D}) \cap (U_p'(\mathcal{D}) \dot{+} \overset{\circ}{J}_p(\mathcal{D}))$,

$\vec{v} \in\in \overset{o}{J'}_p(\mathcal{D}) \cap W_p^1(\mathcal{D})$ *удовлетворяют неравенствам*

$$\|\vec{w}\|_{W_p^1(\mathcal{D})} \leqslant c\|\vec{j}\|_{L_p(\mathcal{D})}$$
$$\|\vec{v}\|_{W_p^1(\mathcal{D})} \leqslant c\|\vec{h}\|_{L_2(\mathcal{D})},$$

а при $\partial\mathcal{D} \in C^{2+\alpha}$, $\vec{j} \in \overset{o}{J}'^{(\alpha)}(\mathcal{D})$, $\vec{h} \in \overset{o}{J}^{\alpha)}(\mathcal{D}) \dot{+} U'^{(\alpha)}(\mathcal{D})$ *–неравенствам*

$$\|\vec{w}\|_{C^{1+\alpha}(\mathcal{D})} \leqslant c\|\vec{j}\|_{C^{\alpha}(\mathcal{D})}$$
$$\|\vec{v}\|_{C^{1+\alpha}(\mathcal{D})} \leqslant c\|\vec{h}\|_{C^{\alpha}(\mathcal{D})},$$

Кроме того, если $\partial\mathcal{D} \in C^3$, $\vec{j} \in \overset{o}{J'}_p(\mathcal{D}) \cap W_p^1(\mathcal{D})$,

$$\vec{h} \in (\overset{o}{J}_p(\mathcal{D}) \dot{+} U'_p(\mathcal{D})) \cap W_p^1(\mathcal{D}),$$

то

$$\|\vec{w}\|_{W_p^2(\mathcal{D})} \leqslant c\|\vec{j}\|_{W_p^1(\mathcal{D})}$$
$$\|\vec{v}\|_{W_p^2(\mathcal{D})} \leqslant c\|\vec{h}\|_{W_p^1(\mathcal{D})},$$

а если $\partial\mathcal{D} \in C^{3+\alpha}$, $\vec{j} \in \overset{o}{J}'^{(\alpha)}(\mathcal{D}) \cap C^{1+\alpha}(\mathcal{D})$, $\vec{h} \in (\overset{o}{J}^{(\alpha)}(\mathcal{D}) \dot{+} U'^{(\alpha)}(\mathcal{D})) \cap C^{1+\alpha}(\mathcal{D})$, *то*

$$\|\vec{w}\|_{C^{2+\alpha}(\mathcal{D})} \leqslant c\|\vec{j}\|_{C^{1+\alpha}(\mathcal{D})}$$
$$\|\vec{v}\|_{C^{2+\alpha}(\mathcal{D})} \leqslant c\|\vec{h}\|_{C^{1+\alpha}(\mathcal{D})}.$$

Это предложение доказывается так же, как предложение 2.1; все оценки выводятся из приведенных выше формул для решений задач (2.5) и (2.7).

Для исследования задачи II необходимо изучить свойства функций из $\mathbb{H}_2(\Omega)$. Если первое число Бетти $b_1(\Omega)$ положительно, то в Ω существуют $b_1(\Omega)$ линейно независимых векторных полей Неймана $\vec{u}_k(x)$, $k = 1, \ldots, b_1(\Omega)$, $x \in \Omega$, а также $b_1(\Omega)$ обобщенных полей Неймана $\vec{u}'_k(x)$ (см. [9]), удовлетворяющих соотношением

$$\operatorname{rot} \vec{u}'_k(x) = 0,\ \operatorname{div} \vec{u}'_k(x) = 0,\ x \in \Omega_1 \cup \Omega_2,$$
$$\vec{u}'_k \cdot \vec{n}|_S = 0,\ [\mu\vec{u}'_k \cdot \vec{n}]|_{S_1} = 0,\ [\vec{u}'_{k\tau}]|_{S_1} = 0.$$

Ясно, что $\vec{u}'_k = \vec{u}_k + \nabla\omega_k(x)$, где ω_k – решение задачи

$$\nabla^2\omega_k = 0,\ x \in \Omega_1 \cup \Omega_2,\ \frac{\partial\omega_k}{\partial n}|_S = 0,$$
$$[\omega_k]|_{S_1} = 0, \quad [\mu\frac{\partial\omega_k}{\partial n}] = -[\mu]\vec{u}_k \cdot \vec{n}, \quad x \in S_1.$$

Предложение 2.5. *Пусть $S \in C^2$. При любом $\vec{\xi} \in L_p(\Omega) \cap \overset{\circ}{J}_p(\Omega_1)$, равном нулю в Ω_2, задача*

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{\xi},\ x \in \Omega_1 \cup \Omega_2,\ \vec{H}\cdot\vec{n}|_S = 0,\ [\mu\vec{H}\cdot n] = 0,\ [\vec{H}_\tau] = 0,\ x \in S_1$$

имеет единственное решение $\vec{H} \in W^1_p(\Omega_1) \cap W^1_p(\Omega_2)$, удовлетворяющее условиям ортогональности

$$\int\limits_\Omega \mu\vec{H}\cdot\vec{u}'_k dx = 0, \quad k = 1, \dots b_1(\Omega)$$

и неравенству

$$\|\vec{H}\|_{W^1_p(\Omega_1)} + \|\vec{H}\|_{W^1_p(\Omega_2)} \leqslant c\|\vec{\xi}\|_{L_p(\Omega_1)} \tag{2.19}$$

Если $S \in C^3$, $\vec{\xi} \in W^1_p(\Omega_1)$, то

$$\|\vec{H}\|_{W^2_p(\Omega_1)} + \|\vec{H}\|_{W^2_p(\Omega_2)} \leqslant c\|\vec{\xi}\|_{W^1_p(\Omega_1)},$$

а при $\vec{\xi} \in C^{\alpha+j}(\Omega_1)$, $j = 0, 1$, S, $S_1 \in C^{2+j}$ имеем

$$\|\vec{H}\|_{C^{\alpha+j+1}(\Omega_1)} + \|\vec{H}\|_{C^{\alpha+j+1}(\Omega_2)} \leqslant c\|\vec{\xi}\|_{C^{\alpha+1}}. \tag{2.20}$$

Предложение доказано в [9] в случае $p = 2$. Мы приведем формулу для решения, из которой будет очевидно, что оценки (2.19), (2.20) также имеют место. Эта формула имеет вид

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \nabla\chi + \sum_{j=1}^{b_1(\Omega)} a_i\vec{u}'_j(x)$$
$$\vec{H}_1 = \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\int\limits_{\Omega_1}\frac{\vec{\xi}(y)dy}{|x-y|}, \tag{2.21}$$
$$\nabla^2\chi(x) = 0, \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad \frac{\partial\chi}{\partial n}|_S = -\vec{H}_1\cdot\vec{n}|_S$$
$$[\mu\frac{\partial\chi}{\partial n}]|_{S_1} = -[\mu]\vec{H}_1\cdot\vec{n}|_{S_1} \tag{2.22}$$

Постоянные a_j определяются из условий

$$0 = \int_\Omega \mu \vec{H} \cdot \vec{u}'_j dx$$

$$= \int_\Omega \mu \vec{H}_1 \cdot \vec{u}'_j dx + \int_\Omega \mu \nabla\chi \cdot \vec{u}'_j dx + \sum_{i=1}^{b_1(\Omega)} a_i \int_\Omega \mu \vec{u}'_i \cdot \vec{u}'_j dx,$$

поэтому

$$\sum_{j=1}^{b_1} |a_j| \leqslant c(\|\vec{H}_1\|_{L_p(\mathcal{D})} + \|\nabla\chi\|_{L_p(\mathcal{D})}).$$

При оценках $\vec{H}_1$ и $\nabla\chi$ используется теорема Кальдерона–Зигмунда, оценки Ньютонова потенциала (2.21) в пространствах Гельдера, а также оценки решения задачи (2.22), как и в работе [9].

§3. Обобщенное решение задачи I и II в многосвязных областях и построение $\vec{E}(x)$

Определим обобщенные решения задач I и II в случае многосвязных областей Ω_1 и Ω. Как и выше, под $\mathbb{H}(\Omega)$ будем понимать пространство соленоидальных векторных полей из $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$. Что касается $\mathbb{H}_1(\Omega)$ и $\mathbb{H}_2(\Omega)$, то их определения нуждаются в модификации.

Определение 6. *Пространством $\mathbb{H}_1(\Omega_1)$ назовем множество векторных полей из $W^1_2(\Omega_1) \cap J'_0(\Omega_1)$.*

Определение 7. *Пространством $\mathbb{H}_2(\Omega)$ назовем множество векторных полей из $W^1_2(\Omega_1) \cap W^1_2(\Omega_2)$, удовлетворяющих уравнениям* (1.5) *в Ω_2, а также условию $\vec{H} \cdot \vec{n}|_S = 0$, условиям* (1.7) *на S_1 и*

$$\int_\Omega \mu \vec{H} \cdot \vec{u}'_k dx = 0, \quad k = 1, \dots b_1(\Omega),$$

где $\vec{u}'_k$ – обобщенные векторные поля Неймана в Ω.

Вследствие предложений 2.1 и 2.5, норма $\|\operatorname{rot} \vec{H}\|_{L_2(\Omega_1)}$ эквивалентна норме $\|\vec{H}\|_{W^1_2(\Omega_1)}$ для $\vec{H} \in \mathbb{H}_1(\Omega_1)$ и сумме норм

$$\|\vec{H}\|_{W^1_2(\Omega_1)} + \|\vec{H}\|_{W^1_2(\Omega_2)}$$

для $\vec{H} \in \mathbb{H}_2(\Omega)$, но это неверно для пространств $\mathbb{H}_1(\Omega_1)$ и $\mathbb{H}_2(\Omega)$, определенных в §1.

Определение 8. *Обобщенным решением задачи* I *назовем пару векторных полей* $\vec{v} \in \mathbb{H}(\Omega_1)$ *и* $\vec{H} \in \mathbb{H}_1(\Omega_1)$, *удовлетворяющих* (1.9) *и* (1.10) *при любых* $\vec{\varphi} \in \mathbb{H}(\Omega_1)$ *и* $\vec{\psi} \in \mathbb{H}_1(\Omega_1)$.

Определение 9. *Обобщенным решением задачи* II *назовем пару векторных полей* $\vec{v} \in \mathbb{H}(\Omega_1)$ *и* $\vec{H} \in \mathbb{H}_2(\Omega)$, *удовлетворяющих* (1.9) *и* (1.10) *при любых* $\vec{\varphi} \in \mathbb{H}(\Omega_1)$ *и* $\vec{\psi} \in \mathbb{H}_2(\Omega)$.

Вместо (1.10) мы будем работать с эквивалентным тождеством

$$\frac{1}{\sigma}\int\limits_{\Omega_1} \operatorname{rot}\vec{H}\cdot\operatorname{rot}\vec{\psi}dx - \int\limits_{\Omega_1} \mu\mathcal{P}(\vec{v}\times\vec{H})\cdot\operatorname{rot}\vec{\psi}dx = \frac{1}{\sigma}\int\limits_{\Omega_1}\mathcal{P}\vec{j}\cdot\operatorname{rot}\vec{\psi}dx \tag{3.1}$$

где $\mathcal{P}$ – ортогональный проектор на пространство $\overset{\circ}{J}(\Omega_1)\oplus U'(\Omega_1) = J(\Omega_1)\ominus U_d(\Omega_1)$ в случае задачи I и на $\overset{\circ}{J}(\Omega_1)$ в случае задачи II.

Разрешимость обеих задач устанавливается с помощью теоремы Лере-Шаудера точно так же как в [1,14]; при этом используются предложение 2.4 и соотношения

$$\int\limits_{\Omega_1}\vec{v}\cdot(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}dx = \int\limits_{\Omega_1}\vec{H}\cdot(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{H}dx = 0,$$

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\Omega_1}\vec{H}\cdot(\vec{H}\cdot\nabla)\vec{v}dx - \int\limits_{\Omega_1}\mathcal{P}(\vec{v}\times\vec{H})\cdot\operatorname{rot}\vec{H}dx\\ &= \int\limits_{\Omega_1}((\vec{H}\cdot\nabla)\vec{H}\cdot\vec{v} + (\vec{H}\cdot\nabla)\vec{v})\cdot\vec{H})dx = 0.\end{aligned}$$

Теорема 3.1. 1. *Предположим, что* $\vec{f} \in \mathbb{H}^*(\Omega_1)$, *т.е.*

$$\|\vec{f}\|_{\mathbb{H}^*} = \sup_{\vec{v}\in\mathbb{H}}\frac{|\int_{\Omega_1}\vec{f}\cdot\vec{v}dx|}{\|\nabla\vec{v}\|_{L_2(\Omega_1)}} < \infty,$$

и $\vec{j} \in L_2(\Omega_1)$. *Тогда задача I имеет единственное обобщенное решение* $\vec{v}$, $\vec{H} \in \mathbb{H}(\Omega_1)\times\mathbb{H}_1(\Omega_1)$ *и*

$$\|\vec{v}\|_{W_2^1(\Omega_1)} + \|\vec{H}\|_{W_2^1(\Omega_1)} \leqslant c(\|\vec{f}\|_{H^*(\Omega_1)} + \|\vec{j}\|_{L_2(\Omega_1)}). \tag{3.2}$$

2. *При любых* $\vec{f} \in \mathbb{H}^*(\Omega_1)$, $\vec{j} \in L_2(\Omega_1)$ *задача II имеет единственное обобщенное решение* $\vec{v}$, $\vec{H} \in \mathbb{H}(\Omega_1) \times \mathbb{H}_2(\Omega)$, *причем*

$$\|\vec{v}\|_{W_2^1(\Omega_1)} + \|\vec{H}\|_{W_2^1(\Omega_1)} + \|\vec{H}\|_{W_2^1(\Omega_2)} \leqslant c(\|\vec{f}\|_{\mathbb{H}^*(\Omega_1)} + \|\vec{j}\|_{L_2(\Omega_1)}). \quad (3.3)$$

Отметим, что

$$\|\vec{f}\|_{\mathbb{H}^*(\Omega_1)} \leqslant c\|\vec{f}\|_{L_p(\Omega_1)} \quad \text{при} \quad p \geqslant \frac{6}{5}. \quad (3.4)$$

Мы не будем воспроизводить доказательство теоремы и перейдем к определению векторного поля $\vec{E}(x)$.

Пусть $(\vec{v}, \vec{H})$ – обобщенное решение задачи I. Так как $rot\vec{H} \in \overset{\circ}{J}(\Omega_1) \oplus U'(\Omega_1)$, тождество (3.1) эквивалентно уравнению

$$\frac{1}{\sigma}\operatorname{rot}\vec{H} - \mu_1\mathcal{P}(\vec{v} \times \vec{H}) - \frac{1}{\sigma}\mathcal{P}\vec{j} = 0, \quad \mathcal{P} = P_{\overset{\circ}{J} \oplus U'}. \quad (3.5)$$

Определим $\vec{E}$ формулой

$$\vec{E} = -\mu_1 P_{\overset{\circ}{G} \oplus U_d}(\vec{v} \times \vec{H}) - \frac{1}{\sigma}P_{\overset{\circ}{G} \oplus U_d}\vec{j} \quad (3.6)$$

Вычтя ее из (3.5), мы придем к уравнению $\operatorname{rot} H - \sigma(\vec{E} + \mu_1(\vec{v} \times \vec{H})) = \vec{j}(x)$, $x \in \Omega_1$. Ясно,что $\vec{E}_\tau|_{S_1} = 0$; кроме того,

$$\begin{aligned} \|\vec{E}\|_{L_2(\Omega_1)} &\leqslant c(\|\vec{j}\|_{L_2(\Omega_1)} + \|\vec{v}\|_{L_4(\Omega_1)}\|\vec{H}\|_{L_4(\Omega_1)}) \\ &\leqslant c(\|\vec{j}\|_{L_2(\Omega_1)} + \|\vec{f}\|^2_{\mathcal{H}^*(\Omega_1)} + \|\vec{j}\|^2_{L_2(\Omega_1)}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Если $(\vec{v}, \vec{H})$ – обобщенное решение задачи II, то мы имеем

$$\frac{1}{\sigma}\operatorname{rot}\vec{H} - \mu_1\mathcal{P}(\vec{v} \times \vec{H}) - \frac{1}{\sigma}\mathcal{P}\vec{j} = 0, \quad \mathcal{P} = P_{\overset{\circ}{J}} \quad (3.8)$$

в области Ω_1. Положив

$$\vec{E}(x) = -\mu_1 P_G(\vec{v} \times \vec{H}) - \frac{1}{\sigma}P_G\vec{j} \equiv \nabla\omega_1(x),$$

мы получаем $\operatorname{rot} H - \sigma(\vec{E} + \mu_1(\vec{v} \times \vec{H})) = \vec{j}(x)$ в Ω_1. В Ω_2 мы полагаем $\vec{E} = \nabla\omega_2(x)$, где $\omega_2(x)$ – решение задачи

$$\nabla^2\omega_2(x) = 0, \quad \omega_2|_{S_1} = \omega_1|_{S_1}, \quad \omega_2|_S = 0,$$

так что $\operatorname{rot}\vec{E} = 0$, $\operatorname{div} E = 0$ в Ω_2 и $\vec{E}_\tau|_S = 0$, $[\vec{E}_\tau]|_{S_1} = 0$. Вместе с $\vec{E}$ этим же соотношениям удовлетворяет любое поле Дирихле в Ω_2, продолженное нулем в Ω_1, и следовательно $\vec{E}|_{\Omega_2}$ определяется с точностью до линейной комбинации

$$\sum_{k=1}^{b_2(\Omega_2)} a_k \nabla \Phi_k$$

где Φ_k – решение задачи (2.2) в Ω_2. Даже при односвязных Ω_1 и Ω в Ω_2 имеется векторное поле Дирихле $\nabla\Phi$, такое что $\nabla^2\Phi = 0$, $x \in \Omega_2$, $\Phi|_{S_1} = 1$, $\Phi|_S = 0$.

Постоянные a_k можно определить с помощью условия нормировки для $\vec{E}$, например в форме

$$\int_{S_k} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_k} \frac{\partial \omega_2}{\partial n} dS + \sum_{k=1}^{b_2(\Omega_2)} a_j \int_{S_k} \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS = 0, \qquad k = 1, \ldots, b_2(\Omega_2), \tag{3.9}$$

поскольку матрица с элементами $\int\limits_{S_k} \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} dS = 0$, i, $k = 1, \ldots, b_2(\Omega_2)$ имеет отличный от нуля определитель. Таким образом, условие (3.9) или аналогичное ему должно быть введено в формулировку задачи II. Легко видеть, что ее решение удовлетворяет неравенству (3.2) и что

$$\begin{aligned} \|\vec{E}\|_{L_2(\Omega_1)} + \|\vec{E}\|_{L_2(\Omega_2)} &\leqslant c\|\vec{E}\|_{L_2(\Omega_1)} \\ &\leqslant c(\|\vec{j}\|_{L_2(\Omega_1)} + \|\vec{v}\|_{L_4(\Omega_1)} \|\vec{H}\|_{L_4(\Omega_1)}) \\ &\leqslant c(\|\vec{j}\|_{L_2(\Omega_1)} + \|\vec{f}\|^2_{\mathcal{H}^*(\Omega_1)} + \|\vec{j}\|^2_{L_2(\Omega_1)}). \end{aligned}$$

4. Оценки решений задач I и II в нормах $W_p^k(\Omega)$ и $C^{k+\alpha}(\Omega)$

В этом параграфе выводятся оценки решений задач I и II в пространствах, упомянутых в конце §1.

Теорема 4.1. *Пусть* $S_1 \in C^3$. *Если* $\vec{f} \in L_p(\Omega_1)$, $\vec{j} \in W_p^1(\Omega_1)$, $p \geqslant 6/5$, *то обобщенное решение задачи* I *принадлежит* $W_p^2(\Omega_1) \times W_p^2(\Omega_1)$, *существуют такие* $\nabla p \in L_p(\Omega_1)$ *и* $\vec{E} \in W_p^1(\Omega_1)$, *что выполняются уравнения* (1.1), (1.2) *и решение удовлетворяет неравенству*

$$\begin{aligned} &\|\vec{v}\|_{W_p^2(\Omega_1)} + \|\vec{H}\|_{W_p^2(\Omega_1)} + \|\nabla p\|_{L_p(\Omega_1)} + \|\vec{E}\|_{W_p^1(\Omega_1)} \\ &\quad \leqslant c(\|f\|_{L_p(\Omega_1)} + \|\vec{j}\|_{W_p^1(\Omega_1)} + \|\vec{j}\|^8_{W_p^1(\Omega_1)} + \|\vec{f}\|^8_{L_p(\Omega)}). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Если же $S_1 \in C^{2+\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, $\vec{f} \in C^{\alpha}(\Omega_1)$, $\vec{j} \in C^{1+\alpha}(\Omega_1)$, *то* $\vec{v} \in C^{2+\alpha}(\Omega_1)$, $\nabla p \in C^{\alpha}(\Omega_1)$, $\vec{H} \in C^{2+\alpha}(\Omega_1)$, $\vec{E} \in C^{1+\alpha}(\Omega_1)$, *и*

$$\begin{aligned}\|\vec{v}\|_{C^{2+\alpha}(\Omega_1)} + \|\nabla p\|_{C^{\alpha}(\Omega_1)} + \|\vec{H}\|_{C^{2+\alpha}(\Omega_1)} + \|E\|_{C^{1+\alpha}(\Omega)} \\ \leqslant c(\|\vec{f}\|_{C^{\alpha}(\Omega_1)} + \|\vec{j}\|_{C^{1+\alpha}(\Omega_1)} + \|\vec{f}\|^{16}_{C^{\alpha}/\Omega_1)} + \|\vec{j}\|^{16}_{C^{1+\alpha}/\Omega_1)}).\end{aligned} \tag{4.2}$$

Теорема 4.2. *Если* S_1, $S \in C^3$, $\vec{f} \in L_p(\Omega_1)$, $\vec{j} \in W^1_p(\Omega_1)$, $p \geqslant \frac{6}{5}$, *то решение задачи* II (*с условием* (3.9)) *обладает следующими свойствами:* $\vec{v} \in W^2_p(\Omega_1)$, $\nabla p \in L_p(\Omega_1)$, $\vec{H} \in W^2_p(\Omega_1) \cap W^2_p(\Omega_2)$, $\vec{E} \in W^1_p(\Omega_1) \cap W^1_p(\Omega_2)$, *выполняются соотношения* (1.1)–(1.8) *и*

$$\begin{aligned}\|\vec{v}\|_{W^2_p(\Omega_1)} + \|\nabla p\|_{L_p(\Omega_1)} + \sum_{i=1}^{2}(\|\vec{H}\|_{W^2_p(\Omega_i)} + \|\vec{E}\|_{W^1_p(\Omega_i)}) \\ \leqslant c(\|\vec{f}\|_{L_p(\Omega_1)} + \|\vec{j}\|_{W^1_p(\Omega_1)} + \|\vec{f}\|^{8}_{L_p(\Omega_1)} + \|\vec{j}\|^{8}_{W^1_p(\Omega_1)}).\end{aligned} \tag{4.3}$$

Если же S_1, $S \in C^{3+\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, $\vec{f} \in C^{\alpha}(\Omega_1)$, $\vec{j} \in C^{1+\alpha}(\Omega_1)$, *то* $\vec{v} \in C^{2+\alpha}(\Omega_1)$, $\nabla p \in C^{\alpha}(\Omega_1)$, $\vec{H} \in C^{2+\alpha}(\Omega_1) \cap C^{2+\alpha}(\Omega_2)$, $\vec{E} \in C^{1+\alpha}(\Omega_1) \cap C^{1+\alpha}(\Omega_2)$ *и*

$$\begin{aligned}\|\vec{v}\|_{C^{2+\alpha}(\Omega_1)} + \|\nabla p\|_{C^{\alpha}(\Omega_1)} + \sum_{i=1}^{2}(\|\vec{H}\|_{C^{2+\alpha}(\Omega_i)} + \|\vec{E}\|_{C^{1+\alpha}(\Omega_i)}) \\ \leqslant c(\|\vec{f}\|_{C^{\alpha}(\Omega_1)} + \|\vec{j}\|_{C^{1+\alpha}(\Omega_1)} + \|\vec{f}\|^{16}_{C^{\alpha}(\Omega_1)} + \|\vec{j}\|^{16}_{C^{1+\alpha}(\Omega_1)}).\end{aligned} \tag{4.4}$$

Доказательства обеих теорем основано на результатах §2 и на следующей теореме о гладкости обобщенного решения задачи Стокса.

Предложение 4.1. [14-16]. *Пусть* $S_1 \in C^2$ *и пусть* $\vec{v} \in \mathbb{H}(\Omega_1)$ *удовлетворяет тождеству* $\nu \int\limits_{\Omega_1} \nabla \vec{v} \cdot \nabla \vec{\varphi} dx = \int\limits_{\Omega_1} \vec{F} \cdot \vec{\varphi} dx$ *при всех* $\varphi \in \mathbb{H}(\Omega_1)$.

Если $\vec{F} \in L_p(\Omega_1)$, *то* $\vec{v} \in W^2_p(\Omega_1)$ *и существует функция* $p(x)$ *с* $\nabla p \in L_p(\Omega_1)$ *такая что* $-\nu \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \vec{F}$, *причем*

$$\|\vec{v}\|_{W^2_p(\Omega_1)} + \|\nabla p\|_{L_p(\Omega_1)} \leqslant c\|\vec{F}\|_{L_p(\Omega_1)}$$

Если $S \in C^{2+\alpha}$ *и* $\vec{F} \in C^{\alpha}(\Omega_1)$, *то* $\vec{v} \in C^{2+\alpha}(\Omega_1)$, $\nabla p \in C^{\alpha}(\Omega_1)$, *и*

$$\|\vec{v}\|_{C^{2+\alpha}(\Omega_1)} + \|\nabla p\|_{C^{\alpha}(\Omega_1)} \leqslant c\|\vec{F}\|_{C^{\alpha}(\Omega_1)}. \tag{4.5}$$

Доказательство теорем 4.1 и 4.2. Докажем теорему 4.1. Отметим, что при $p \geqslant 6/5$

$$\|\vec{v}\|_{W_2^1(\Omega_1)} + \|\vec{H}\|_{W_2^1(\Omega_1)} \leqslant c(\|\vec{f}\|_{L_p(\Omega_1)} + \|\vec{j}\|_{W_p^1(\Omega_1)}).$$

Рассмотрим нелинейные члены в тождествах (1.9) и (3.1). Из того, что $\vec{v}$, $\vec{H} \in W_2^1(\Omega_1) \subset L_6(\Omega_1)$, следует

$$\|(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\|_{L_{3/2}(\Omega_1)} \leqslant \|\vec{v}\|_{L_6(\Omega_1)}\|\nabla\vec{v}\|_{L_2(\Omega_1)} \leqslant c\|\vec{v}\|^2_{W_2^1(\Omega_1)}, \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}\|(\vec{H}\cdot\nabla)\vec{H}\|_{L_{3/2}(\Omega_1)} &+ \|\nabla|\vec{H}|^2\|_{L_{3/2}}(\Omega_1)\\ &\leqslant \|\vec{H}\|_{L_6(\Omega_1)}\|\nabla\vec{H}\|_{L_2(\Omega_1)} \leqslant c\|\vec{H}\|^2_{W_2^1(\Omega_1)},\end{aligned} \tag{4.7}$$

и так как проектор $\mathcal{P} = P_{\overset{\circ}{J}(\Omega_1)\otimes U'(\Omega_1)}$ ограничен в $W^1_{3/2}(\Omega_1)$, мы имеем

$$\|\mathcal{P}(\vec{v}\times\vec{H})\|_{W^1_{3/2}(\Omega_1)} \leqslant c\|\vec{v}\times\vec{H}\|_{W^1_{3/2}(\Omega_1)} \leqslant c\|\vec{v}\|_{W_2^1(\Omega_1)}\|\vec{H}\|_{W_2^1(\Omega_1)}. \tag{4.8}$$

Предположим, что $p \leqslant 3/2$. Тогда вследствие (4.6)–(4.8) и предложения 4.1

$$\begin{aligned}\|\vec{v}\|_{W_p^2(\Omega_1)} + \|\nabla p\|_{L_p(\Omega_1)} &\leqslant c\|\vec{f} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} - \frac{\mu}{\rho}(\vec{H}\cdot\nabla)\vec{H}\|_{L_p(\Omega_1)}\\ + \frac{\mu}{2}\|\nabla|\vec{H}|\|^2_{L_p(\Omega_1)} &\leqslant c(\|\vec{f}\|_{L_p(\Omega_1)} + \|\vec{v}\|^2_{W_2^1(\Omega_1)} + \|\vec{H}\|^2_{W_2^1(\Omega_1)}),\end{aligned} \tag{4.9}$$

а в силу (3.5), (3.6) и предложения 2.4 имеем при $p \leqslant \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}\|\vec{H}\|_{W_p^2(\Omega_1)} + \|\vec{E}\|_{W_p^1(\Omega_1)} &\leqslant c(\|rot\vec{H}\|_{W_p^1(\Omega_1)} + \|\vec{E}\|_{W_p^1(\Omega_1)})\\ &\leqslant c(\|\vec{v}\|_{W_2^1(\Omega_1)}\|\vec{H}\|_{W_2^1(\Omega_1)} + \|\vec{j}\|_{W_p^1(\Omega)}),\end{aligned} \tag{4.10}$$

что вместе с (4.9) доказывает (4.1) в случае $p \leqslant \frac{3}{2}$. Если $p > \frac{3}{2}$, то в неравенствах (4.9) и (4.10) мы должны положить $p = \frac{3}{2}$, что означает, что они справедливы с показателем $p_1 = \min(p, \frac{3}{2})$. В силу теоремы вложения Соболева,

$$\begin{aligned}\|\vec{v}\|_{W_3^1(\Omega_1)} + \|\vec{H}\|_{W_3^1(\Omega_1)} &\leqslant c(\|\vec{v}\|_{W^2_{3/2}(\Omega_1)} + \|\vec{H}\|_{W^2_{3/2}(\Omega_1)})\\ &\leqslant c(\|\vec{v}\|^2_{W_2^1(\Omega_1)} + \|\vec{H}\|^2_{W_2^1(\Omega_1)} + \|\vec{j}\|_{W^1_{3/2}(\Omega_1)} + \|\vec{f}\|_{L_{3/2}(\Omega_1)}),\end{aligned} \tag{4.11}$$

а значит

$$\begin{aligned}&\|\vec{v}\|_{L_q(\Omega_1)} + \|\vec{H}\|_{L_q(\Omega_1)}\\ &\quad\leqslant c(\|\vec{v}\|^2_{W_2^1(\Omega_1)} + \|\vec{H}\|^2_{W_2^1(\Omega_1)} + \|\vec{f}\|_{L_{3/2}(\Omega_1)} + \|\vec{j}\|_{W^1_{3/2}(\Omega_1)})\end{aligned}$$

при любом $q > 1$. Это позволяет получить оценки нелинейных членов в норме $L_r(\Omega_1)$ при любом $r < 3$:

$$\begin{aligned} &\|(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\|_{L_r(\Omega_1)} + \|(\vec{H}\cdot\nabla)\vec{H}\|_{L_r(\Omega_1)} + \|\mathcal{P}(\vec{v}\times\vec{H})\|_{W_r^1(\Omega_1)} \\ &\quad\leqslant c(\|\vec{v}\|^2_{W_3^1(\Omega_1)} + \|\vec{H}\|^2_{W_3^1(\Omega_1)}) \\ &\quad\leqslant c(\|\vec{v}\|^2_{W_2^1(\Omega_1)} + \|\vec{H}\|^2_{W_2^1(\Omega_1)} + \|\vec{j}\|_{W^1_{3/2}(\Omega_1)} + \|\vec{f}\|_{L_{3/2}(\Omega_1)})^2 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Отсюда, как и выше, мы выводим

$$\begin{aligned} &\|\vec{v}\|_{W^2_{p_2}(\Omega_1)} + \|\nabla p\|_{L_{p_2}(\Omega_1)} + \|\vec{H}\|_{W^2_{p_2}(\Omega_1)} \\ &\quad\leqslant c(\|(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\|_{L_{p_2}(\Omega_1)} + \|(\vec{H}\cdot\nabla)\vec{H}\|_{L_{p_2}(\Omega_1)} + \|\mathcal{P}(\vec{v}\times\vec{H})\|_{L_{p_2}(\Omega_1)} \\ &\quad + \|\nabla|\vec{H}|^2\|_{L_{p_2}(\Omega_1)} + \|\mathcal{P}\vec{j}\|_{W^1_{p_2}(\Omega_1)} + \|\vec{f}\|_{L_{p_2}(\Omega_1)}) \\ &\|\vec{E}\|_{W^1_{p_2}(\Omega_1)} \leqslant c(\|\mathcal{P}\vec{j}\|_{W^1_{p_2}(\Omega_1)} + \|\mathcal{P}(\vec{v}\times\vec{H})\|_{W^1_{p_2}(\Omega_1)}) \end{aligned}$$

где $p_2 = \min(p, r)$. При $p < 3$ отсюда следует (4.1). Если $p \geqslant 3$, то мы продолжаем наше рассуждение. Так как $\vec{v}$, $\vec{H} \in W_r^2(\Omega_1)$, мы имеем $\vec{v}$, $\vec{H} \in W_p^1(\Omega_1) \cap L_\infty(\Omega_1)$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} &\|(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\|_{L_p(\Omega_1)} + \|(\vec{H}\cdot\nabla)\vec{H}\|_{L_p(\Omega_1)} + \|\mathcal{P}(\vec{v}\times\vec{H})\|_{L_p(\Omega_1)} + \|\nabla|\vec{H}|^2\|_{L_p(\Omega_1)} \\ &\quad\leqslant c(\|\vec{v}\|_{L_\infty(\Omega_1)} + \|\vec{H}\|_{L_\infty(\Omega_1)})(\|\nabla v\|_{L_p(\Omega_1)} + \|\nabla H\|_{L_p(\Omega_1)}) \\ &\quad\leqslant c(\|\vec{v}\|_{W_r^2(\Omega_1)} + \|\vec{H}\|_{W_r^2(\Omega_1)})^2. \end{aligned}$$

Отсюда и из (4.9), (4.10) легко вывести (4.1), что и требовалось.

Пусть теперь $\vec{f} \in C^\alpha(\Omega_1)$, $\vec{j} \in C^{1+\alpha}(\Omega_1)$, S, $S_1 \in C^{3+\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$. Тогда, по доказанному выше, $\vec{v}$, $\vec{H} \in W_q^2(\Omega_1)$, $\forall q > 1$, и тем более $\vec{v}$, $\vec{H} \in C^{1+\alpha}(\Omega_1)$. Для $\vec{v}$, $\vec{H}$ справедлива оценка (4.1) при $p = q$, кроме того,

$$\begin{aligned} &\|(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\|_{C^\alpha(\Omega_1)} + \|(\vec{H}\cdot\nabla)\vec{H}\|_{C^\alpha(\Omega_1)} \\ &\quad + \|\vec{\mathcal{P}}(\vec{v}\times\vec{H})\|_{C^{1+\alpha}(\Omega_1)} + \|\nabla|\vec{H}|^2\|_{C^\alpha(\Omega_1)} \\ &\quad\leqslant c(\|\vec{v}\|^2_{C^{1+\alpha}(\Omega_1)} + \|\vec{H}\|^2_{C^{1+\alpha}(\Omega_1)}) \leqslant c(\|\vec{v}\|^2_{W_q^2(\Omega_1)} + \|\vec{H}\|^2_{W_q^2(\Omega_1)}), \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\|\operatorname{rot}\vec{H}\|_{C^{1+\alpha}(\Omega_1)} \leqslant c(\|\vec{j}\|_{C^{1+\alpha}(\Omega_1)} + \|\vec{v}\|^2_{W_q^2(\Omega_1)} + \|\vec{H}\|^2_{W_q^2(\Omega_1)}). \tag{4.14}$$

Неравенство (4.2) вытекает из (4.5), (4.13), (4.14). Этим заканчивается доказательство теоремы 4.1.

Теорема 4.2 доказывается точно так же. Мы имеем оценку (4.9) при $p = p_1$. и вследствие (3.8)

$$\|\operatorname{rot}\vec{H}\|_{L_{p_1}(\Omega_1)} \leqslant \sigma(\|\mu_1\mathcal{P}(\vec{v}\times\vec{H}) + \frac{1}{\sigma}\mathcal{P}\vec{j}\|_{L_{p_1}(\Omega_1)}$$

что влечет за собой неравенство аналогичное (4.10):

$$\begin{aligned}&\|\vec{H}\|_{W^2_{p_1}(\Omega_1)} + \|\vec{H}\|_{W^2_{p_1}(\Omega_2)} + \|E\|_{W^1_{p_1}(\Omega)}\\&\quad\leqslant c(\|\vec{j}\|_{W^1_{p_1}(\Omega_1)} + \|\vec{v}\|_{W^1_2(\Omega_1)})(\|\vec{H}\|_{W^1_2(\Omega_1)} + \|\vec{H}\|_{W^1_2(\Omega_1)})).\end{aligned}$$

Дальнейшие рассуждения такие же, как в доказательстве теоремы 4.1, и мы их опустим.

Теорема 4.3. *Пусть* $S_1 \in C^2$, $\vec{f}$, $\vec{j} \in L_p(\Omega_1)$ *при* $p > 3$. *Тогда решение задачи* I *обладает следующими свойствами:* $\vec{v} \in W^2_p(\Omega_1)$, $\nabla p \in L_p(\Omega_1)$, $\vec{H} \in W^1_p(\Omega_1)$, $\vec{E} \in L_p(\Omega_1)$, *и*

$$\begin{aligned}&\|\vec{v}\|_{W^2_p(\Omega_1)} + \|\nabla p\|_{L_p(\Omega_1)}\\&\quad\leqslant c(\|\vec{f}\|_{L_p(\Omega_1)} + \|\vec{j}\|_{L_p(\Omega_1)} + \|\vec{f}\|^8_{L_p(\Omega_1)} + \|\vec{j}\|^8_{L_p(\Omega_1)}),\\&\|\vec{H}\|_{W^1_p(\Omega_1)} + \|\vec{E}\|_{L_p(\Omega_1)}\\&\quad\leqslant c(\|\vec{f}\|_{L_p(\Omega_1)} + \|\vec{j}\|_{L_p(\Omega_1)} + \|\vec{f}\|^4_{L_p(\Omega_1)} + \|\vec{j}\|^4_{L_p(\Omega_1)}).\end{aligned}\tag{4.15}$$

Если S, $S_1 \in C^2$, *то для решения задачи II имеем* $\vec{v} \in W^2_p(\Omega_1)$, $\nabla p \in L_p(\Omega_1)$, $\vec{H} \in W^1_p(\Omega_1) \cap W^1_p(\Omega_2)$, $\vec{E} \in L_p(\Omega)$, *и*

$$\begin{aligned}&\|\vec{v}\|_{W^2_p(\Omega_1)} + \|\nabla p\|_{L_p(\Omega_1)}\\&\quad\leqslant c(\|\vec{f}\|_{L_p(\Omega_1)} + \|\vec{j}\|_{L_p(\Omega_1)} + \|\vec{f}\|^8_{L_p(\Omega_1)} + \|\vec{j}\|^8_{L_p(\Omega_1)}),\\&\sum_{i=1}^2(\|\vec{H}\|_{W^1_p(\Omega_i)} + \|\vec{E}\|_{L_p(\Omega_i)})\\&\quad\leqslant c(\|\vec{f}\|_{L_p(\Omega_1)} + \|\vec{j}\|_{L_p(\Omega_1)} + \|\vec{f}\|^4_{L_p(\Omega_1)} + \|\vec{j}\|^4_{L_p(\Omega_1)}).\end{aligned}\tag{4.16}$$

Доказательство. Для обобщенного решения задачи I справедлива оценка (4.9) при $p = p_1 = 3/2$, а также

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{P}(\vec{v}\times\vec{H})\|_{L_3(\Omega_1)} \leqslant c\|(\vec{v}\times\vec{H})\|_{L_3(\Omega_1)}\\&\quad\leqslant c\|\vec{v}\|_{L_6(\Omega_1)}\|\vec{H}\|_{L_6(\Omega_1)} \leqslant c\|\vec{v}\|_{W^1_2(\Omega_1)}\|\vec{H}\|_{W^1_2(\Omega_1)}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\|\operatorname{rot}\vec{H}\|_{L_3(\Omega_1)} + \|\vec{E}\|_{L_3(\Omega_1)} \leqslant c(\|\vec{j}\|_{L_3(\Omega_1)} + \|\mathcal{P}(\vec{v}\times\vec{H})\|_{L_3(\Omega_1)}) \\
&\quad \leqslant c(\|\vec{j}\|_{L_3(\Omega_1)} + \|\vec{v}\|_{W_2^1(\Omega_1)}\|\vec{H}\|_{W_2^1(\Omega_1)}), \\
&\|\vec{H}\|_{W_3^1(\Omega_1)} + \|\vec{E}\|_{L_3(\Omega_1)} + \|\vec{v}\|_{W_3^1(\Omega)} \\
&\quad \leqslant c(\|\vec{f}\|_{L_{3/2}(\Omega_1)} + \|\vec{j}\|_{L_3(\Omega_1)} + \|\vec{v}\|^2_{W_2^1(\Omega_1)} + \|\vec{H}\|^2_{W_2^1(\Omega_1)}).
\end{aligned}$$

Ясно, что такому же неравенству подчиняется сумма норм $\|\vec{v}\|_{L_q(\Omega_1)} + \|\vec{H}\|_{L_q(\Omega_1)}$ при любом $q > 1$. Значит, справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
&\|\vec{v}\|_{W_r^2(\Omega_1)} + \|\nabla p\|_{W_r^2(\Omega_1)} \\
&\quad \leqslant c(\|\vec{f}\|_{L_r(\Omega_1)} + \|(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\|_{L_r(\Omega_1)} + \|(\vec{H}\cdot\nabla)\vec{H}\|_{L_r(\Omega_1)} + \|\nabla|\vec{H}|^2\|_{L_r(\Omega_1)}) \\
&\quad \leqslant c(\|\vec{f}\|_{L_r(\Omega_1)} + \|\vec{v}\|^2_{W_3^1(\Omega_1)} + \|\vec{H}\|^2_{W_3^1(\Omega_1)}),
\end{aligned}$$

при любом $r < 3$ и, кроме того,

$$\|\mathcal{P}(\vec{v}\times\vec{H})\|_{L_s(\Omega_1)} \leqslant c\|\vec{v}\|_{L_{2s}(\Omega_1)}\|\vec{H}\|_{L_{2s}(\Omega_1)} \leqslant c\|\vec{v}\|_{W_3^1(\Omega_1)}\|\vec{H}\|_{W_3^1(\Omega_1)}$$

при любом $s > 1$. Отсюда уже вытекает, что

$$\begin{aligned}
&\|\vec{v}\|_{L_\infty(\Omega_1)} \leqslant c\|\vec{v}\|_{W_r^2(\Omega_1)} \leqslant c(\|\vec{f}\|_{L_r(\Omega_1)} + \|\vec{v}\|^2_{W_3^1(\Omega_1)} + \|\vec{H}\|^2_{W_3^1(\Omega_1)}), \\
&\|\operatorname{rot}\vec{H}\|_{L_p(\Omega_1)} + \|\vec{E}\|_{L_p(\Omega_1)} \leqslant c(\|\vec{j}\|_{L_p(\Omega_1)} + \|\vec{v}\|_{W_3^1(\Omega_1)}\|\vec{H}\|_{W_3^1(\Omega_1)}),
\end{aligned}$$

и следовательно

$$\begin{aligned}
&\|\vec{H}\|_{L_\infty(\Omega_1)} + \|\vec{H}\|_{W_p^1(\Omega_1)} + \|\vec{E}\|_{L_p(\Omega_1)} \\
&\quad \leqslant c(\|\vec{j}\|_{L_p(\Omega_1)} + \|\vec{v}\|_{W_3^1(\Omega)}\|\vec{H}\|_{W_3^1(\Omega_1)}).
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Наконец,

$$\begin{aligned}
&\|\vec{v}\|_{W_p^2(\Omega_1)} + \|\nabla p\|_{L_p(\Omega_1)} \\
&\quad \leqslant (\|\vec{f}\|_{L_p(\Omega_1)} + \|(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\|_{L_p(\Omega_1)} + \|(\vec{H}\cdot\nabla)\vec{H}\|_{L_p(\Omega_1)} + \|\nabla|\vec{H}|^2\|_{L_p(\Omega_1)}) \\
&\quad \leqslant c(\|\vec{f}\|_{L_p(\Omega_1)} + \|\vec{v}\|_{L_\infty(\Omega_1)}\|\nabla\vec{v}\|_{L_p(\Omega_1)} + \|\vec{H}\|_{L_\infty(\Omega_1)}\|\nabla\vec{H}\|_{L_p(\Omega_1)})
\end{aligned}$$

Из этого неравенства, а также из (4.17) и из предыдущих оценок вытекает (4.15). Оценки (4.16) доказываются точно так же. $\square$

Теорема 4.4. *Если* $S_1 \in C^{2+\alpha}$, $\vec{f}$, $\vec{j} \in C^\alpha(\Omega_1)$, $\alpha \in (0,1)$, *то решение задачи* I *подчиняется неравенствам*

$$\begin{aligned}
&\|\vec{v}\|_{C^{2+\alpha}(\Omega_1)} + \|\nabla p\|_{C^\alpha(\Omega_1)} \\
&\qquad \leqslant c(\|\vec{f}\|_{C^\alpha(\Omega_1)} + \|\vec{j}\|_{C^\alpha(\Omega_1)} + \|\vec{f}\|^{16}_{C^\alpha(\Omega_1)} + \|\vec{j}\|^{16}_{C^\alpha(\Omega_1)}), \\
&\|\vec{H}\|_{C^{1+\alpha}(\Omega_1)} + \|\vec{E}\|_{C^\alpha(\Omega_1)} \\
&\qquad \leqslant c(\|\vec{j}\|_{C^\alpha(\Omega_1)} + \|\vec{f}\|_{C^\alpha(\Omega_1)} + \|\vec{f}\|^{8}_{C^\alpha(\Omega_1)} + \|\vec{j}\|^{8}_{C^\alpha(\Omega_1)}).
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Кроме того, если S_1, $S \in C^{2+\alpha}$, $\vec{f}$, $\vec{j} \in C^\alpha(\Omega_1)$, *то решение задачи* II *подчиняется неравенствам*

$$\begin{aligned}
&\|\vec{v}\|_{C^{2+\alpha}(\Omega_1)} + \|\nabla p\|_{C^\alpha(\Omega_1)} \\
&\qquad \leqslant c(\|\vec{f}\|_{C^\alpha(\Omega_1)} + \|\vec{j}\|_{C^\alpha(\Omega_1)} + \|\vec{f}\|^{16}_{C^\alpha(\Omega_1)} + \|\vec{j}\|^{16}_{C^\alpha(\Omega_1)}), \\
&\sum_{i=1}^{2}(\|\vec{H}\|_{C^{1+\alpha}(\Omega_i)} + \|\vec{E}\|_{C^\alpha(\Omega_i)}) \\
&\qquad \leqslant c(\|\vec{j}\|_{C^\alpha(\Omega_1)} + \|\vec{f}\|_{C^\alpha(\Omega_1)} + \|\vec{f}\|^{8}_{C^\alpha(\Omega_1)} + \|\vec{j}\|^{8}_{C^\alpha(\Omega_1)}),
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Оценки (4.18), (4.19) доказываются по тому же плану, что (4.2), (4.4). Действительно, (4.15), (4.16) справедливы при любом $p > 1$. Из этого факта, из неравенств (4.13), (4.14) и теорем вложения вытекает справедливость (4.18), (4.19).

Литература

1. В. А. Солонников, *О некоторых стационарных задачах магнитной гидродинамики*, Труды МИАН СССР **59** (1960), 5–36.
2. E. Sanchez–Palencia, *Existence des solutions de certains problèmes aux limites en magnétohedrodynamique.* J. Méc. 7, 405–426 (1968).
3. P. H. Roberts, *An introduction to magnetohydrodynamics.* London (1967).
4. J. Förste, *Ein Existenzsatz für stationäre Strömungen in der Magnetohydrodynamik.* Monatsberichte der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin **6**, Hf. 12 (1964) 886–89.
5. J. Förste, *Zum stationären magnetohydrodynamischen Umströmungsprobom*, Monatsbericte der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin **7**, Hf. 1 (1965), 1–6.
6. G. Lassner, *Über ein Rand-Anfasngswertproblem der Magnetohydrodynamik*, Arch. Rat. Mech. Anal., **25**, №. 5 (1967), 388–405.
7. J. Ströhmer, *About an initial-boundary value problem from mangetohydrodynamics*, Math. Z. **209** (1992), 345–362.

8. Э. Б. Быховский, Н. В. Смирнов, *Об ортогональных разложениях пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области*, Труды МИАН СССР **59** (1960), 6–36.
9. S. Mosconi, V. A. Solonnikov, *On a problem of magnetohydrodynamics in a multi-connected domain*, Nonlinear Analysis **74**, No. 2 (2010), 462–478.
10. H.Weyl, *The method of orthogonal projection in potential theory.* Duke Math. J. **7** (1941), 411–444.
11. В. А. Солонников, *Оценки решений нестационарной системы Навье–Стокса.* Зап. научн. семин. ЛОМИ **38** (1973), 153–231.
12. Ch. Simader, H. Sohr, *A new approach to the Helmholtz decomposition and the Neumann problem in L^q-spaces for bounded and exterior domains*, in: Mathematical Problems relating to the Navier–Stokes equations, G. P. Galdi (editor), Series in Advances in Mathematics for Applied Sciences, **11** (1992), 1–35.
13. Ch. Simader, *On Dirichlet's boundary value problem.* Lecture Notes in Math. **268**, Springer (1972).
14. О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* Москва, Наука (1970).
15. И. И. Ворович, В. И. Юдович, *Стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости.* Математический сб., **53**, No. 4 (1961), 393–428.
16. L. Cattabriga, *Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **31** (1961), 308–340.

Sakhaev Sh., Solonnikov V. A. On some stationary problems of magnetohydrodynamics in multi-connected domains.

We prove maximal regularity estimates in the Sobolev spaces W_p^2 and in the Hölder spaces $C^{2+\alpha}$ for weak solutions of stationary problems of magnetohydrodynamics. We give precise formulation of these problems in multi-connected domains.

Казахский
национальный университет
им. аль-Фараби,
пр. аль-Фараби 71,
050040 Алма-Аты, Казахстан

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: solonnik@pdmi.ras.ru

Поступило 19 октября 2011 г.