Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 397, 2011 г.

Е. Э. Лохару

МАКСИМАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ, ИЗМЕРЯЮЩИЕ ГЛАДКОСТЬ: КОНТРПРИМЕРЫ

§1. Введение

Наряду с классической максимальной функцией Харди–Литлвуда

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f|,$$

в $70^{\underline{e}}$ годы $\overline{\underline{XX}}$ века Фефферманом и Стейном была введена в употребление максимальная функция $f^\sharp$,

$$f^\sharp(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f - f_Q|.$$

Здесь и далее через Q обозначается куб со сторонами, параллельными координатным осям, а через f_Q – среднее значение функции f по кубу Q. Напомним, что классическое пространство BMO функций ограниченной средней осцилляции состоит в точности из тех функций f, для которых $f^\sharp \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Вероятно, это обстоятельство послужило одним из мотивов для определения функции $f^\sharp$ (см. [3]), которая, однако, оказалась очень полезной и в других вопросах – например, при оценках (в том числе весовых) сингулярных интегральных операторов.

В пространстве BMO существуют неограниченные функции, поэтому максимальная функция $f^\sharp$ может быть кое-где существенно меньше, чем f (и тем более, чем Mf). Известная теорема Феффермана–Стейна, утверждает, однако, что функции $f^\sharp$ и Mf имеют одинаковую величину "в среднем": если $1 < p < \infty$ и $Mf \in L^p$, то $\|f^\sharp\|_p \asymp \|Mf\|_p$ с константами, зависящими лишь от p. Доказательство этого утверждения можно найти, например, в книге [1].

Ключевые слова: пространства Соболева, максимальные функции.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории им. П. Л. Чебышева СПбГУ, грант правительства РФ дог. 11.G34.31.0026.

В 1978 г. Кальдерон и Скотт [2] ввели максимальные функции, аналогичные оператору $f^\sharp$ и измеряющие гладкость функции f, а именно, максимальные функции

$$M_{k,p,s}f(x) = \sup_{Q\ni x} \inf_{\deg(\pi)\leqslant k} \frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}}} \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f-\pi|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (1.1)$$

В этом определении k – неотрицательное целое число, $1 \leqslant p < \infty$, а Q – по-прежнему произвольный куб со сторонами, параллельными координатным осям. Внутренний инфимум берется по всем полиномам π, не превосходящим по степени k. Параметр $s \geqslant 0$ следует воспринимать как показатель гладкости; в нашей работе мы ограничимся целыми значениями s.

Такие максимальные функции действительно оправдывают свое название, поскольку, как было доказано Кальдероном и Скоттом (см. [2]), справедлива оценка

$$|\nabla^s f| \leqslant M_{s-1,1,s}f \leqslant M|\nabla^s f|,$$

где $\nabla^s f$ обозначает градиент порядка s функции f (на самом деле, только левое неравенство было доказано Кальдероном и Скоттом, а доказательство правого неравенства можно найти в [1]). Более того, можно утверждать, что если $M_{s-1,p,s}f \in L^q$, при $q > 1$, то у функции f существуют все слабые производные $D^\mu f$, $|\mu| = s$ и принадлежат пространству L^q. Подробные доказательства этих утверждений можно найти в [1].

В случае нулевой гладкости, когда $s = 0$ и $k = 0$, определение (1.1) совпадает с определением функции $f^\#$. Можно доказать, что для случая $s = 0$ строго положительные значения параметра $k > 0$ в определении (1.1) дадут максимальные функции, сравнимые с $f^\#$ (см. [1]). А именно, для любого $k > 0$ найдется полином π степени не более k, для которого $C_1 M_{k,p,0}(f-\pi) \leqslant f^\# \leqslant C_2 M_{k,p,0}(f-\pi)$. Получается, что при $s = 0$ естественно рассматривать только два максимальных оператора вида (1.1), это $f^\#$ и Mf.

Когда гладкость положительная, возникает похожая ситуация, а именно, естественным образом имеются два оператора $M_{s-1,p,s}$ и $M_{s,p,s}$, отвечающие порядку гладкости s, которые мы будем обозначать через $M^\flat_{s,p}f$ и $M^\sharp_{s,p}f$, соответственно. Ясно, что функция $M^\sharp_{s,p}f$, вообще говоря, может быть поточечно меньше, чем функция $M^\flat_{s,p}f$.

Встает, однако, вопрос о связи их L^q-норм. Естественно поинтересоваться, нет ли и здесь аналога теоремы Фефферманa–Стейна, т.е. не сравнимы ли L^q - нормы функций $M^\flat_{s,p} f$ и $M^\sharp_{s,p} f$.

Из косвенных соображений специалистам было давно известно, что такого ожидать нельзя. Однако, в явном виде доказательство отсутствия такого рода оценок приведено, пожалуй, лишь в книге [1]. Остановимся чуть подробнее на этом результате.

Введем пространства

$$C^\flat_{s,p,q} = \{f \in L^q : \|M^\flat_{p,s} f\|_q < \infty\} \tag{1.2}$$

и

$$C^\sharp_{s,p,q} = \{f \in L^q : \|M^\sharp_{s,p} f\|_q < \infty\}. \tag{1.3}$$

Известная теорема Кальдерона (см. [1]) говорит о том, что $C^\flat_{s,1,q}$ совпадает при $1 < q < \infty$ и целом s с (неоднородным) пространством Соболева $W^s_q = W^s_q(\mathbb{R}^n)$. На самом деле равенство $C^\flat_{s,p,q} = W^s_q$ верно при $1 \leqslant p < q < \infty$ (доказывается тем же методом). Между тем, в §7 в [1] показано, в частности, что при целом s класс $C^\sharp_{s,1,q}$ не совпадает ни с каким пространством Соболева. Отсюда следует, что при $1 \leqslant p < q < \infty$ существуют функции f из L^q, для которых норма $\|M^\sharp_{s,p} f\|_q$ (сколь угодно) мала, а норма $\|M^\flat_{s,p} f\|_q$ (сколь угодно) велика.

Сказанное оставляет, однако, без ответа следующие вопросы: при чем здесь ограничение $1 \leqslant p < q < \infty$ и почему надо искать “плохие” функции f именно в L^q (т.е. нельзя ли подчинить их более сильным метрическим условиям)?

При $p \geqslant q$ сравнение с пространством Соболева (как было в [1]) недоступно. В этой заметке мы предлагаем иной метод построения контрпримеров, основанный на непосредственных оценках норм $\|M^\flat_{s,p} f\|_q$ и $\|M^\sharp_{s,p} f\|_q$, который работает при всех допустимых (см. п. 2.4) значениях показателей p и q. Построенная “плохая” функция будет ограниченной и финитной. Она наглядно демонстрирует, сколь сильно могут на самом деле различаться максимальные функции “$\sharp$” и “$\flat$” (в [1] это трудно было разглядеть за аппаратом теорем вложения).

Отметим, что решающая оценка в нашем контрпримере следует из стохастических соображений (неравенство Колмогорова); см. п. 2.1.

Нужно еще сказать о том, что процедуры из [1] принадлежат теории неоднородных пространств (неоднородность выражается дополнительным требованием $f \in L^q$ в определениях (1.2) и (1.3)). В частности, использованные там теоремы вложения были доказаны лишь в неоднородном случае. Между тем, задача скорее отвечает идеологии однородных классов функций, определяемых лишь метрическими условиями на максимальные функции “$\sharp$” и “$\flat$” (или на старшие производные в более традиционных ситуациях).

§2. Построение контрпримеров

Наша цель состоит в том, чтобы для любых допустимых значений параметров s, p в произвольной размерности n построить пример финитной функции $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, для которой функция $M^\sharp_{s,p} f$ принадлежит пространству $L^q(\mathbb{R}^n)$, в то время как $\|M^\flat_{s,p} f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \infty$.

Мы начнем со случая, когда гладкость и размерность равны единице (п. 2.1). Тогда пример оказывается абсолютно наглядным. Затем (в п. 2.2) на его основе построим одномерный контрпример, отвечающий случаю произвольной (целой) гладкости. Это, в свою очередь, позволит нам разобрать общую ситуацию произвольных гладкости и размерности (см. п. 2.3).

2.1. Случай $n = 1$ и $s = 1$. В этом пункте и далее мы будем часто использовать следующие обозначения: для произвольного куба $Q \subset \mathbb{R}^n$и целого числа $s > 0$ определим величины

$$M^\flat_{s,p,Q} f = \inf_{\deg(\pi) \leqslant s-1} \frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}}} \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f - \pi|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

и

$$M^\sharp_{s,p,Q} f = \inf_{\deg(\pi) \leqslant s} \frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}}} \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f - \pi|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Обозначим через Δ^0 отрезок $[0, 1]$. Фиксируем произвольным образом число $\lambda > 0$ и рассмотрим следующую процедуру. Разделим отрезок Δ^0 на четыре равные части и обозначим их через Δ^1_j, где $j = 1, 2, 3, 4$. Через h_1 обозначим кусочно-линейную функцию, которая равна нулю на крайних отрезках, т.е. на отрезках Δ^1_1 и на Δ^1_4, на отрезке

Δ_2^1 ее производная равна λ, а на отрезке Δ_3^1 ее производная совпадает с $-\lambda$.

Теперь проделаем тоже самое для каждого из отрезков Δ_j^1. Разделим каждый на четыре части и на каждом из отрезков Δ_j^1 построим кусочно-линейную функцию, равную нулю на крайних отрезках разбиения отрезка Δ_j^1, а на средних имеющую наклон, равный λ и $-\lambda$ соответственно. Таким образом, на всем отрезке Δ^0 мы определили функцию h_2 (ее производная принимает значения 0, λ и $-\lambda$). Далее будем продолжать эту процедуру. На k-ом шаге мы имеем 4^k отрезков разбиения одинаковой длины. Каждый из них мы делим на четыре части и строим соответствующую кусочно-линейную функцию. Возникает корректно определенная функция на отрезке Δ^0, которую обозначим через h_k. Таким образом, мы по индукции определяем последовательность кусочно-линейных функций h_k, обладающих следующими свойствами:

$$\|h_k\|_\infty \leqslant \frac{1}{4^k}\lambda, \tag{2.1}$$

$$P(|h_k'| = \lambda) = 1/2. \tag{2.2}$$

Последнее равенство означает, что с вероятностью $1/2$ (т.е. на множестве, лебегова мера которого равна $1/2$), выполняется соотношение $|h_k'| = \lambda$. Кроме того, нам будет важно, что производные h_k' образуют последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин на отрезке Δ^0 с мерой Лебега. Теперь определим функцию f_k равенством

$$f_k = \sum_{j=1}^{k} h_j. \tag{2.3}$$

Нетрудно видеть, что в силу (2.1) справедливы оценки

$$\|f_k\|_\infty \leqslant 1/3\lambda, \tag{2.4}$$

$$\|f_k - f_j\|_\infty \leqslant \frac{1}{4^j}\frac{\lambda}{3}, \quad j < k. \tag{2.5}$$

Сейчас мы сформулируем основное утверждение о функциях f_k.

Теорема 2.1. *Пусть $p \geqslant 1$ и $q > \frac{p}{p+1}$. Тогда для каждого натурального k справедливы оценки*

$$\|M_{1,p}^\sharp(f_k)\|_\infty \leqslant C_1\lambda, \tag{2.6}$$

$$\|M_{1,p}^\sharp(f_k)\|_{L^q(\mathbb{R})} \leqslant C_2\lambda, \tag{2.7}$$

$$\|M^{\flat}_{1,p}(f_k)\|_{L^q(\Delta_0)} > C_3 k^{\frac{1}{2}}\lambda, \tag{2.8}$$

причем константы C_1, C_2 *и* C_3 *не зависят от* λ *и* k*. Кроме того, найдется множество* $E_{\lambda,k} \subset [0,1]$*, для которого*

$$M^{\flat}_{1,p}(f_k)(x) > C_3 k^{\frac{1}{2}}\lambda,\ x \in E_{\lambda,k} \quad \text{и} \quad |E_{\lambda,k}| > 1/2.$$

Следствие 2.1.1. *Для любых* $p \geqslant 1$ *и* $q > \frac{p}{p+1}$ *существует финитная функция* $f \in L^{\infty}$*, для которой*

$$M^{\sharp}_{1,p}f \in L^q(\mathbb{R}) \text{ и } \|M^{\flat}_{1,p}f\|_{L^q(\mathbb{R})} = \infty.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность отрезков $\Delta_j = [\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j}]$ и с помощью теоремы 2.1 для каждого отрезка Δ_j (мы пересадим соответствующую функцию с отрезка $[0,1]$ на Δ_j с помощью линейного преобразования) мы найдем функцию f_{λ_j,k_j}, для которой

$$\|M^{\sharp}_{1,p}(f_{\lambda_j,k_j})\|_q \leqslant C_1\frac{\lambda_j}{|\Delta_j|} \quad \text{и} \quad \|f_{\lambda_j,k_j}\|_{\infty} \leqslant C_1\frac{\lambda_j}{|\Delta_j|}.$$

Кроме того, выбирая числа k_j достаточно большими, мы можем считать, что

$$M^{\flat}_{1,p}(f_{\lambda_j,k_j})(x) > j, \quad x \in E_j \subset \Delta_j \quad \text{и} \quad |E_j| > 1/2|\Delta_j|.$$

При этом (это следует непосредственно из утверждения теоремы 1.2), для каждой точки $x \in E_j$ найдется отрезок $Q_j(x) \subset E_j$, для которого

$$M^{\flat}_{1,p,Q_j(x)}(f_{\lambda_j,k_j}) > j.$$

Остается рассмотреть функцию $f = \sum_j f_{\lambda_j,k_j}$. Для этой функции, при условии, что $\sum_j \frac{\lambda_j}{|\Delta_j|} < \infty$ мы получим, что $\|M^{\sharp}_{1,p}f\|_q < \infty$, но $\|M^{\flat}_{1,p}f\|_q = \infty$. □

Замечание. Функцию f, для которой $\|M^{\sharp}_{1,p}f\|_q < \infty$ и $\|M^{\flat}_{1,p}f\|_q = \infty$ можно получить также как равномерный предел функций $f_{\lambda,k}$, когда $k \to \infty$ ($f_{\lambda,k}$ — функция из теоремы 2.1, отвечающая параметрам k и λ; параметр λ — фиксирован). Однако, приведенное доказательство следствия 2.1.1 оказывается, в данном случае, более удобным.

Доказательство теоремы 2.1. Вначале мы докажем неравенства (2.6) и (2.7), а после оценку (2.8).

Возьмем некоторую точку $x \in \Delta^0$ и оценим величину $M^\sharp_{1,p} f(x)$. Для этого фиксируем произвольный отрезок Δ, содержащий точку x. Нам требуется оценить выражение

$$M^\sharp_{1,p,\Delta}(f_k) = \frac{1}{|\Delta|}\left(\inf_{\deg(\pi)\leqslant 1} \frac{1}{|\Delta|}\int\limits_{\Delta} |f_k - \pi|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Заметим, что точке x соответствует некоторая последовательность вложенных диадических отрезков Δ^j длины $1/4^j$, содержащих точку x. Тогда найдется номер j_0, для которого

$$\frac{1}{4^{j_0+1}} < |\Delta| \leqslant \frac{1}{4^{j_0}}.$$

Рассмотрим два соседних для Δ^{j_0} диадических отрезка того же порядка. Обозначим их через $\Delta^{j_0}_-$ и $\Delta^{j_0}_+$ соответственно. Тогда, непременно $\Delta \subset \Delta^{j_0}_- \cup \Delta^{j_0} \cup \Delta^{j_0}_+ = \widetilde{\Delta}$. Теперь заметим, что функции f_k обладают следующим важным свойством: функция f'_k постоянна на каждом из 4^k отрезков соответствующего разбиения, а ее колебание на любых двух соседних отрезках не превосходит 2λ. В этом совсем нетрудно убедиться с помощью индукции. В качестве многочлена π выберем продолжение линейной функции $f_{j_0}|_{\Delta_{j_0}}$ на всю прямую. Тогда, в силу сделанного замечания, для функции f_{j_0} имеем оценку

$$\begin{aligned} M^\sharp_{1,p,\Delta}(f_{j_0}) &\leqslant \frac{1}{|\Delta|}\left(\frac{1}{|\Delta|}\int\limits_{\widetilde{\Delta}} |f_{j_0} - \pi|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant C_0 \frac{1}{|\widetilde{\Delta}|}\left(\frac{1}{|\widetilde{\Delta}|}\int\limits_{\widetilde{\Delta}} |f_{j_0} - \pi|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C_1\lambda. \end{aligned}$$

Теперь оценим максимальный оператор $M^\sharp_{1,p,\Delta}$ уже от функции f_k. Для этого по неравенству треугольника напишем

$$M^\sharp_{1,p,\Delta}(f_k) \leqslant M^\sharp_{1,p,\Delta}(f_{j_0}) + M^\sharp_{1,p,\Delta}(f_k - f_{j_0}).$$

Первое слагаемое оценивается через $C_1\lambda$ в силу последнего неравенства, а для оценки второго используем неравенство (2.5), и тогда

$$M^{\sharp}_{1,p,\Delta}(f_k - f_{j_0}) \leqslant \frac{1}{|\Delta|}\|f_k - f_{j_0}\|_\infty \leqslant 4^{j_0+1}\frac{1}{4^{j_0}}\frac{\lambda}{3} \leqslant C_1\lambda.$$

Таким образом, для произвольного отрезка Δ, содержащего точку $x \in \Delta^0$, справедлива оценка

$$M^{\sharp}_{1,p,\Delta}(f_k) \leqslant C_1\lambda.$$

Теперь предположим, что точка x лежит вне отрезка Δ^0, но внутри $4\Delta^0$. Тогда, так как носитель функции f_k содержится в отрезке Δ^0, имеет смысл рассматривать только те отрезки Δ, для которых $\Delta \cap \Delta^0 \neq \varnothing$. В противном случае величина $M^{\sharp}_{1,p,\Delta}f(x)$ просто равна нулю. Пусть $\Delta \cap \Delta^0 \neq \varnothing$. Теперь рассмотрим наибольший из номеров j, для которых $1/4^j > |\Delta \cap \Delta^0|$. Обозначим такой номер через j_0, тогда

$$1/4^{j_0+1} \leqslant |\Delta \cap \Delta^0| < 1/4^{j_0}. \tag{2.9}$$

В силу определения функции f_{j_0} будем иметь $f_j|_{\Delta\cap\Delta^0} = 0$, при любом $j \leqslant j_0$. Если $j_0 > k$, то доказывать нечего. Предположим, что $j_0 < k$, тогда

$$M^{\sharp}_{1,p,\Delta}(f_k) \leqslant \frac{1}{|\Delta|}\left(\frac{1}{|\Delta|}\int\limits_{\Delta}|f_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{|\Delta|}\left(\frac{1}{|\Delta|}\int\limits_{\Delta\cap\Delta^0}|f_k - f_{j_0}|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Используя неравенство (2.5), получим

$$\frac{1}{|\Delta|}\left(\frac{1}{|\Delta|}\int\limits_{\Delta\cap\Delta^0}|f_k - f_{j_0}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{1}{|\Delta|}\frac{1}{4^{j_0}}\frac{\lambda}{3} \leqslant C_1\lambda.$$

Рассмотрим последний случай, когда $x \notin 4\Delta^0$. Тогда если $\Delta\cap\Delta^0 \neq \varnothing$, то $|\Delta| > A|x - x_0|$, где x_0 - центр отрезка Δ^0. Поэтому мы можем оценить

$$\begin{aligned} M^{\sharp}_{1,p,\Delta}(f_k) &\leqslant \frac{1}{|\Delta|}\left(\frac{1}{|\Delta|}\int\limits_{\Delta}|f_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C_1\frac{|\Delta^0|^{\frac{1}{p}}}{|\Delta|^{1+\frac{1}{p}}}\|f_k\|_\infty \\ &\leqslant C_1\frac{\lambda}{|x - x_0|^{1+\frac{1}{p}}}|\Delta^0|^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$M^\sharp_{1,p} f_k(x) \leqslant C_1 \frac{\lambda}{|x-x_0|^{1+\frac{1}{p}}} |\Delta^0|^{\frac{1}{p}} \leqslant C_1 \lambda.$$

Подводя итог, мы сразу получим оценку (2.6), а для оценки (2.7) запишем неравенство

$$\|M^\sharp_{1,p} f_k\|^q_{L^q} \leqslant \int\limits_{4\Delta^0} |M^\sharp_{1,p} f_k|^q + \int\limits_{\mathbb{R}\setminus 4\Delta^0} |M^\sharp_{1,p} f_k|^q.$$

Первое слагаемое мы можем оценить с помощью (2.6), а для оценки второго использовать последнее доказанное неравенство, откуда

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus 4\Delta^0} |M^\sharp_{1,p} f_k|^q \leqslant 2C_1^q \lambda^q \int\limits_{[1,\infty]} \frac{1}{|x|^{q(1+1/p)}} \leqslant C_2^q \lambda^q.$$

Отсюда получается неравенство (2.7).

Для доказательства утверждения нам осталось проверить оценку (2.8). Для этого нам понадобится следующий вариант неравенства Колмогорова.

Лемма 2.1 (неравенство Колмогорова)**.** *Пусть $\xi_1, \dots, \xi_k$ – последовательность независимых случайных величин с нулевыми средними. Предположим, что $|\xi_k|$ равномерно ограничены величиной a, тогда для любого $\epsilon > 0$*

$$P\left(\max_{1\leqslant j\leqslant k} |S_j| \geqslant \epsilon\right) \geqslant 1 - \frac{(a+\epsilon)^2}{E(S_k^2)}, \tag{2.10}$$

где $S_j = \xi_1 + \dots + \xi_j$.

Доказательство леммы можно найти практически в любом учебнике по теории вероятностей.

Мы будем применять неравенство Колмогорова к последовательности $\xi_k = h'_k$, и тогда $S_k = f'_k$. В качестве a мы можем взять λ. Величину ϵ выберем следующим образом:

$$\epsilon = \lambda \frac{k^{\frac{1}{2}}}{2} - \lambda.$$

Заметим, что $E(S_k^2) = k\frac{\lambda^2}{2}$, а тогда неравенство Колмогорова дает нам

$$P\left(\max_{1\leqslant j\leqslant k}|f_j'|\geqslant bk^{\frac12}\lambda\right)\geqslant 1-1/2=1/2. \tag{2.11}$$

Константа b выбрана из условия $k^{\frac12}-2>bk^{\frac12}$ при $k>8$. Множество точек $x\in\Delta^0$, для которых выполняется неравенство

$$\max_{1\leqslant j\leqslant k}|f_j'(x)|\geqslant bk^{\frac12}\lambda,$$

обозначим через $E_{\lambda,k}$, тогда $|E_{\lambda,k}|\geqslant\frac12|\Delta^0|=\frac12$.

Возьмем произвольную точку $x\in E_{\lambda,k}$ и покажем, что

$$M^\flat_{1,p}f_k(x)>C_3k^{\frac12}\lambda. \tag{2.12}$$

Так как x принадлежит множеству $E_{\lambda,k}$, то найдется индекс $1\leqslant j_0\leqslant k$, для которого

$$|f_{j_0}'(x)|\geqslant bk^{\frac12}\lambda.$$

Рассмотрим диадический отрезок длины $1/4^{j_0}$, содержащий точку x. Такой отрезок определен однозначно, так как мы предполагаем наличие производной функции f_{j_0} в точке x. Этот отрезок мы обозначим через Δ. На отрезке Δ функция f_{j_0} линейна и ее производная не меньше, чем величина $bk^{\frac12}\lambda$, а тогда нетрудно убедиться, что

$$M^\flat_{1,p}f_{j_0}(x)\geqslant b_1k^{\frac12}\lambda. \tag{2.13}$$

По неравенству треугольника мы можем записать

$$\begin{aligned}M^\flat_{1,p,\Delta}f_k&>M^\flat_{1,p,\Delta}f_{j_0}-M^\flat_{1,p,\Delta}(f_k-f_{j_0})\\&\geqslant b_1k^{\frac12}\lambda-M^\flat_{1,p,\Delta}(f_k-f_{j_0}).\end{aligned}$$

А теперь оценим выражение $M^\flat_{1,p,\Delta}(f_k-f_{j_0})$:

$$M^\flat_{1,p,\Delta}(f_k-f_{j_0})\leqslant\frac{1}{|\Delta|}\|f_k-f_{j_0}\|_\infty\leqslant C_1\lambda.$$

Следовательно,

$$M^\flat_{1,p,\Delta}f_k>C_3k^{\frac12}\lambda.$$

Таким образом, для всех $x\in E_{\lambda,k}$ выполнена оценка $M^\flat_{1,p}f_k(x)>C_3k^{\frac12}\lambda$ (тем самым доказана последняя часть утверждения теоремы о множестве $E_{\lambda,k}$) и, возведя неравенство в степень q и проинтегрировав по Δ^0, мы приходим к (2.8). Теорема доказана. □

2.2. Случай $n = 1$ и $s > 0$. Фиксируем $\lambda > 0$ и рассмотрим функцию f_k, которую мы построили в предыдущем параграфе. Далее мы будем предполагать, что $s > 1$. Определим последовательность функций f_k^s с носителями на отрезках $[0, 2^{s-1}]$ индукцией по s. Возьмем $f_k^1 = f_k$. Предположим, что функция f_k^{s-1} определена. На отрезке $[0, 2^{s-1}]$ определим функцию f_k^s как f_k^{s-1}, а на отрезке $[2^{s-1}, 2^s]$ как $-f_k^{s-1}$. Таким образом, $f_k^s = L^s(f_k)$, где L – соответствующий линейный оператор:

$$L(\varphi) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{для} \quad x \in [0, a], \\ \\ -\varphi(x) & \text{для} \quad x \in [a, 2a]; \end{cases} \qquad \operatorname{supp}(\varphi) = [0, a].$$

Заметим, что производные порядка s от функций f_k^s все еще образуют последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин на любом отрезке вида $[2^{j-1}, 2^j]$.

Теперь рассмотрим оператор взятия первообразной

$$F(f)(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(y)dy.$$

Положим

$$F_k^s = F^{s-1}(f_k^{s-1}).$$

Функции f_k^s выбраны таким образом, чтобы функция F_k^s заведомо имела носитель на отрезке $[0, 2^{s-1}]$. Теперь мы готовы сформулировать теорему.

Теорема 2.2. *Пусть $s > 1$, $p \geqslant 1$ и $q > \frac{p}{sp+1}$. Тогда для каждого натурального k справедливы оценки*

$$\|M^{\sharp}_{s,p}(F_k^s)\|_{\infty} \leqslant C_1\lambda, \tag{2.14}$$

$$\|M^{\sharp}_{s,p}(F_k^s)\|_{L^q(\mathbb{R})} \leqslant C_2\lambda, \tag{2.15}$$

$$\|M^{\flat}_{s,p}(F_k^s)\|_{L^q([0,2^{s-1}])} > C_3 k^{\frac{1}{2}}\lambda, \tag{2.16}$$

причем константы C_1, C_2 и C_3 не зависят от λ и k. Кроме того, найдется множество $E_{\lambda,k} \subset [0, 1]$, для которого

$$M^{\flat}_{s,p}(F_k^s)(x) > C_3 k^{\frac{1}{2}}\lambda, \ x \in E_{\lambda,k} \quad \text{и} \quad |E_{\lambda,k}| > 1/2.$$

Следствие 2.2.1. *Пусть $s > 0$. Тогда для любых $p \geqslant 1$ и $q > \frac{p}{sp+1}$ существует финитная ограниченная функция $f \in L^q(\mathbb{R})$, для которой*

$$M^{\sharp}_{s,p}f \in L^q \ \text{и} \ \|M^{\flat}_{s,p}f\|_{L^q} = \infty.$$

Доказательство следствия 2.2.1 полностью повторяет доказательство следствия 2.1.1, достаточно только заметить, что $\|F_k^s\|_\infty \leqslant C\lambda$.

Для доказательства теоремы нам понадобится следующий важный результат.

Лемма 2.2 (Р. Шарпли, Р. Девор). *Пусть $s > 1$ и $f \in W_q^s(\mathbb{R}^n)$, тогда для любого куба Q справедливы оценки*

$$M_{s,p,Q}^\flat f \leqslant C \sum_{|\mu|=s-1} M_{1,p,Q}^\flat (D^\mu f) \tag{2.17}$$

и

$$M_{s,p,Q}^\sharp f \leqslant C \sum_{|\mu|=s-1} M_{1,p,Q}^\sharp (D^\mu f). \tag{2.18}$$

Доказательство леммы можно найти в книге [1, с. 42, теорема 6.7].

Доказательство теоремы 2.2. Применим лемму 2.2 для функции F_k^s, тогда

$$M_{s,p}^\sharp (F_k^s)(x) \leqslant C M_{1,p}^\sharp (f_k^s)(x) \leqslant C 2^{s-1} \|M_{1,p}^\sharp (f_k)\|_\infty \leqslant C_1 \lambda.$$

Таким образом, мы получили (2.14). Далее, заметим, что

$$\|M_{1,p}^\sharp (f_k^s)\|_q \leqslant C 2^{s-1} \|M_{1,p}^\sharp (f_k)\|_q \leqslant C_1 \lambda.$$

Осталось доказать неравенство (2.16). Обозначим через $E_k^s(\lambda)$ множество всех точек x из отрезка $[0, 2^{s-1}]$, для которых $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant k} |(f_j^{s-1})'(x)| > bk^{\frac{1}{2}} \lambda$. Тогда, по неравенству Колмогорова (мы применяем неравенство Колмогорова для нормированной меры Лебега на отрезке $[0, 2^{s-1}]$) получится, что $|E_k^s(\lambda)| > 2^{s-2}$. Фиксируем точку $x \in E_k^s(\lambda)$. Для нее найдется номер j_0 такой, что

$$|(f_{j_0}^{s-1})'(x)| > bk^{\frac{1}{2}} \lambda.$$

Рассмотрим диадический отрезок длины $1/4^{j_0}$, содержащий точку x. Обозначим его через Δ. Оценим величину $M_{s,p,\Delta}^\flat f_k^s$. Для этого заметим, что по линейности

$$F_k^s = F^{s-1}(L_{s-1} f_k) = F^{s-1}(f_{j_0}^{s-1}) + F^{s-1}(L_{s-1}(f_k - f_{j_0})).$$

Отсюда

$$M_{s,p,\Delta}^\flat F_k^s \geqslant M_{s,p,\Delta}^\flat (F^{s-1}(f_{j_0}^{s-1})) - M_{s,p,\Delta}^\flat (F^{s-1}(L_{s-1}(f_k - f_{j_0}))).$$

Функция $F^{s-1}(f_{j_0}^{s-1})$ на отрезке Δ совпадает с полиномом степени s, старший коэффициент которого по модулю не меньше, чем $(s-1)!bk^{\frac{1}{2}}\lambda$, а тогда

$$M^\flat_{s,p,\Delta}(F^{s-1}(f_{j_0}^{s-1})) > C_3 k^{\frac{1}{2}}\lambda.$$

Для оценки второго слагаемого применим лемму 2.2 к функции $L_{s-1}(f_k - f_{j_0})$ и получим

$$\begin{aligned} M^\flat_{s,p,\Delta}(F^{s-1}(L_{s-1}(f_k - f_{j_0}))) &\leqslant CM^\flat_{1,p,\Delta}(D^{s-1}(F^{s-1}(L_{s-1}(f_k - f_{j_0})))) \\ &= CM^\flat_{1,p,\Delta}(L_{s-1}(f_k - f_{j_0})). \end{aligned}$$

Заметим, что отрезок Δ задевает только один из отрезков вида $[j, j+1]$, откуда

$$M^\flat_{1,p,\Delta}(L_{s-1}(f_k - f_{j_0})) \leqslant M^\flat_{1,p,\Delta}(f_k - f_{j_0}),$$

а это выражение мы уже оценивали в предыдущем параграфе через $C\lambda$. Окончательно получаем

$$M^\flat_{s,p,\Delta}(F^{s-1}(L_{s-1}(f_k - f_{j_0}))) \leqslant C\lambda.$$

Таким образом,

$$M^\flat_{s,p,\Delta} F_k^s > C_3 k^{\frac{1}{2}}\lambda - C\lambda > C_3' k^{\frac{1}{2}}\lambda$$

и

$$M^\flat_{s,p}(F_k^s)(x) > C_3 k^{\frac{1}{2}}\lambda.$$

Интегрирование последнего неравенства по отрезку $[0, 2^{s-1}]$ дает (2.16). Теорема доказана. $\square$

2.3. Общий случай $n > 1$ **и** $s > 0$**.** В этом пункте мы с помощью функций, построенных в п. 2.1–2.2, сконструируем контрпример в общем случае. Для этого рассмотрим функцию F_k^s от одной переменной, отвечающую гладкости s и параметрам λ и k. Определим функцию

$$\varphi_k^s(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_k^s(x_1).$$

Главное свойство функции φ_k^s содержится в следующей лемме.

Лемма 2.3. *Пусть функция f определена на вещественной прямой и локально суммируема. Определим n-мерную функцию φ по формуле*

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1).$$

Тогда для любых целых значений параметров s, k и вещественных $p \geqslant 1$ справедливы оценки

$$C_1 M_{k,p,s}\varphi(x) \leqslant M_{k,p,s} f(x_1) \leqslant C_2 M_{k,p,s}\varphi(x),$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Доказательство. Фиксируем n-мерный куб $Q = Q_1 \times Q_2 \times \dots \times Q_n$. Для доказательства левого неравенства достаточно рассмотреть в определении величины $M_{k,p,s,Q}$ не все полиномы из пространства $\mathbb{P}_k$, а только полиномы от переменной x_1. Тогда

$$\begin{aligned} M_{k,p,s,Q}\varphi &= \frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}}} \inf_{\deg(\pi)\leqslant k} \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |\varphi - \pi|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant \frac{1}{|Q_1|^s} \inf_{\deg(\pi(x_1))\leqslant k} \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x_1) - \pi(x_1)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{1}{|Q_1|^s} \inf_{\deg(\pi(x_1))\leqslant k} \left(\frac{1}{|Q_1|} \int\limits_{Q_1} |f(x_1) - \pi(x_1)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= M_{k,p,s} f(x_1). \end{aligned}$$

Докажем справедливость правого неравенства. Для этого нам понадобится использовать конкретное представление многочлена “почти наилучшего” приближения для $M_{k,p,s,Q}\varphi$. Рассмотрим на кубе $I^n = [-1,1]^n$ ортогональную систему полиномов вида $L^1_{\mu_1} \dots L^n_{\mu_n}$, где $L^j_{\mu_j}$ полиномы Лежандра по переменной x_j, и пересадим ее на куб Q. Получившиеся полиномы обозначим через ω^Q_μ, а соответствующие полиномы на кубе I^n будем обозначать просто через ω_μ. Тогда $\omega^Q_\mu(x) = \omega_\mu(\frac{x - x_Q}{l(Q)})$, x_Q – центр куба Q. Также будет удобно записать

$$\omega^Q_\mu(x) = \omega^{Q_1}_{\mu_1}(x_1) \times \dots \times \omega^{Q_n}_{\mu_n}(x_n),$$

где $\omega^{Q_j}_{\mu_j}(x_j) = L^j(\frac{x_j - x^j_Q}{l(Q_j)})$.

В качестве полинома “почти наилучшего” приближения мы можем взять проекцию $P_Q^k f = \sum\limits_{|\mu|\leqslant k} a_\mu^Q \omega_\mu^Q$ и тогда

$$\frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}}}\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |\varphi - P_Q^k\varphi|^p\right)^{\frac{1}{p}} \varphi \leqslant CM_{k,p,s,Q}\varphi,$$

причем константа C не зависит от куба Q и функции φ. Доказательство последнего неравенства можно найти в книге [1, с. 9].

Теперь рассмотрим функцию φ из условия леммы. Для коэффициентов полинома $P_Q^k\varphi$ будем иметь

$$\begin{aligned} a_\mu^Q &= C_\mu \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q \varphi(y)\omega_\mu^Q(y) \\ &= C_\mu \frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q_1} f(y_1)\omega_{\mu_1}^{Q_1} \int\limits_{Q_2\times\ldots\times Q_n} \omega_{\mu_2}^{Q_2}(y_2)\times\cdots\times\omega_{\mu_n}^{Q_n}(y_n). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что коэффициенты a_μ равны нулю для всех мультииндексов $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_n)$, для которых $\mu_j \neq 0$ при некотором $j > 1$. Другими словами, многочлен $P_Q^k\varphi$ зависит только от переменной x_1, и тогда мы приходим к нужной оценке, поскольку, как и раньше,

$$\begin{aligned} M_{k,p,s,Q}\varphi &> C^{-1}\frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}}}\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |\varphi - P_Q^k\varphi|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{1}{|Q_1|^s}\left(\frac{1}{|Q_1|}\int\limits_{Q_1} |f - P_Q^k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant M_{k,p,s,Q_1}f. \qquad \square \end{aligned}$$

Рассмотрим гладкую финитную функцию φ_0, которая равна единице на кубе $[-2^{s-1}, 2^{s-1}]^n$, а вне куба $[-2^s, 2^s]^n$ обращается в ноль. Будем считать, что $\|\nabla^j\varphi_0\|_\infty \leqslant C_1$ при любом $1 \leqslant j \leqslant s$. Обозначим

$$H_k^s(x) = \varphi_k^s(x)\varphi_0(x).$$

Нам потребуется оценивать значение оператора $M_{s,p}^\sharp$ на произведении двух функций $\varphi_k^s(x_1)\varphi_0$. Для этого мы докажем вспомогательную лемму.

Лемма 2.4. *Предположим, что функции f и φ локально суммируемы с показателем $p \geqslant 1$. Кроме того, предположим, что функция φ финитна. Тогда для любого $s \geqslant 0$ верна оценка*

$$M^{\sharp}_{s,p}(f\varphi)(x) \leqslant CM^{\sharp}_{s,p}f(x)\|\varphi(x)\|_{\infty} + CM^{\sharp}_{s,p}\varphi(x)\|f\|_{\infty}. \tag{2.19}$$

Доказательство. Доказательство леммы основано на следующем важном свойстве оператора $M^{\sharp}_{s,p}$.

Лемма 2.5. *Для любых целых $s \geqslant 0$ и $k > s$ существует константа $C_{k,s,n}$ и многочлен π степени не более k такие, что справедлива поточечная оценка*

$$M^{\sharp}_{s,p}(f-\pi)(x) \leqslant C_{k,s,n}M_{k,p,s}f(x). \tag{2.20}$$

Доказательство этого утверждения можно частично найти в работе [1, с. 10]. Заметим, что если функция f в лемме 1.5 финитна, то непременно $\pi = 0$.

Продолжим доказательство леммы 1.4. Для этого запишем неравенство

$$M_{2s,p,s,Q}f\varphi \leqslant \frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}}}\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q}|f\varphi - P^s_Q f P^s_Q\varphi|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Прибавим и вычтем под знаком интеграла величину $P^s_Q(f\varphi)$. Тогда по неравенству треугольника будем иметь

$$\frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}}}\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q}|f\varphi - P^s_Q f P^s_Q\varphi|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}}}\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q}|(f - P^s_Q f)\varphi|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}}}\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q}|P^s_Q f(P^s_Q\varphi - \varphi)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant M^{\sharp}_{s,p}f\|\varphi\|_{\infty} + M^{\sharp}_{s,p}\|f\|_{\infty}.$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что по лемме 1.5 справедлива оценка

$$M^{\sharp}_{s,p}f\varphi(x) \leqslant CM_{2s,p,s}f\varphi(x).$$

Лемма доказана. □

Теперь все готово для того, чтобы сформулировать и доказать основной результат этого пункта.

Теорема 2.3. *Пусть $s, n \geqslant 1$, $p \geqslant 1$ и $q > \frac{p}{sp+n}$. Тогда для каждого натурального k справедливы оценки*

$$\|M^{\sharp}_{s,p}(H^s_k)\|_{\infty} \leqslant C_1\lambda, \tag{2.21}$$

$$\|M^{\sharp}_{s,p}(H^s_k)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_2\lambda, \tag{2.22}$$

$$\|M^{\flat}_{s,p}(H^s_k)\|_{L^q([0,2^{s-1}]^n)} > C_3 k^{\frac{1}{2}}\lambda, \tag{2.23}$$

причем константы C_1, C_2 и C_3 не зависят от λ и k. Кроме того, найдется множество $E_{\lambda,k} \subset [0,1]$, для которого

$$M^{\flat}_{s,p}(H^s_k)(x) > C_3 k^{\frac{1}{2}}\lambda,\ x \in E_{\lambda,k} \quad \text{и} \quad |E_{\lambda,k}| > 1/2.$$

Следствие 2.3.1. *Пусть $s > 0$. Тогда для любых $p \geqslant 1$ и $q > \frac{p}{sp+n}$ существует финитная функция $f \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, для которой*

$$M^{\sharp}_{s,p} f \in L^q \text{ и } \|M^{\flat}_{s,p} f\|_{L^q} = \infty.$$

Доказательство следствия полностью аналогично доказательству следствия 2.1.1, приведенному в первом пункте.

Доказательство теоремы 2.3. Напомним, что функции H^s_k были определены ранее по формуле

$$H^s_k(x) = \varphi^s_k(x)\varphi_0(x),$$

где

$$\varphi^s_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F^s_k(x_1),$$

а функция φ_0 равна единице на кубе $[-2^{s-1}, 2^{s-1}]^n$ и вне куба $[-2^s, 2^s]^n$ обращается в ноль.

Для доказательства неравенства (2.21) нужно применить лемму 2.4 к функциям φ^s_k и φ_0. Тогда

$$M^{\sharp}_{s,p} H^s_k(x) \leqslant C M^{\sharp}_{s,p}\varphi^s_k(x)\|\varphi_0\|_{\infty} + M^{\sharp}_{s,p}\varphi_0(x)\|H^s_k\|_{\infty}.$$

По лемме 1.3

$$M^{\sharp}_{s,p}\varphi^s_k(x) \leqslant C M^{\sharp}_{s,p} F^s_k(x_1) \leqslant C_1\lambda.$$

Кроме того,

$$\|H^s_k\|_{\infty} \leqslant C_1\lambda.$$

В свою очередь,

$$\|\varphi_0\|_{\infty} \leqslant C \text{ и } M^{\sharp}_{s,p}\varphi_0(x) \leqslant M(\nabla^s\varphi_0)(x) \leqslant C.$$

Таким образом,

$$\|M^{\sharp}_{s,p}H^s_k\|_\infty \leqslant C_1\lambda.$$

Теперь проверим справедливость оценки (2.22). Для этого рассмотрим точку $|x| > 4^s$. Оценим величину $M^{\sharp}_{s,p,Q}H^s_k$. Она будет отлична от нуля только при достаточно больших кубах Q, а именно, необходимо, чтобы

$$|Q| \geqslant a|x|^n.$$

Тогда нетрудно убедиться, что

$$M^{\sharp}_{s,p,Q}H^s_k \leqslant C\frac{\lambda}{|x|^{s+\frac{n}{p}}}.$$

Отсюда, если $|x| > 4^s$, мы имеем

$$M^{\sharp}_{s,p}H^s_k(x) \leqslant C\frac{\lambda}{|x|^{s+\frac{n}{p}}}.$$

Тогда

$$\|M^{\sharp}_{s,p}H^s_k\|^q_q \leqslant C\lambda^q \int\limits_{|x|\geqslant 4^s} \frac{1}{|x|^{q(s+\frac{n}{p})}}dx + C_1\lambda.$$

Так как по предположению $q > \frac{p}{sp+n}$, то окончательно получаем

$$\|M^{\sharp}_{s,p}H^s_k\|^q_q \leqslant C_2\lambda.$$

Перейдем к доказательству последней оценки (2.23). Для этого будем использовать лемму 2.3. Заметим, что для произвольного $x \in E^s_k(\lambda) \times [\,-2^{s-1}, 2^{s-1}]^{n-1}$ справедлива оценка

$$M^{\flat}_{s,p}\varphi^s_k(x) > CM^{\flat}_{s,p}F^s_k(x_1) > C_3k^{\frac{1}{2}}\lambda.$$

Напомним, что по определению на множестве $E^s_k(\lambda)$ функция $M^{\flat}_{s,p}F^s_k$ не меньше, чем $C_3k^{\frac{1}{2}}\lambda$. Рассмотрим отрезок $Q_1 \subset [0, 2^{s-1}]$, содержащий точку x_1, для которого

$$M^{\flat}_{s,p,Q_1}F^s_k > C_3k^{\frac{1}{2}}\lambda.$$

Выберем диадические кубы $Q_2, \dots, Q_n$ так, чтобы $x_j \in Q_j$ и $Q = Q_1 \times \dots \times Q_n \subset [-2^{s-1}, 2^{s-1}]^n$. Тогда на кубе Q функция φ_0 тождественно равна единице, а значит

$$M^{\flat}_{s,p,Q}H^s_k = M^{\flat}_{s,p,Q}\varphi^s_k,$$

но

$$M^{\flat}_{s,p,Q}\varphi^s_k > CM^{\flat}_{s,p,Q_1}F^s_k > C_3k^{\frac{1}{2}}\lambda.$$

Таким образом, для всех $x \in E_k^s(\lambda) \times [-2^{s-1}, 2^{s-1}]^{n-1}$ имеем

$$M_{s,p}^{\flat} H_k^s(x) \geqslant C_3 k^{\frac{1}{2}} \lambda.$$

Остается проинтегрировать последнее неравенство с показателем q и заметить, что мера множества $E_k^s(\lambda) \times [-2^{s-1}, 2^{s-1}]^{n-1}$ равномерно по k и λ отделена от нуля. Теорема доказана. □

2.4. Замечания. Мы разобрали все случаи, когда $s, n \geqslant 1$, $p \geqslant 1$ и $q > \frac{p}{sp+n}$. При любых таких значениях параметров оказывается, что пространства $C_{s,p,q}^{\flat}$ и $C_{s,p,q}^{\sharp}$ (введенные в [1]) различны. Напомним, что

$$C_{s,p,q}^{\flat} = \{f \in L^q : \|M_{s,p}^{\flat} f\|_q < \infty\}$$

и

$$C_{s,p,q}^{\sharp} = \{f \in L^q : \|M_{s,p}^{\sharp} f\|_q < \infty\}.$$

Возникает вопрос: что же происходит при других значениях параметра q и откуда берется условие $q > \frac{p}{sp+n}$? Ответить на этот вопрос совсем не сложно. Возьмем, к примеру, максимальную функцию Харди–Литтлвуда. Известно, что для любой ненулевой функции f ее максимальный оператор убывает на бесконечности не быстрее, чем $|x|^{-n}$. Это означает, что функция Mf не может в принципе быть суммируемой с показателями, меньшими или равными единицы. Аналогичная ситуация и с оператором $M_{s,p}^{\sharp}$. Нетрудно показать, что при $q \leqslant \frac{p}{sp+n}$ функция $M_{s,p}^{\sharp} f$ не может быть суммируемой с показателем q, при условии, конечно, что функция f отлична от полинома степени s и меньше. Для такой функции найдется куб Q, для которого $\operatorname{dist}(f, \mathbb{P}_s) > 0$. В таком случае, для любой точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus 2Q$ возьмем наименьший куб Q_x, содержащий одновременно точку x и куб Q. Тогда

$$M_{s,p,Q_x}^{\sharp} f \geqslant \frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}+\frac{1}{p}}} \operatorname{dist}(f, \mathbb{P}_s) > \frac{c}{|x - x_0|^{s+\frac{n}{p}}}.$$

Отсюда видно, что функция $M_{s,p}^{\sharp} f$ может быть суммируема с показателем q, только если $q > \frac{p}{sp+n}$.

Второе важное замечание состоит в следующем. Для показателей $p_1 < p_2$ справедливо включение

$$C_{s,p_2,q}^{\#} \subseteq C_{s,p_1,q}^{\#}.$$

Это – по сути следствие неравенства Гельдера. Однако, предыдущее рассуждение показывает, что на самом деле

$$C^{\#}_{s,p_2,q} \subsetneqq C^{\#}_{s,p_1,q}.$$

Важно также отметить, что при $q > 1$ все пространства $C^{\#}_{s,p,q}$ отличны от пространств Соболева W^s_q (см. [1, стр. 54]).

Литература

1. R. DeVore, R. Sharpley, *Maximal functions measuring smoothness.* — Memoirs Amer. Math. Soc. **47**, No. 293 (1984).
2. A. Calderon, R. Scott, *Sobolev type inequalities for $p > 0$.* — Studia Math. **62** (1978), 75–92.
3. C. Fefferman, E. M. Stein, *H^p spaces of several variables.* — Acta Math. **129** (1972), 137–193.

Lokharu E. E. Maximal functions measuring smooytness: counterexamples.

We consider two main maximal operators measuring smoothness. For all possible values of the parameters, we give simple examples of bounded functions with compact support that clearly show quite clearly the difference between these maximal operators.

СПбГУ, Лаборатория им. П. Л. Чебышева,
14 линия В.О., д. 29Б
Санкт-Петербург 199178, Россия
E-mail: gtbox@mail.ru

Поступило 8 декабря 2011 г.