

С. А. Назаров, Я. Таскинен

**ДУВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ СОБСТВЕННЫХ
ЧАСТОТ В ЗАДАЧЕ ЙОНА ДЛЯ СВОБОДНО
ПЛАВАЮЩЕГО ТЕЛА**

1. Цель и методы исследования. Ф. Йон [1] в 1950 г. сформулировал математическую задачу о взаимодействии поверхностных волн со свободно плавающим телом в слое идеальной жидкости. При этом помимо потенциала скоростей φ неизвестным является столбец a с компонентами a_1, \dots, a_6 , описывающий (малые) жесткие смещения тела – три поступательных и три вращательных. Краевая задача для функции φ и система линейных алгебраических уравнений для столбца a , включающие спектральный параметр ω^2 (квадрат частоты колебаний), имеет “перекрестные” члены с множителем ω . Тем самым, спектральная задача порождает квадратичный пучок

$$\omega \mapsto \mathfrak{A}(\omega) = \mathfrak{A}_0 + \omega \mathfrak{A}_1 + \omega^2 \mathfrak{A}_2, \quad (1.1)$$

что делает ее изучение весьма сложным как с теоретической, так и с вычислительной стороны. Может быть поэтому задача в общей постановке была забыта на многие годы и, в основном, публикации касались закрепленных (не плавающих – предполагается, что $a = 0$) тел, для которых были получены многие интересные и важные результаты (см. обзоры [2, 3], монографии [4, 5] и др. публикации).

В последнее десятилетие интерес к задаче Йона возродился, однако по-прежнему в статьях [6–10] и многих других приводятся формальные вычисления или применяются априорные ограничения на способы движения тела: в основном, допускались только вертикальные, “вверх–вниз”. Вместе с тем, в статье [11] было замечено, что в некоторых ситуациях известные примеры [12], [4, гл. 4] поверхностных волн, захваченных двумя фиксированными идентичными полупогруженными телами (цилиндрами, так как задача рассматривается в двумерной

Ключевые слова: поверхностные волны, ловушечные моды, свободно плавающее тело, принцип сравнения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00759), а также гранта 139545 и проекта “Functional analysis and applications” Академии Финляндии.

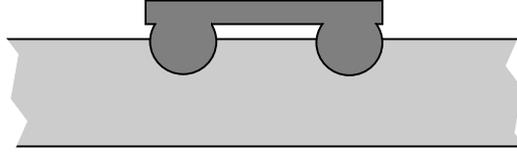


Рис. 1. Полупогруженное свободно плавающее тело.

постановке), годятся и для свободно плавающих тел (рис. 1), так как гидродинамические силы, приложенные к смоченным поверхностям тел, обладают нулевыми главным вектором и моментом.

В статье [13] был разработан новый подход (подробнее о нем ниже) к задаче о плавающих телах и, в частности, выведено достаточное условие существования захваченных волн (другие названия: ловушечные моды или локализованные решения) и найдены конкретные тела, производящие захват по крайней мере четырех линейно независимых поверхностных волн в симметричном канале. Комбинированием подходов и результатов [14] и [13] в работе [15] были построены полупогруженные и полностью погруженные свободно плавающие тела в симметричном канале, порождающие любое наперед заданное количество ловушечных мод. Метод [13], использующий понятие следового оператора [14] и заключающийся в сведении пучка (1.1) к уравнению

$$\mathcal{A}\mathcal{U} = \alpha\mathcal{U} \quad \text{в } \mathcal{H}, \quad (1.2)$$

с некоторым самосопряженным ограниченным оператором \mathcal{A} в специально выстраиваемом гильбертовом пространстве \mathcal{H} , применяется и в настоящей работе (см. п. 3). Именно, мы занимаемся сравнением спектров задачи о свободно плавающем теле и задач о фиксированных препятствиях в разнообразных постановках (их описание см. соответственно в п. 2 и п. 4).

Осложнения в исследовании задачи о подвижном теле связаны с тем, что строение спектров пучков и самосопряженных операторов может различаться по существу. Даже при самосопряженных операторах \mathfrak{A}_q

пучок (1.1), во-первых, может иметь комплексные (с ненулевыми мнимыми частями) собственные числа и, во-вторых, у собственных векторов могут быть присоединенные векторы, которые все вместе образуют нетривиальные жордановы цепочки. Такие загромождения спектральных структур можно обнаружить даже в случае вещественных симметричных числовых матриц \mathfrak{A}_q в формуле (1.1).

Собственное число $\omega = 0$ рассматриваемой задачи действительно не является алгебраически простым – имеются жордановы цепочки длиной два (см. замечание 3.2), однако спектр двумерной задачи Йона все-таки вещественный и вне точки $\omega = 0$ алгебраически простой. Этот результат – побочный продукт процедуры сведения [13], примененной в п. 3. В общей ситуации аномальное строение спектра, противоречащее физической природе задачи о поверхностных волнах, не опровергнуто до сих пор. Подчеркнем, что точка $\omega = 0$ особая и наличие в ней присоединенных векторов не влечет за собой каких-либо непоправимых последствий (см. еще раз замечание 3.2).

Еще одна неприятность, обусловленная возникновением квадратичного пучка, связана с отсутствием какого-либо математического аппарата, позволяющего сравнить спектры пучков (ср., например, частичное упорядочение полуограниченных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве [16, § 10.2]). Именно это обстоятельство и побудило авторов к написанию данной статьи, продолжающей работу [17], где получен *неполный* принцип сравнения спектров задач о подвижном и закрепленных телах.

Далее имеем дело со свободно плавающим цилиндром в бесконечном слое жидкости. Поскольку принцип сравнения годится только для дискретного спектра, для создания объекта исследования рассматривается косоое набегание волны, при котором задача в двумерной постановке изначально имеет интервал, свободный от непрерывного спектра и возможно содержащий дискретный спектр.

Традиционный принцип сравнения [18] утверждает, что в двумерной задаче о полностью погруженном фиксированном препятствии наращивание последнего приводит к уменьшению собственного числа и тем самым сохраняет его на дискретном спектре. Этот принцип был приспособлен [19] к полупогруженным телам. Разработанный в публикациях [14] и [20, 21] новый метод, привлекающий следовой оператор и элементарные сведения из теории самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, дал очень простые доказательства

упомянутых фактов, а также обеспечил разнообразные достаточные условия и принципы сравнения для задач о поверхностных волнах во многих постановках, но исключительно для закрепленных тел и препятствий. В п. 4 приводятся предложения 4.1 и 4.2 о вспомогательной задаче (4.3)–(4.6), полученные посредством названного метода. Однако для получения информации о дискретном спектре задачи (2.3)–(2.7) используется совершенно иная идея. Именно благодаря сведению [13] пучка (1.1) к самосопряженному оператору \mathcal{A} стало возможным применить аппарат теории спектральной меры (см., например, [16, гл. 5 и 6]). Это сделано в п. 5, где при помощи простых соображений (ср. соотношения (5.7)–(5.9)) установлены двусторонние оценки для собственных чисел задачи Йона. Вспомогательные вычисления и финальная теорема 6.1 приведены в п. 6. Там же сформулировано следствие 6.1, дающее достаточное условие захвата поверхностной волны.

Для демонстрации нового способа локализации положения собственной частоты задачи о свободно плавающем теле была выбрана простейшая по формулировке двумерная задача о косом набегании волны на бесконечный цилиндр, физическая интерпретация которой затруднительна из-за необходимости предположить отсутствие жесткости цилиндра на изгиб. Вместе с тем, разработанный метод годится для задачи Йона и в других постановках, но требует значительно более сложных вычислений.

Несколько неожиданным оказалось то, что спектр задачи (4.3)–(4.5), (4.7) о закрепленном теле не является “удобным приближением” к спектру задачи (2.3)–(2.7) о подвижном теле. Естественным образом в п. 4 возникает интегро-дифференциальное краевое условие (4.6) на смоченной поверхности тела, которое на эвристическом уровне было введено в работе [17] и соответствует телу, обладающему инерцией, но не подверженному силам плавучести. Именно спектр задачи о препятствии в новой постановке (4.3)–(4.6) фигурирует в теореме 6.1, основном результате статьи.

2. Математическая формулировка задачи. Пусть $\Pi = \mathbb{R} \times (-d, 0)$ $\ni (y, z)$ – полоса шириной $d > 0$, а $\Theta \subset \mathbb{R}^2$ – область с липшицевой границей $\partial\Theta$ и компактным замыканием $\bar{\Theta} = \Theta \cup \partial\Theta$. Предполагаем, что множество Θ_- , определенное равенством

$$\Theta_{\pm} = \{(y, z) \in \Theta : \pm z > 0\}, \quad (2.1)$$

не пустое, а $\bar{\Theta}$ пересекают ось y по объединению θ конечного набора замкнутых сегментов (на рис. 1 их два). Рассмотрим цилиндр $\mathbb{R} \times \Theta$ с сечением Θ , плавающий в слое $\mathbb{R}^2 \times (-d, 0)$ несжимаемой и невязкой, т.е. идеальной жидкости, например, воды. Кроме того, пренебрегаем поверхностным натяжением жидкости и изгибной жесткостью цилиндра.

Потенциал скоростей, точнее последний сомножитель в его представлении

$$\varphi(x, y, z, t) = \operatorname{Re} (e^{-i\omega t + ikx} \varphi(y, z)), \quad (2.2)$$

удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$-\Delta \varphi(y, z) + k^2 \varphi(y, z) = 0, \quad (y, z) \in \Omega := \Pi \setminus \bar{\Theta}, \quad (2.3)$$

и краевым условиям: линеаризованному кинематическому

$$-\partial_z \varphi(y, 0) = g^{-1} \omega^2 \varphi(y, 0), \quad (y, z) \in \Gamma, \quad (2.4)$$

и однородному условию Неймана (непротекание жидкости сквозь дно Υ)

$$\partial_\nu \varphi(y, -d) = 0, \quad (y, z) \in \Upsilon = \mathbb{R} \times \{-d\}. \quad (2.5)$$

Здесь Δ – оператор Лапласа, $\omega > 0$ – частота колебаний, $k > 0$ – волновое число в направлении оси x , $\Gamma = \{(y, z) : z = 0, y \notin \bar{\Theta}\}$ – свободная поверхность жидкости, а $g > 0$ – ускорение свободного падения. Неравенство $k > 0$ запрещает движение волны в направлении, строго перпендикулярном оси цилиндра.

Формула (2.2) означает, что мы имеем дело с гармоническими во времени волнами, набегающими на цилиндр под углом $\gamma \neq \pi/2$. При колебаниях тела с малой амплитудой краевое условие на смоченной поверхности тела $\Sigma = \{(y, z) \in \partial\Theta : z < 0\}$ имеет вид

$$\partial_\nu \varphi(y, z) = -i\omega \nu(y, z)^\top D(y - y^\bullet, z - z^\bullet) a, \quad (y, z) \in \Sigma, \quad (2.6)$$

а столбец $a = (a_1, a_2, a_3)^\top$ жестких смещений тела Θ удовлетворяет системе трех линейных алгебраических уравнений

$$gKa - i\omega S\varphi = \omega^2 Ma. \quad (2.7)$$

Поясним принятые обозначения. Во-первых, $\nu = (\nu_1, \nu_2)^\top$ – единичный вектор внешней нормали и $\partial_\nu = \nu^\top \nabla$ – производная вдоль внешней нормали, определенной почти всюду на $\partial\Theta$. причем \top – знак транспонирования, $\nabla = (\partial_y, \partial_z)^\top$ – оператор-градиент и $\partial_y = \partial/\partial y$, $\partial_z = \partial/\partial z$.

Во-вторых, D – линейная матрица-функция размером 2×3 , задающая жесткие смещения,

$$D(y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -z \\ 0 & 1 & y \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

а (y^\bullet, z^\bullet) – центр масс,

$$(y^\bullet, z^\bullet) = m^{-1} \int_{\Theta} (y, z) \rho(y, z) dydz, \quad m = \int_{\Theta} \rho(y, z) dydz, \quad (2.9)$$

$\rho > 0$ и m – плотность и масса тела. Подчеркнем, что плотность жидкости сведена к единице. В-третьих, столбец a извлечен из следующего представления (малых по амплитуде) колебательных движений цилиндра $\mathbb{R} \times \Theta$:

$$D(y - y^\bullet, z - z^\bullet) \mathbf{a}(x, t) = \operatorname{Re} (e^{-i\omega t + ikx} D(y - y^\bullet, z - z^\bullet) a(t)). \quad (2.10)$$

Согласованное с формулой (2.2) появление в правой части (2.10) множителя $e^{-i\omega t + ikx}$ означает неоднородность смещений точек на образующих цилиндрической поверхности (тело извивается как змея), и для физического осмысления задачи (2.3)–(2.7) требуется, чтобы упругие свойства цилиндра не препятствовали изгибным деформациям тела. Подчеркнем, что благодаря предположению о малости колебаний задача ставится в неизменной области $\mathbb{R} \times \Omega$, отвечающей равновесному положению тела, и незначительные изменения его формы в главном не принимаются во внимание.

Наконец, укажем ингредиенты системы алгебраических уравнений (2.7), которая получается подстановкой выражения $\mathbf{a}(x, t) = \operatorname{Re} (e^{-i\omega t + ikx} a(t))$ из формулы (2.10) в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$M \partial_t^2 \mathbf{a} = -S \partial_t \varphi - gK \mathbf{a}, \quad (2.11)$$

проистекающую из закона сохранения линейных и углового моментов. Матрица инерции

$$M = \int_{\Theta} D(y - y^\bullet, z - z^\bullet)^\top D(y - y^\bullet, z - z^\bullet) \rho(y, z) dydz \quad (2.12)$$

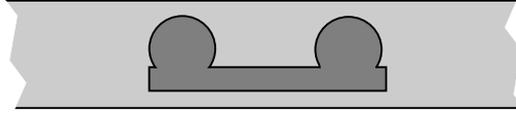


Рис. 2. Погруженное свободно плавающее тело.

является матрицей Грина, симметричной и положительно определенной. Интегральный оператор S со значениями в пространстве столбцов высотой три задан формулой

$$S\varphi = \int_{\Sigma} D(y - y^{\bullet}, z - z^{\bullet})^{\top} \nu(y, z) \varphi(y, z) ds, \quad (2.13)$$

где ds – элемент длины дуги. Согласно работе [1] (см. также, например, книгу [22]) (3×3) -матрица K в системах (2.7) и (2.11) имеет вид

$$K = K^{\theta} + K^{\ominus}, \quad K^{\theta} = \int_{\theta} d(y - y^{\bullet})^{\top} d(y - y^{\bullet}) dy, \quad (2.14)$$

$$K^{\ominus} = \text{diag}\{0, 0, I_z^{\ominus}\}, \quad I_z^{\ominus} = \int_{\Theta_-} (z - z^{\bullet}) dy dz,$$

причем $d(y)$ – нижняя строка матрицы жестких смещений (2.8). Матрица K связана с плавучестью тела, а ее структура

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

с нулями в первых строке и столбце показывает, что горизонтальное смещение a_1 тела не влияет на силы плавучести. Подчеркнем особо, что при переходе к двумерной постановке задачи учтен тот же самый эффект (точнее его отсутствие) для поступательных смещений вдоль оси x . Повороты вокруг осей z и y запрещены самой постановкой задачи о косом набегании волны на бесконечный цилиндр. В результате столбец $a = (a_1, \dots, a_6)^{\top}$ жестких смещений в пространственной задаче сократился до столбца $a = (a_1, a_2, a_3)^{\top}$ в плоской.

Плавающее тело должно находиться в состоянии устойчивого равновесия. Согласно закону Архимеда имеем

$$m = v, \quad \text{где} \quad v = \int_{\Theta_-} dydz \quad (2.16)$$

(масса m тела Θ равна объему v вытесненной жидкости – напоминаем, что плотность жидкости равна единице). Интегрирование в последнем интеграле из формулы (2.14) и в интеграле (2.16) ведется по погруженной части Θ_- тела (см. определение (2.1)). Классические условия устойчивости Эйлера [23] плавающего объекта (ср. также [1], [22] и др.) требуют прежде всего, чтобы центр плавучести

$$(y^\ominus, z^\ominus) = v^{-1} \int_{\Theta_-} (y, z) dydz, \quad (2.17)$$

был расположен на той же вертикальной линии, что и центр масс (y^\bullet, z^\bullet) , причем строго над ним в случае полностью погруженного тела (т.е. при $\theta = \emptyset$). Последнее означает, что матрица K положительна и ее ранг κ равен единице. Если же тело полупогружено и $\theta \neq \emptyset$, то условие устойчивости Эйлера по-прежнему обеспечивает положительность матрицы K , но дополнительно ее ранг становится равным двум (см., например, статью [1] и книгу [22]). Запишем сформулированные ограничения так:

$$\begin{aligned} K \geq 0, \quad \kappa = \text{rank } K = 1 \quad (\text{т.е. } z^\bullet < z^\ominus) \quad \text{в случае } \theta = \emptyset, \\ K \geq 0, \quad \kappa = \text{rank } K = 2 \quad \text{в случае } \theta \neq \emptyset. \end{aligned} \quad (2.18)$$

В дальнейшем понадобится только приведенная в (2.18) информация о матрице K . Словесное описание второй строки (2.18) можно найти в публикациях [1, 22] и др.

3. Процедура сведения задачи о свободно плавающем теле к самосопряженному оператору. Умножим уравнение (2.3) на пробную функцию ψ , гладкую и с компактным носителем, и проинтегрируем по частям в области Ω при учете краевых условий (2.4)–(2.6).

Прибавим к результату систему (2.7), умноженную скалярно на пробный столбец $b \in \mathbb{C}^3$. В силу понятного соотношения

$$\int_{\Sigma} \overline{\psi(y, z)} \nu(y, z)^\top D(y - y^\bullet, z - z^\bullet) a \, ds = (a, S\psi)_{\mathbb{C}}, \quad (3.1)$$

где $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{C}}$ – скалярное произведение в комплексном пространстве \mathbb{C}^3 , и S – оператор (2.13), получаем интегральное тождество, т.е. вариационную формулировку [13] задачи (2.3)–(2.7) о свободно плавающем теле:

$$\begin{aligned} & (\nabla\varphi, \nabla\psi)_{\Omega} + k^2(\varphi, \psi)_{\Omega} + g(Ka, b)_{\mathbb{C}} + i\omega((a, S\psi)_{\mathbb{C}} - (S\varphi, b)_{\mathbb{C}}) \\ & = \omega^2(g^{-1}(\varphi, \psi)_{\Gamma} + (Ma, b)_{\mathbb{C}}), \quad (\psi, b) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{C}^3. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь $(\cdot, \cdot)_{\Omega}$ и $(\cdot, \cdot)_{\Gamma}$ – натуральные скалярные произведения в пространствах Лебега $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$ соответственно.

В пространстве Соболева $H^1(\Omega)$ введем скалярное произведение

$$\langle \varphi, \psi \rangle = (\nabla\varphi, \nabla\psi)_{\Omega} + k^2(\varphi, \psi)_{\Omega} \quad (3.3)$$

и следовой оператор T при помощи формулы

$$\langle T\varphi, \psi \rangle = (\varphi, \psi)_{\Gamma}, \quad \varphi, \psi \in H^1(\Omega). \quad (3.4)$$

Этот оператор по понятным причинам является положительным, непрерывным и симметрическим, а значит, самосопряженным. Известно (см., например, [21]), что непрерывный спектр следового оператора занимает полуинтервал $(0, \beta_{\dagger}]$, где

$$\beta_{\dagger} = \lambda_{\dagger}^{-1}, \quad \lambda_{\dagger} = k \frac{1 - e^{-2kd}}{1 + e^{-2kd}}. \quad (3.5)$$

Точка $\beta = 0$ является собственным числом бесконечной кратности с собственным подпространством, которое состоит из функций $\varphi \in H^1(\Omega)$, обращающихся в нуль на свободной поверхности Γ жидкости. Таким образом, сегмент $[0, \beta_{\dagger}]$ представляет собой существенный спектр оператора T .

При учете определений (3.3) и (3.4) интегральное тождество (3.2) принимает вид абстрактного уравнения (системы)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & gK \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ a \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} 0 & iS^* \\ -iS & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ a \end{pmatrix} \\ & = \omega^2 \begin{pmatrix} g^{-1}T & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ a \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.6)$$

в гильбертовом пространстве

$$\mathcal{H} = H^1(\Omega) \times \mathbb{C}^3. \quad (3.7)$$

Здесь \mathbb{I} – тождественное отображение в $H^1(\Omega)$, S^* – сопряженный для оператора

$$S : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}^3, \quad (3.8)$$

определенного равенством (2.13), причем оба, как S так и S^* , являются компактными, поскольку Σ – объединение конечных дуг и поэтому вложение $H^1(\Omega) \subset L_2(\Sigma)$ компактно.

Удалим из системы (3.6) слагаемое, содержащее операторы S и S^* , и превратим ее тем самым в совокупность двух уравнений

$$\varphi = \lambda T \varphi, \quad (3.9)$$

$$K a = \lambda M a$$

с новым спектральным параметром

$$\lambda = g^{-1} \omega^2. \quad (3.10)$$

Поскольку первое уравнение (3.9) принимает вид $T \varphi = \beta \varphi$ после замены $\lambda \mapsto \beta = 1/\lambda$, оно порождает непрерывный λ -спектр $[\lambda_{\dagger}, +\infty)$ с точкой отсечки $\lambda_{\dagger} > 0$, указанной в формуле (3.5). Второе уравнение (3.9) представляет собой алгебраическую систему, а значит, ее λ -спектр полностью дискретный. Следовательно, согласно связи (3.10) спектральных параметров λ и ω задача (3.9) приобретает такой непрерывный спектр:

$$(-\infty, -\omega_{\dagger}] \cup [\omega_{\dagger}, +\infty). \quad (3.11)$$

При этом

$$\omega_{\dagger} = \sqrt{g \lambda_{\dagger}} = \sqrt{g k \frac{1 - e^{-2kd}}{1 + e^{-2kd}}}. \quad (3.12)$$

Система (3.6) отличается от (3.9) лишь компактным “возмущением”, а значит, непрерывный ω -спектр (3.11) сохраняется и для операторной записи (3.6) задачи (3.2).

Замечание 3.1. Первое уравнение (3.9) соответствует задаче о взаимодействии поверхностных волн с фиксированным препятствием Θ , которая составлена из уравнения (2.3), а также краевых условий (2.4), (2.5) и

$$\partial_{\nu} \varphi(y, z) = 0, \quad (y, z) \in \Sigma. \quad (3.13)$$

Точка отсечки λ_{\dagger} непрерывного спектра задачи (2.3)–(2.5), (3.13), указанная формулой (3.5), была впервые вычислена в работе [24] (см. также [4] и др.). Кроме того, обнаруживающие непрерывный спектр сингулярные последовательности Вейля (см., например, монографию [16, §9.1]) построены в работе [21]: они сооружаются из собственной функции

$$\phi_{\dagger}(z) = e^{kz} + e^{-k(z+2d)} \quad (3.14)$$

следующей модельной задачи на отрезке $(-d, 0)$, т.е. поперечном сечении полосы Π :

$$\begin{aligned} -\partial_z^2 \phi(z) + k^2 \phi(z) &= 0, \quad z \in (-d, 0), \\ \partial_z \phi(0) &= \lambda \phi(0), \quad -\partial_z \phi(-d) = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Систему (3.6) можно интерпретировать как квадратичный пучок (1.1). Точка $\omega = 0$ принадлежит его спектру, и ей согласно строению (2.14) матрицы K отвечает собственное подпространство размерностью $3 - \kappa = 3 - \text{rank} K$, натянутое на столбцы

$$e^{(1)}, e^{(2)} \text{ в случае } \theta = \emptyset \text{ и } \text{rank} K = 1, \quad (3.16)$$

$$e^{(1)} \text{ в случае } \theta \neq \emptyset \text{ и } \text{rank} K = 2$$

(ср. соотношения (2.18)); здесь $e^{(j)} = (\delta_{1,j}, \delta_{2,j}, \delta_{3,j})^\top$ – орт в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 .

Замечание 3.2. Как уже упоминалось в п. 1, указанные в формуле (3.16) собственные векторы имеют присоединенные, т.е. собственное число $\omega = 0$ пучка (3.6) не является простым алгебраически. Так, например, в ситуации полностью погруженного тела у собственных векторов $X^{j,0} = (0, e^{(j)}) \in \mathcal{H}$, $j = 1, 2$, появляются присоединенные векторы $X^{j,1} = (\varphi^{(j)}, 0) \in \mathcal{H}$, удовлетворяющие уравнениям

$$\mathfrak{A}(0)X^{j,1} = -\frac{d\mathfrak{A}}{d\omega}(0)X^{j,0}$$

и потому включающие решения следующих задач Неймана

$$-\Delta \varphi(y, z) + k^2 \varphi(y, z) = 0, \quad (y, z) \in \Omega, \quad -\partial_\nu \varphi(y, z) = 0, \quad (y, z) \in \Gamma \cup \Upsilon,$$

$$\partial_\nu \varphi(y, z) = i\nu(y, z)^\top D(y - y^\bullet, z - z^\bullet) e^{(j)}, \quad (y, z) \in \Sigma.$$

В случае полупогруженного тела остается только одна жорданова цепочка, состоящая из собственного $(0, e^{(1)})$ и присоединенного $(\varphi^{(1)}, 0)$ векторов. Можно убедиться в том, что в обоих случаях жордановых

цепочек с длинами, большими двух, не существует. Приведенная информация далее не понадобится.

Пусть $T^{1/2}$ – положительный квадратный корень из положительно-го самосопряженного оператора T (см. определение, например, в книге [16, §10.3]), а N – обратная матрица для матрицы M , вещественная симметричная и положительно определенная. Введем функцию и столбец

$$\eta = \omega g^{-1/2} T^{1/2} \varphi, \quad f = \omega M a$$

и перепишем квадратичный пучок (3.6) как линейный

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & gK & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \eta \\ a \\ f \end{pmatrix} \\ &= \omega \begin{pmatrix} 0 & g^{-1/2} T^{1/2} & -iS^* & 0 \\ g^{-1/2} T^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ iS & 0 & 0 & \mathbb{I} \\ 0 & 0 & \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \eta \\ a \\ f \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Матричные операторы в левой и правой частях (3.17) оказываются самосопряженными в гильбертовом пространстве

$$\mathcal{H}^2 = H^1(\Omega)^2 \times (\mathbb{C}^3)^2 \quad (3.18)$$

(ср. формулу (3.7)). Приведенная выше информация о собственном числе $\omega = 0$ задачи (3.6) сохраняется и для задачи (3.17) – нужны лишь простые изменения в определениях собственных и присоединенных векторов. При этом само появление собственного числа $\omega = 0$ обусловлено тем, что матрица K вырождена. Сузим задачу (3.17) на подпространство $\mathcal{H}^{\natural} = H^1(\Omega)^2 \times (\mathbb{C}^{\kappa})^2$ в пространстве (3.18). С этой целью положим

$$\begin{aligned} a &= \begin{pmatrix} a_{\circ} \\ a_{\natural} \end{pmatrix}, \\ \begin{cases} a_{\circ} = (a_1, a_2)^{\top}, & a_{\natural} = a_3 & \text{в случае } \kappa = \text{rank} K = 1, \\ a_{\circ} = a_1, & a_{\natural} = (a_2, a_3)^{\top} & \text{в случае } \kappa = \text{rank} K = 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.19)$$

(ср. формулы (3.16) и (2.18)) и разобьем матрицу N следующим образом:

$$N = \begin{pmatrix} N_{\circ\circ} & N_{\circ\natural} \\ N_{\natural\circ} & N_{\natural\natural} \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Здесь N_{oo} и $N_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}}$ – блоки размером $(3-\kappa) \times (3-\kappa)$ и $\kappa \times \kappa$ соответственно (один из них обязательно – скаляр).

Если $\omega \neq 0$ и $(\varphi, \eta, a, f)^\top$ – соответствующий собственный вектор в системе (3.17), то ее третья строка приводит к равенству

$$iS_o\varphi + f_o = 0, \quad (3.21)$$

где $S_o\varphi$, а далее и $S_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}}\varphi$ – фрагменты столбца (2.13), определенные аналогично соотношению (3.19). Четвертую строку системы согласно разложению (3.20) перепишем покомпонентно, а именно,

$$N_{oo}f_o + N_{o\mathfrak{h}}f_{\mathfrak{h}} = \omega a_o, \quad (3.22)$$

$$N_{\mathfrak{h}o}f_o + N_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}}f_{\mathfrak{h}} = \omega a_{\mathfrak{h}}.$$

Теперь, пользуясь первым равенством (3.22), находим, что

$$-i\omega S_o^* a_o = -i\omega S_o^* (N_{oo}f_o + N_{o\mathfrak{h}}f_{\mathfrak{h}}) = -i\omega S_o^* N_{oo} S_o \varphi - i\omega S_o^* N_{o\mathfrak{h}} f_{\mathfrak{h}}.$$

Следовательно, первая строка (3.17) принимает вид

$$\varphi + S_o^* N_{oo} S_o \varphi + i\omega S_o^* N_{o\mathfrak{h}} f_{\mathfrak{h}} = \omega \left(g^{-1/2} T^{1/2} \eta - i S_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}}^* f_{\mathfrak{h}} \right).$$

При учете формул (3.21) и (2.14) третью строку сокращаем так:

$$gK_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}} a_{\mathfrak{h}} = i\omega S_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}} \varphi + \omega f_{\mathfrak{h}}.$$

Наконец, четвертую благодаря соотношениям (3.21) и (3.22) заменяем одним уравнением

$$-iN_{\mathfrak{h}o} S_o \varphi + N_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}} f_{\mathfrak{h}} = \omega a_{\mathfrak{h}}.$$

Подводя итог проделанным преобразованиям, придаем системе (3.17) вид

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \mathbb{I} + S_o^* N_{oo} S_o & 0 & 0 & iS_o^* N_{o\mathfrak{h}} \\ 0 & \mathbb{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & gK_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}} & 0 \\ -iN_{\mathfrak{h}o} S_o & 0 & 0 & N_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \eta \\ a_{\mathfrak{h}} \\ f_{\mathfrak{h}} \end{pmatrix} \\ & = \omega \begin{pmatrix} 0 & g^{-1/2} T^{1/2} & -iS_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}}^* & 0 \\ g^{-1/2} T^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ iS_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}} & 0 & 0 & \mathbb{I} \\ 0 & 0 & \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \eta \\ a_{\mathfrak{h}} \\ f_{\mathfrak{h}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Краткая запись задачи (3.23)

$$\mathcal{B}\mathcal{X} = \omega \mathcal{D}\mathcal{X} \quad (3.24)$$

включает вектор

$$\mathcal{X} = (\varphi, \eta, a_{\mathfrak{h}}, f_{\mathfrak{h}})^{\top} \in \mathcal{H}^{\mathfrak{h}}$$

и два непрерывных оператора \mathcal{B} и \mathcal{D} в гильбертовом пространстве

$$\mathcal{H}^{\mathfrak{h}} = H^1(\Omega)^2 \times (\mathbb{C}^*)^2$$

(ср. определения (3.18) и (3.19)). Нетрудно убедиться в том, что оба оператора самосопряженные. Кроме того, \mathcal{B} еще и положительно определенный, поскольку

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}\mathcal{X}, \mathcal{X})_{\mathcal{H}^{\mathfrak{h}}} &= \langle \varphi, \varphi \rangle + \langle S_{\circ}^* N_{\circ\circ} S_{\circ} \varphi, \varphi \rangle + i \langle S_{\circ}^* N_{\circ\mathfrak{h}} f_{\mathfrak{h}}, \varphi \rangle + \langle \eta, \eta \rangle \\ &\quad + g(K_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}} a_{\mathfrak{h}}, a_{\mathfrak{h}})_{\mathbb{C}} - i(N_{\mathfrak{h}\circ} S_{\circ} \varphi, f_{\mathfrak{h}})_{\mathbb{C}} + (N_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}} f_{\mathfrak{h}}, f_{\mathfrak{h}})_{\mathbb{C}} \\ &= \langle \varphi, \varphi \rangle + \langle \eta, \eta \rangle + g(K_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}} a_{\mathfrak{h}}, a_{\mathfrak{h}})_{\mathbb{C}} + \left(N \begin{pmatrix} -iS_{\circ} \varphi \\ f_{\mathfrak{h}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -iS_{\circ} \varphi \\ f_{\mathfrak{h}} \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{C}} \\ &\geq C_{\mathcal{B}} (\|\varphi; H^1(\Omega)\|^2 + \|\eta; H^1(\Omega)\|^2 + \|a_{\mathfrak{h}}; \mathbb{C}\|^2 + \|f_{\mathfrak{h}}; \mathbb{C}\|^2), \quad C_{\mathcal{B}} > 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Здесь была принята во внимание положительная определенность матриц $K_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}}$ и $N = M^{-1}$. Итак, вводя обозначения

$$\mathcal{A} = \mathcal{B}^{-1/2} \mathcal{D} \mathcal{B}^{-1/2}, \quad \mathcal{Y} = \mathcal{B}^{1/2} \mathcal{X}, \quad \alpha = \frac{1}{\omega}, \quad (3.26)$$

преобразуем уравнение (3.24) к виду (1.2) с ограниченным самосопряженным оператором \mathcal{A} . Именно в этом и состоит процедура сведения [13].

4. Задача об инертном теле. Поступая аналогично работе [17], положим формально $K = 0$ в алгебраической системе (2.7) и подставим полученную формулу

$$a = -i\omega^{-1} M^{-1} S \varphi \quad (4.1)$$

в краевое условие (2.6), приведя его к виду

$$\partial_{\nu} \varphi(y, z) = -\omega \nu(y, z)^{\top} D(y - y^{\bullet}, z - z^{\bullet}) M^{-1} S \varphi, \quad (y, z) \in \Sigma. \quad (4.2)$$

Несмотря на то, что основная теорема 6.1 будет сформулирована именно для краевого условия (4.2), которое отвечает инертному телу

Θ , не подверженному силам плавучести (см. замечание 4.3), рассмотрим следующую вспомогательную задачу с произвольной симметричной и положительной матрицей P :

$$-\Delta\Phi(y, z) + k^2\Phi(y, z) = 0, \quad (y, z) \in \Omega, \quad (4.3)$$

$$-\partial_z\Phi(y, 0) = \Lambda\Phi(y, 0), \quad (y, z) \in \Gamma, \quad (4.4)$$

$$\partial_\nu\Phi(y, -d) = 0, \quad (y, z) \in \Upsilon, \quad (4.5)$$

$$\partial_\nu\Phi(y, z) = -\nu(y, z)^\top D(y - y^\bullet, z - z^\bullet)PS\Phi, \quad (y, z) \in \Sigma. \quad (4.6)$$

Краевое условие (4.6) появилось в результате указанной замены $M^{-1} \mapsto P$ в правой части (4.2), а уравнения (4.3) и условия (4.4), (4.5) произошли от соотношений (2.3) и (2.4), (2.5). Наконец, последним в задаче (4.3)–(4.6) фигурирует функционал S , определенный формулами (2.13) и (3.8).

Замечание 4.3. 1) Если P – нулевая матрица, то условие (4.6) принимает вид

$$\partial_\nu\Phi(y, z) = 0, \quad (y, z) \in \Sigma, \quad (4.7)$$

отвечает неподвижному препятствию (ср. замечание 3.1) и означает, что нормальная компонента $v_n = n^\top v$ вектора скорости $v = \nabla\varphi$ равна нулю на смоченной части Σ поверхности тела Θ (ср. условие непротекания (4.5) через дно $\Upsilon = \mathbb{R} \times \{-d\}$). Формально равенство (4.7) можно получить предельным переходом $M \rightarrow \infty$, который однако противоречит закону Архимеда (2.16). Таким образом, задача (4.3)–(4.5), (4.7) действительно описывает внешнее закрепление тела.

2) Правая часть (4.2) содержит главный вектор и момент $S\Phi$ гидродинамических сил, а вектор $M^{-1}S\Phi$ соответствует порожденным ими ускорениям тела, линейным и угловым. Наконец, величина

$$\omega\nu(y, z)^\top D(y - y^\bullet, z - z^\bullet)M^{-1}S\varphi$$

пропорциональна нормальной скорости смещений точек поверхности Σ вследствие движения под действием потока жидкости. Указанная интерпретация краевого условия (4.2) побуждает назвать (2.3)–(2.5), (4.2) задачей об инертном теле, не подверженном силам плавучести. В случае полностью погруженного тела такое возможно при условии совпадения центров масс (y^\bullet, z^\bullet) и плавучести (y^\ominus, z^\ominus) , так как в соотношении (2.14) обе составляющие K^θ и K^\ominus матрицы K становятся нулевыми. В случае полупогруженного тела равенство $K = 0$ невозможно, поскольку $K^\theta \geq 0$ и $\text{rank}K^\theta = 2$, но $\text{rank}K^\ominus = 1$.

Для того чтобы включить в рассмотрение оба упомянутых в замечании 4.3 варианта краевых условий, и была введена произвольная матрица $P \geq 0$.

В согласии с равенством (3.1) вариационная формулировка задачи (4.3)–(4.6) выглядит так:

$$(\nabla\Phi, \nabla\Psi)_\Omega + k^2(\Phi, \Psi)_\Omega + (PS\Phi, S\Psi)_C = \Lambda(\Phi, \Psi)_\Gamma, \quad \Psi \in H^1(\Omega). \quad (4.8)$$

Полуторалинейную форму $\langle\Phi, \Psi\rangle_P$ из левой части (4.8) возьмем в качестве скалярного произведения в пространстве Соболева $H^1(\Omega)$ и определим аналогично (3.4) соответствующий следовой оператор

$$\langle T_P\Phi, \Psi\rangle_P = (\Phi, \Psi)_\Gamma, \quad \Phi, \Psi \in H^1(\Omega). \quad (4.9)$$

В результате вариационная задача (4.8) трансформируется в абстрактное уравнение

$$T_P\Phi = B\Phi \quad \text{в} \quad H^1(\Omega) \quad (4.10)$$

с новым спектральным параметром

$$B = \Lambda^{-1}.$$

Поскольку скалярные произведения $\langle\Phi, \Psi\rangle$ и $\langle\Phi, \Psi\rangle_P$ различаются только слагаемым $(PS\Phi, S\Psi)_C$, содержащим конечномерную проекцию (3.8), модифицированный следовой оператор (4.9) имеет тот же существенный спектр $[0, \beta_+]$, что и оператор T из формулы (3.4).

Как и в [20, 21], сведение вариационной задачи (4.8) (или (4.3)–(4.6) в дифференциальной форме) к стандартной спектральной задаче (4.10) для ограниченного самосопряженного оператора T_P в гильбертовом пространстве $H^1(\Omega)$ позволяет при помощи простых выкладок получить достаточные условия существования дискретного спектра (захваченных волн) и доказать подходящие принципы сравнения. Сформулируем пару простых утверждений, проверку которых можно найти в публикации [17] или воспроизвести путем незначительного изменения рассуждений из работы [21].

Предложение 4.1. Пусть выполнено неравенство

$$\int_{\Theta} |\nabla\phi_+(z)|^2 dydz \geq \lambda_+ \int_{\theta} |\nabla\phi_+(0)|^2 dy + (PS\phi_+, S\phi_+)_C,$$

в котором ϕ_+ и λ_+ – указанные формулами (3.14) и (3.5) собственная функция и собственное число модельной задачи (3.15). Тогда оператор T_P имеет собственное число $B_1 > \beta_+$, принадлежащее его дискретному

спектру, а вариационная задача (4.8) (или краевая задача (4.3)–(4.6)) – собственное число $\Lambda_1 = B_1^{-1} < \lambda_{\dagger}$, которому отвечает захваченная волна $\Phi_1 \in H^1(\Omega)$, обладающая конечной полной энергией (кинетическая плюс потенциальная) и поэтому экспоненциально затухающая при $y \rightarrow \pm\infty$.

В следующем утверждении помимо спектральных пар $\{\Lambda_j, \Phi_j\}$ задачи (4.8) фигурируют спектральные пары (собственное число/собственная функция) той же задачи, но с другой симметричной и положительной матрицей \mathbf{P} , которая подчинена условию

$$P \geq \mathbf{P}, \tag{4.11}$$

требующему, чтобы все собственные числа матрицы $P - \mathbf{P}$ были неотрицательными. Объекты, относящиеся к измененной задаче, обозначаются полужирными литерами.

Предложение 4.2. Пусть у вариационной задачи (4.8) (или краевой задачи (4.3)–(4.6)) есть собственные числа

$$0 < \Lambda_1 \leq \Lambda_2 \leq \dots \leq \Lambda_J < \lambda_{\dagger}, \tag{4.12}$$

образующие ее дискретный спектр. Тогда при выполнении условия (4.11) задача (4.8) с симметричной положительной (3×3) -матрицей \mathbf{P} имеет не менее J собственных чисел Λ_j подчиненных неравенствам

$$\Lambda_j \leq \Lambda_j, \quad j = 1, \dots, J.$$

Если \mathbf{P} – нулевая матрица, то в предложении 4.2 речь идет о задаче с фиксированным препятствием. Таким образом, непустота дискретного спектра у задачи (4.3)–(4.6) гарантирует непустоту дискретного спектра у задачи (4.3)–(4.5), (4.7), причем полная кратность последнего не меньше числа J в списке (4.12).

5. Спектральная мера и локализация собственных частот задачи о свободно плавающем теле. В п. 3 был построен ограниченный самосопряженный оператор \mathcal{A} в гильбертовом пространстве \mathcal{H}^{\natural} . Поскольку операторы \mathcal{B} и \mathcal{D} из левой и правой частей (3.23) лишь компактными слагаемыми отличаются от операторов

$$\mathcal{B}^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & gK_{\natural\natural} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{\natural\natural} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}^0 = \begin{pmatrix} 0 & g^{-1/2}T^{1/2} & 0 & 0 \\ g^{-1/2}T^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{I} \\ 0 & 0 & \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix},$$

существенный спектр оператора $\mathcal{A} = \mathcal{B}^{-1/2}\mathcal{D}\mathcal{B}^{-1/2}$ занимает сегмент

$$[-\omega_{\dagger}^{-1}, \omega_{\dagger}^{-1}] = [-(g\lambda_{\dagger})^{-1/2}, (g\lambda_{\dagger})^{-1/2}], \quad (5.1)$$

который возник в результате инвертирования множества (3.11) в соответствии со связью (3.26) спектральных параметров ω и α , а также информации о спектре следового оператора T , приведенной в п. 3. Грань ω_{\dagger} вычисляется по формуле (3.12). На множестве

$$(-\infty, -\omega_{\dagger}^{-1}) \cup (\omega_{\dagger}^{-1}, +\infty)$$

может появиться дискретный спектр. Это происходит в том и только в том случае, если норма $\|\mathcal{A}\|$ оператора удовлетворяет неравенству

$$\|\mathcal{A}\| = \sup_{\mathcal{Y} \in \mathcal{H}^{\natural}} \left| \frac{(\mathcal{A}\mathcal{Y}, \mathcal{Y})_{\mathcal{H}^{\natural}}}{(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})_{\mathcal{H}^{\natural}}} \right| > \frac{1}{\omega_{\dagger}}, \quad (5.2)$$

так как в случае равенства (соотношение $\|\mathcal{A}\| < \omega_{\dagger}^{-1}$ невозможно) спектр оператора \mathcal{A} целиком содержится в сегменте (5.1), а значит, имеет пустую дискретную составляющую, но в случае (5.2) точка $\|\mathcal{A}\|$, заведомо принадлежащая спектру, обязана попасть именно в дискретный спектр.

Приведенные соображения использовались в работах [20, 21], а затем и в [13, 17] для вывода достаточных условий захвата волн: в формулу (5.2) подставлялась конкретная пробная функция и писались условия, обеспечивающие требуемое строгое неравенство. Далее для сравнения спектров задач (2.1)–(2.7) и (4.3)–(4.6) применяем совершенно иную идею.

Согласно спектральной теореме (ср. [16, теорема 6.1.1]) самосопряженный (ограниченный) оператор \mathcal{A} порождает спектральную меру¹ $E_{\mathcal{A}}$, которая в свою очередь ставит в соответствие каждому элементу $\mathcal{U} \in \mathcal{H}^{\natural}$ скалярную меру $\mu_{\mathcal{U}, \mathcal{U}} = (E_{\mathcal{A}}\mathcal{U}, \mathcal{U})_{\mathcal{H}^{\natural}}$ на прямой \mathbb{R} . Далее понадобятся только пара простых формул, которые можно извлечь,

¹Для удобства читателя сохраняем обозначения из книги [16].

например, из доказательства теоремы 6.1.3 [16]:

$$\|\mathcal{U}; \mathcal{H}^{\natural}\|^2 = (\mathcal{U}, \mathcal{U})_{\mathcal{H}^{\natural}} = \int_{\mathbb{R}} d\mu_{\mathcal{U}, \mathcal{U}}(t) \quad \text{при } \mathcal{U} \in \mathcal{H}^{\natural} \quad (5.3)$$

и

$$\|\mathcal{A}\mathcal{U} - \alpha\mathcal{U}; \mathcal{H}^{\natural}\|^2 = \int_{\mathbb{R}} (t - \alpha)^2 d\mu_{\mathcal{U}, \mathcal{U}}(t) \quad \text{при } \mathcal{U} \in \mathcal{H}^{\natural}, \alpha \in \mathbb{C}. \quad (5.4)$$

Выберем какие-нибудь конкретные

$$\mathcal{Y} \in \mathcal{H}^{\natural}, \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad (5.5)$$

и предположим, что сегмент

$$v(\delta) = [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \quad (5.6)$$

свободен от спектра оператора \mathcal{A} , т.е. $E_{\mathcal{A}}(v(\delta)) = 0$. Тогда в силу формул (5.4) и (5.3) получаем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}\mathcal{Y} - \alpha\mathcal{Y}; \mathcal{H}^{\natural}\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} (t - \alpha)^2 d\mu_{\mathcal{Y}, \mathcal{Y}}(t) - \int_{\mathbb{R} \setminus v(\delta)} (t - \alpha)^2 d\mu_{\mathcal{Y}, \mathcal{Y}}(t) \\ &\geq \delta^2 \int_{\mathbb{R} \setminus v(\delta)} d\mu_{\mathcal{Y}, \mathcal{Y}}(t) = \delta^2 \int_{\mathbb{R}} d\mu_{\mathcal{Y}, \mathcal{Y}}(t) = \delta^2 \|\mathcal{Y}; \mathcal{H}^{\natural}\|^2. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Вместе с тем в случае

$$\delta > \delta(\alpha, \mathcal{Y}) := \|\mathcal{Y}; \mathcal{H}^{\natural}\|^{-1} \|\mathcal{A}\mathcal{Y} - \alpha\mathcal{Y}; \mathcal{H}^{\natural}\| \quad (5.8)$$

соотношение (5.7) абсурдно, а значит, предположение об отсутствии спектра на сегменте (5.6) ложно. Если к тому же случилось, что

$$\delta(\alpha, \mathcal{Y}) < \alpha - \omega_{\dagger}^{-1}, \quad (5.9)$$

сегмент (5.6) с полудлиной $\delta \in (\delta(\alpha, \mathcal{Y}), \alpha - \omega_{\dagger}^{-1})$ обязан содержать точку дискретного спектра. В итоге обнаружилось собственное число α_1 оператора \mathcal{A} , для которого

$$|\alpha - \alpha_1| \leq \delta(\alpha, \mathcal{Y}). \quad (5.10)$$

Поскольку число α и вектор \mathcal{Y} из формулы (5.5) считаются известными, соотношение (5.10) следует интерпретировать как локализацию положения собственного числа оператора \mathcal{A} . При этом величину $\delta(\alpha, \mathcal{Y})$ имеет смысл сделать как можно меньше. Последнее требует

уменьшения нормы $\|\mathcal{A}\mathcal{Y} - \alpha\mathcal{Y}; \mathcal{H}^{\natural}\|$ при нормировке самого вектора \mathcal{Y} в пространстве \mathcal{H}^{\natural} , т.е. α и \mathcal{Y} приходится признать приближенными собственным числом и собственным вектором оператора \mathcal{A} .

6. Вычисления и финальная теорема. Пусть u вспомогательной задачи (4.8) с какой-то матрицей $P \geq 0$ нашлись собственное число и собственная функция

$$\Lambda \in (0, \lambda_{\dagger}), \quad \Phi \in H^1(\Omega). \quad (6.1)$$

В соответствии с формулами (3.10), (3.26) и (4.1), (6.1) положим

$$\omega = \sqrt{g\Lambda},$$

$$\varphi = \Phi, \quad \eta = \omega g^{-1/2} T^{1/2} \varphi, \quad a = -i\omega^{-1} M^{-1} S \varphi, \quad (6.2)$$

$$f = \omega M a = -i S \varphi, \quad (6.3)$$

и

$$\alpha = \frac{1}{\omega}, \quad \mathcal{Y} = \mathcal{B}^{1/2} \mathcal{X}, \quad \mathcal{X} = (\varphi, \eta, a_{\natural}, f_{\natural})^{\top}.$$

Поскольку

$$\|\mathcal{Y}; \mathcal{H}^{\natural}\|^2 = (\mathcal{Y}, \mathcal{Y})_{\mathcal{H}^{\natural}} = (\mathcal{B}\mathcal{X}, \mathcal{X})_{\mathcal{H}^{\natural}},$$

согласно соотношениям (3.25), а также (3.3) и (3.4) имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Y}; \mathcal{H}^{\natural}\|^2 &= \langle \varphi, \varphi \rangle + g^{-1} \omega^2 \langle T \varphi, \varphi \rangle + (M^{-1} S \varphi, S \varphi)_{\mathbb{C}} \\ &+ g(Ka, a)_{\mathbb{C}} = (\nabla \Phi, \nabla \Phi)_{\Omega} + k^2 (\Phi, \Phi)_{\Omega} + \Lambda (\Phi, \Phi)_{\Gamma} \\ &+ (M^{-1} S \Phi, S \Phi)_{\mathbb{C}} + \Lambda^{-1} (KM^{-1} S \Phi, M^{-1} S \Phi)_{\mathbb{C}}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Отметим, что согласно представлению (2.15) матрицы K справедливо равенство $(Kb, b)_{\mathbb{C}} = (K_{\natural} b_{\natural}, b_{\natural})_{\mathbb{C}}$, которое и было учтено в конце выкладки (6.4). Кроме того,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}\mathcal{Y} - \alpha\mathcal{Y}; \mathcal{H}^{\natural}\| &= \sup_{\mathcal{W} \in \mathcal{H}^{\natural}: \|\mathcal{W}; \mathcal{H}^{\natural}\|=1} |(\mathcal{A}\mathcal{Y} - \alpha\mathcal{Y}, \mathcal{W})_{\mathcal{H}^{\natural}}| \\ &= \frac{1}{\omega} \sup_{\mathcal{Z} \in \mathcal{H}^{\natural}: \|\mathcal{B}^{1/2} \mathcal{Z}; \mathcal{H}^{\natural}\|=1} |(\omega \mathcal{D}\mathcal{X} - \mathcal{B}\mathcal{Y}, \mathcal{Z})_{\mathcal{H}^{\natural}}|. \end{aligned}$$

Найдем компоненты вектора

$$(F, Y, A, G)^{\top} = \mathcal{B}\mathcal{Y} - \omega \mathcal{D}\mathcal{X}.$$

Прежде всего, согласно строению матриц \mathcal{B} и \mathcal{D} в системе (3.17), а также формулам (6.2) и (6.3) для функции η и столбцов a , f обнаруживаем, что

$$Y = \eta - \omega g^{-1/2} T^{1/2} \varphi = \omega g^{-1/2} T^{1/2} \varphi - \omega g^{-1/2} T^{1/2} \varphi = 0,$$

$$G = -iN_{\mathfrak{h}\circ} S_{\circ} \varphi + N_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}} f_{\mathfrak{h}} - \omega a_{\mathfrak{h}} = -iN_{\mathfrak{h}\circ} S_{\circ} \varphi - iN_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}} S_{\mathfrak{h}} \varphi + i(M^{-1} S \varphi)_{\mathfrak{h}} = 0,$$

$$A = gK_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}} a_{\mathfrak{h}} - i\omega S_{\mathfrak{h}} \varphi + \omega f_{\mathfrak{h}} = gK_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}} a_{\mathfrak{h}} = -i\omega^{-1} gK_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}} (M^{-1} S \varphi)_{\mathfrak{h}}.$$

Наконец,

$$\begin{aligned} F &= \varphi + S_{\circ}^* N_{\circ\circ} S_{\circ} \varphi + iS_{\circ}^* N_{\circ\mathfrak{h}} f_{\mathfrak{h}} - \omega g^{-1/2} T^{1/2} \eta \\ &+ i\omega S_{\mathfrak{h}}^* a_{\mathfrak{h}} = \varphi - g^{-1} \omega^2 T \varphi + S_{\circ}^* (NS \varphi)_{\circ} + S_{\mathfrak{h}}^* (NS \varphi)_{\mathfrak{h}} \quad (6.5) \\ &= \Phi + S^* M^{-1} S \Phi - \Lambda T \Phi. \end{aligned}$$

Заметим, что в силу определений (3.4) и (4.9) следовых операторов T и T_P выражение (6.5) равно

$$S^*(M^{-1} - P)S\Phi.$$

Итак,

$$\|\mathcal{A}\mathcal{Y} - \alpha\mathcal{Y}; \mathcal{H}^{\mathfrak{h}}\| \quad (6.6)$$

$$= \omega^{-1} \sup |((M^{-1} - P)S\Phi, S\psi)_{\mathbb{C}} - ig\omega^{-1}(K_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}}(M^{-1}S\Phi)_{\mathfrak{h}}, b_{\mathfrak{h}})_{\mathbb{C}}|,$$

причем супремум вычисляется по тем векторам $\mathcal{Z} = (\psi, \xi, b_{\mathfrak{h}}, g_{\mathfrak{h}})^{\top} \in \mathcal{H}^{\mathfrak{h}}$, для которых

$$\begin{aligned} 1 &= (\mathcal{B}\mathcal{Z}, \mathcal{Z})_{\mathcal{H}^{\mathfrak{h}}} = \langle \psi, \psi \rangle + \langle \xi, \xi \rangle \\ &+ g(K_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}} b_{\mathfrak{h}}, b_{\mathfrak{h}})_{\mathbb{C}} + \left(N \begin{pmatrix} -iS_{\circ} \psi \\ g_{\mathfrak{h}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -iS_{\circ} \psi \\ g_{\mathfrak{h}} \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{C}}. \quad (6.7) \end{aligned}$$

Обратим внимание на несколько обстоятельств. Во-первых, благодаря строению матрицы (2.15) последнее слагаемое в равенстве (6.6) можно заменить таким: $(KM^{-1}S\Phi, b)_{\mathbb{C}}$. Во-вторых, в выражении (6.6) отсутствует функция ξ , а значит, ввиду положительности каждого слагаемого в правой части (6.7) можно считать, что $\xi = 0$. Наконец, поскольку компоненты ψ и b независимы, а умножение b на любое

комплексное число с единичным модулем не изменяет величину (6.7), заключаем, что

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}\mathcal{Y} - \alpha\mathcal{Y}; \mathcal{H}^{\natural}\| &= \omega^{-1} \sup \left(|(M^{-1} - P)S\Phi, S\psi|_{\mathbb{C}} \right) \\ &+ g\omega^{-1} |(KM^{-1}S\Phi, b)_{\mathbb{C}}|, \end{aligned} \quad (6.8)$$

причем супремум теперь находится для векторов $(\psi, b, g_{\natural})^{\top} \in H^1(\Omega) \times \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^{\tau}$, нормированных следующим образом:

$$\langle \psi, \psi \rangle + g(Kb, b)_{\mathbb{C}} + \left(N \begin{pmatrix} -iS_{\circ}\psi \\ g_{\natural} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -iS_{\circ}\psi \\ g_{\natural} \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{C}} = 1. \quad (6.9)$$

Если величина (6.4) определяется легко

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Y}; \mathcal{H}^{\natural}\|^2 &= 2\Lambda(\Phi, \Phi)_{\Gamma} + ((M^{-1} - P)S\Phi, S\Phi)_{\mathbb{C}} \\ &+ \Lambda^{-1}(KM^{-1}S\Phi, M^{-1}S\Phi)_{\mathbb{C}} \end{aligned} \quad (6.10)$$

при помощи интегрального тождества (4.8) с пробной функцией $\Psi = \Phi$, то вычислить супремум (6.8) все-таки сложно. Простым оказывается только случай $P = M^{-1}$, так как из-под знака \sup исчезает первое слагаемое и, кроме того,

$$\begin{aligned} &\|g^{1/2}K_{\natural\natural}^{1/2}(M^{-1}S\Phi)_{\natural}; \mathbb{C}\| \\ &= \sup_{b_{\natural} \in \mathbb{C}^{\tau}: \|g^{1/2}K_{\natural\natural}^{1/2}b_{\natural}; \mathbb{C}\| \leq 1} \left| \left(g^{1/2}K_{\natural\natural}^{1/2}(M^{-1}S\Phi)_{\natural}, g^{1/2}K_{\natural\natural}^{1/2}b_{\natural} \right)_{\mathbb{C}} \right|, \end{aligned} \quad (6.11)$$

а также $\|g^{1/2}K_{\natural\natural}^{1/2}b_{\natural}; \mathbb{C}\|^2 = g(K_{\natural\natural}b_{\natural}, b_{\natural})_{\mathbb{C}} \leq 1$ в силу ограничения (6.9). Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}\mathcal{Y} - \alpha\mathcal{Y}; \mathcal{H}^{\natural}\| &= \omega^{-2} \|g^{1/2}K_{\natural\natural}^{1/2}(M^{-1}S\Phi)_{\natural}; \mathbb{C}\| \\ &= \omega^{-2} g^{1/2} (K_{\natural\natural}(M^{-1}S\Phi)_{\natural}, (M^{-1}S\Phi)_{\natural})_{\mathbb{C}}^{1/2} \\ &= \omega^{-1} \Lambda^{-1/2} (KM^{-1}S\Phi, M^{-1}S\Phi)_{\mathbb{C}}^{1/2}, \end{aligned} \quad (6.12)$$

а значит, в силу формул (6.10) и (6.12) при условии $P = M^{-1}$ имеем

$$\begin{aligned} \delta(\Lambda, \Phi) &:= \delta(\alpha, \mathcal{Y}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{g\Lambda}} \sqrt{\frac{\Lambda^{-1}(KM^{-1}S\Phi, M^{-1}S\Phi)_{\mathcal{C}}}{2\Lambda(\Phi, \Phi)_{\Gamma} + \Lambda^{-1}(KM^{-1}S\Phi, M^{-1}S\Phi)_{\mathcal{C}}}}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Итак, установлено следующее утверждение.

Теорема 6.1. *Если задача (4.8) об инертном теле (или (4.3)–(4.6) в дифференциальной форме) с матрицей $P = M^{-1}$ имеет собственное число $\Lambda \in (0, \lambda_{\dagger})$, а для соответствующей собственной функции $\Phi \in H^1(\Omega)$ выполнено неравенство*

$$\delta(\Lambda, \Phi) < \frac{1}{\sqrt{g\Lambda}} - \frac{1}{\sqrt{g\lambda_{\dagger}}}, \quad (6.14)$$

где $\delta(\Lambda, \Phi)$ – величина (6.13), то у задачи (3.2) о свободно плавающем теле (или (2.3)–(2.7) в дифференциальной форме) есть собственная частота ω_1 , для которой верна оценка

$$\left| \frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\sqrt{g\Lambda}} \right| \leq \delta(\Lambda, \Phi).$$

Собственную функцию Φ задачи (4.8), разумеется, можно нормировать условием $\|\Phi; L_2(\Gamma)\|^2 = 1$ (ср. соотношение (3.10)). Если величина

$$\Lambda^{-1}(KM^{-1}S\Phi, M^{-1}S\Phi)_{\mathcal{C}} \quad (6.15)$$

достаточно мала, то малым оказывается и выражение (6.13), т.е. условие (6.14) выполнено. Иными словами, при малой матрице плавучести K теорема 6.1 действительно устанавливает существование собственной частоты $\omega \in (0, \omega_{\dagger})$ в задаче Йона. Матрица K никоим образом не фигурирует во вспомогательной задаче (4.3)–(4.6), и поэтому ее изменение при сохранении матрицы инерции (2.12) не влияет на собственную пару $\{\Lambda, \Phi\}$. Если тело полностью погружено, то, производя перераспределение плотности $\rho(y, z)$ в объеме Θ , можно сохранить матрицу инерции M , но приблизить центр масс (2.9) к центру плавучести (2.17) и тем самым сделать величину I_z^{\ominus} , а значит, и матрицу $K = K^{\ominus}$ сколь угодно малой. Разумеется, необходимо соблюсти закон Архимеда (2.16) и условие устойчивости $z^{\bullet} < z^{\ominus}$. При изменении плотности тела можно также пользоваться предложением 4.2, которое гарантирует сохранение дискретного спектра у задачи (4.3)–(4.6)

и дает одностороннюю оценку ее собственного числа при вариации матрицы P в интегро-дифференциальном краевом условии (4.6).

Если же тело полупогружено, то дополнительно требуется малость сечения θ тела Θ горизонтом $\{z = 0\}$ жидкости – этим обеспечивается малость второго слагаемого K^θ в представлении (2.14) матрицы плавучести K .

Сформулируем достаточное условие захвата волны свободно плавающим телом в виде неравенства для величины (6.15).

Следствие 6.1. Пусть задача (4.8) об инертном теле с матрицей $P = M^{-1}$ имеет собственное число $\Lambda \in (0, \lambda_\dagger)$ и выполнено неравенство

$$\Lambda^{-1}(KM^{-1}S\Phi, M^{-1}S\Phi)_{\mathbb{C}} < 2\sqrt{\Lambda\lambda_\dagger} \left(2 - \sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda_\dagger}}\right)^{-1} \left(1 - \sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda_\dagger}}\right)^2,$$

в котором Φ – соответствующая собственная функция, нормированная условием $\|\Phi; L_2(\Omega)\| = 1$. Тогда у задачи (3.2) о свободно плавающем теле есть собственная частота $\omega_1 \in (0, \omega_\dagger)$.

Отметим, что простое достаточное условие существования захваченной волны у задачи (4.3)–(4.6) предоставлено предложением 4.1. Наконец, если ω – собственная частота задачи Йона, то по понятной причине частота $-\omega$ также является собственной.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. John, *On the motion of floating bodies*. I. — Comm. Pure Appl. Math. **2** (1949), No. 1, 13–57; II. *ibid* **3** (1950), No. 1, 45–101.
2. A.-S. Bonnet-Ben Dhia, P. Joly, *Mathematical analysis of guided water-waves*. — SIAM J. Appl. Math. **53** (1993), 1507–1550.
3. C. M. Linton, P. McIver, *Embedded trapped modes in water waves and acoustics* — Wave motion **45** (2007), 16–29.
4. N. Kuznetsov, V. Maz'ya, B. Vainberg, *Linear Water Waves*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
5. Д. А. Индейцев, Н. Г. Кузнецов, О. В. Мотыгин, Ю. А. Мочалова, *Локализация линейных волн*. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2007.
6. P. McIver, M. McIver, *Trapped modes in the water-wave problem for a freely-floating structure*. — J. Fluid Mech. **558** (2006), 53–67.
7. D. V. Evans, R. Porter, *Wave-free motions of isolated bodies and the existence of motion-trapped modes*. — J. Fluid Mech. **584** (2007), 225–234.
8. P. McIver, M. McIver, *Motion trapping structures in the three-dimensional water-wave problem*. — J. Engng Math. **58** (2007), 67–75.

9. R. Porter, D. V. Evans, *Examples of trapped modes in the presence of freely floating structures.* — J. Fluid Mech. **606** (2008), 189–207.
10. R. Porter, D. V. Evans, *Water-wave trapping by floating circular cylinders.* — J. Fluid Mech. **633** (2009), 311–325.
11. N. Kuznetsov, *On the problem of time-harmonic water waves in the presence of a freely floating structure.* Алгебра и анализ **22** (2010), No. 6, 185–199.
12. M. McIver, *An example of non-uniqueness in the two-dimensional linear water wave problem.* — J. Fluid Mech. **315** (1996), 257–266.
13. S. A. Nazarov, J. H. Videman, *Trapping of water waves by freely floating structures in a channel.* — Proc. R. Soc. A. (in press).
14. С. А. Назаров, *Концентрация ловушечных мод в задачах линейной теории волн на поверхности жидкости.* — Мат. сборник **199** (2008), No. 12, 53–78.
15. С. А. Назаров, *Концентрация частот ловушечных мод в задачах о свободно плавающих телах.* — Мат. сборник. (submitted)
16. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* Л.: изд-во Ленинградского университета, 1980.
17. С. А. Назаров, *Неполный принцип сравнения в задачах о поверхностных волнах, захваченных фиксированными и свободно плавающими телами.* — Проблемы матем. анализа. Вып. 56. Новосибирск (2011), 83–114.
18. F. Ursell, *Mathematical aspects of trapping modes in the theory of surface waves.* — J. Fluid Mech. **183** (1987), 421–437.
19. O. V. Motygin, *On trapping of surface water waves by cylindrical bodies in a channel.* — Wave Motion. **45** (2008), 940–951.
20. С. А. Назаров, *Простой способ обнаружения ловушечных мод в задачах линейной теории поверхностных волн.* — Доклады РАН **429** (2009), No. 6, 746–749.
21. С. А. Назаров, *Достаточные условия появления ловушечных мод в задачах линейной теории поверхностных волн.* — Зап. научн. семина. ПОМИ **369** (2009), 202–223.
22. C. C. Mei, M. Stiassnie, D.K.-P. Yue, *Theory and Applications of Ocean Surface Waves.* Part 1. Linear aspects. World Scientific, 2005.
23. L. Euler, *Theorie complete (sic) de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux.* St. Petersburg. Imperial Academy of Sciences, 1773.
24. T. H. Havelock, *Forced surface waves.* — Phil. Mag. **8** (1929), 569–576.

Nazarov S. A., Taskinen J. Double-sided estimates for eigenfrequencies in the John problem for freely floating body.

The two-dimensional problem on oblique incident waves and a freely floating cylinder is reduced to the study of the spectrum of a suitable self-adjoint operator in Hilbert space. Using tools from spectral measure theory we estimate the difference between eigenfrequencies of the original problem and a problem on an inert body, which does not react to the buoyancy forces. We give the localization of eigenfrequencies of the freely

floating body, and in addition derive a sufficient condition for the existence of the point spectrum in the corresponding boundary value problem.

ИПМаш РАН,
В.О. Большой пр. 61, 199178,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: `srgnazarov@yahoo.co.uk`

Поступило 18 октября 2011 г.

University of Helsinki,
Department of Mathematics and Statistics,
P.O.Box 68 FIN-00014 Helsinki Finland
E-mail: `jari.taskinen@helsinki.fi`