Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 397, 2011 г.

И. В. Денисова, В. А. Солонников

ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ДВУХ НЕСЖИМАЕМЫХ КАПИЛЛЯРНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В КОНТЕЙНЕРЕ

§1. Постановка задачи. Формулировка основного результата

В этой работе мы будем рассматривать задачу о движении капли одной несжимаемой жидкости внутри другой. Обе жидкости заключены в контейнер, на границе их раздела мы будем учитывать силу поверхностного натяжения. Эта задача принадлежит к интенсивно изучаемому в настоящее время классу задач со свободными границами, так как поверхность раздела жидкостей неизвестна и подлежит определению в процессе решения. Теория этих задач для уравнений Навье–Стокса насчитывает в своем развитии лишь около трёх-четырёх десятилетий, хотя их постановка восходит к классическим работам 19-ого века.

Дадим математическую формулировку этой двухфазной задачи.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ жидкость с вязкостью $\nu^+ > 0$ и плотностью $\rho^+ > 0$ занимает ограниченную область $\Omega_0^+ \subset \mathbb{R}^3$, а жидкость с вязкостью $\nu^- > 0$ и плотностью $\rho^- > 0$ находится в области Ω_0^-, окружающей Ω_0^+. Обозначим $\partial\Omega_0^+$ через Γ_0. Граница $S \equiv \partial(\Omega_0^+ \cup \Gamma_0 \cup \Omega_0^-)$ – заданная замкнутая поверхность, $S \cap \Gamma_0 = \varnothing$.

При $t > 0$ необходимо найти границу раздела Γ_t между областями Ω_t^+ и Ω_t^-, а также поле скоростей $\mathbf{v}(x,t) = (v_1, v_2, v_3)$, функцию p, отклонение от гидростатического давления P_0, для обеих жидкостей,

---

Ключевые слова: двухфазная задача с неизвестной границей, несжимаемая капиллярная жидкость, лагранжевы коордмнаты, пространства Гёльдера.

Эта работа выполнена при частичной поддержке РФФИ,
грант No. 11-01-00324a, и гранта научной школы НШ-4210.2010.1.

которые удовлетворяют следующей начально-краевой задаче:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_t\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} - \nu^{\pm}\nabla^2\mathbf{v} + \frac{1}{\rho^{\pm}}\nabla p = 0,\\
&\nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \ \text{ в } \ \Omega_t^- \cup \Omega_t^+, \quad t > 0,\\
&\mathbf{v}\big|_{t=0} = \mathbf{v}_0 \ \text{ в } \ \Omega_0^- \cup \Omega_0^+, \quad \mathbf{v}\big|_{S_T} = 0 \quad (S_T = S\times(0,T)),\\
&[\mathbf{v}]\big|_{\Gamma_t} \equiv \lim_{\substack{x\to x_0\in\Gamma_t,\\ x\in\Omega_t^+}} \mathbf{v}(x) - \lim_{\substack{x\to x_0\in\Gamma_t,\\ x\in\Omega_t^-}} \mathbf{v}(x) = 0, \quad [\mathbb{T}\mathbf{n}]|_{\Gamma_t} = \sigma H\mathbf{n}.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь $\mathcal{D}_t = \partial/\partial t$, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$, $\nu^{\pm}, \rho^{\pm}$ – ступенчатые функции вязкости и плотности, соответственно, $\mathbf{v}_0$ – начальное распределение скоростей, тензор напряжений $\mathbb{T}(\mathbf{v},p) \equiv -p\mathbb{I} + \mu^{\pm}\mathbb{S}(\mathbf{v})$, где $\mathbb{S}(\mathbf{v})$ – это тензор с элементами

$$S_{ik} = \partial v_i/\partial x_k + \partial v_k/\partial x_i, \quad i,k = 1,2,3;$$

$\mu^{\pm} = \nu^{\pm}\rho^{\pm}$, $\mathbb{I}$ – единичная матрица, $\sigma > 0$ – коэффициент поверхностного натяжения, $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к Ω_t^+, $H(x,t)$ – удвоенная средняя кривизна Γ_t ($H < 0$ в точках выпуклости Γ_t в сторону Ω_t^-). Мы предполагаем, что в $\mathbb{R}^3$ введена декартовая система координат $\{x\}$. Точка означает декартово скалярное произведение.

Будем подразумевать суммирование по повторяющимся индексам от 1 до 3, если они обозначены латинскими буквами, и от 1 до 2, если греческими. Вектора и векторные пространства будем обозначать полужирным шрифтом.

Чтобы исключить перенос массы через поверхность Γ_t, мы считаем, что частицы жидкости не покидают Γ_t. Это означает, что Γ_t состоит из таких точек $x(\xi,t)$, радиус-вектор которых $\mathbf{x}(\xi,t)$ является решением задачи Коши

$$\mathcal{D}_t\mathbf{x} = \mathbf{v}(x(\xi,t)), \quad \mathbf{x}\big|_{t=0} = \boldsymbol{\xi}, \quad \xi\in\Gamma_0, \quad t > 0. \tag{1.2}$$

Значит, $\Gamma_t = \{x(\xi,t)|\ \xi\in\Gamma_0\}$, $\Omega_t^{\pm} = \{x(\xi,t)|\ \xi\in\Omega_0^{\pm}\}$.

Условие (1.2) равносильно равенству

$$V_{\mathbf{n}} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\big|_{\Gamma_t}, \tag{1.3}$$

где $V_{\mathbf{n}}$ – скорость границы Γ_t в направлении нормали к ней.

При достаточно малой начальной скорости и малом отличии начальной поверхности от сферы мы докажем однозначную разрешимость задачи (1.1), (1.2) в анизотропных пространствах Гёльдера при всех $t > 0$, при этом мы будем опираться на существование локальных по времени решений и их гёльдеровские оценки [1] и следовать схеме, предложенной одним из авторов для доказательства существования глобального решения задачи, описывающей движение одной жидкости, ограниченной свободной поверхностью [2]. Мы покажем с помощью равномерной экспоненциальной оценки решения, что скорость жидкостей стремится к нулю, давление – к ступенчатой функции, а форма капли – к шару определённого радиуса.

Итак, будем считать, что область Ω_0^+ близка к шару B_{R_0}, объём которого равен её объёму. Для удобства оценок решения введём новую функцию давления: $p_1 = p$ в Ω_t^+ и $p_1 = p+\sigma\frac{2}{R_0}$ в Ω_t^-, при этом в системе (1.1) изменится только последнее краевое условие:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_t\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} - \nu^\pm\nabla^2\mathbf{v} + \frac{1}{\rho^\pm}\nabla p_1 = 0,\\
&\nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \ \text{ в } \ \Omega_t^-\cup\Omega_t^+, \quad t>0,\\
&\mathbf{v}\big|_{t=0} = \mathbf{v}_0 \ \text{ в } \ \Omega_0^-\cup\Omega_0^+, \quad \mathbf{v}\big|_{S_T} = 0 \quad (S_T = S\times(0,T)), \qquad (1.4)\\
&[\mathbf{v}]\big|_{\Gamma_t} = 0, \quad [\mathbb{T}(\mathbf{v},p_1)\mathbf{n}]\big|_{\Gamma_t} = \sigma\Big(H + \frac{2}{R_0}\Big)\mathbf{n}.
\end{aligned}$$

Перейдём в (1.4) от эйлеровых координат к лагранжевым по формуле

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} + \int_0^t \mathbf{u}(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\tau \equiv \mathbf{X}_\mathbf{u}(\xi,t) \qquad (1.5)$$

(здесь $\mathbf{u}(\xi,t)$ – поле скоростей в лагранжевых координатах). Будем иметь в виду хорошо известное соотношение

$$H\mathbf{n} = \Delta(t)\mathbf{x} \equiv \Delta(t)\mathbf{X}_\mathbf{u}(\xi,t), \qquad (1.6)$$

где $\Delta(t)$ обозначает оператор Бельтрами–Лапласа на Γ_t. В локальных координатах s_1, s_2, введённых на поверхности Γ_0, он имеет вид:

$$\Delta(t) = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial s_\alpha}g^{\alpha\beta}\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial s_\beta} \equiv g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial s_\alpha\partial s_\beta} + h^\beta\frac{\partial}{\partial s_\beta}, \qquad (1.7)$$

где $\{g^{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1}^2$ – матрица, обратная к матрице метрического тензора $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1}^2$,

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial\mathbf{X}_\mathbf{u}(\xi(s),t)}{\partial s_\alpha}\cdot\frac{\partial\mathbf{X}_\mathbf{u}(\xi(s),t)}{\partial s_\beta}, \quad g = \det\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1}^2,$$

$$h^\beta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial s_\alpha} \big(g^{\alpha\beta}\sqrt{g}\big).$$

В результате преобразования (1.5) и проецирования последнего граничного условия в (1.4) на касательные плоскости сначала к Γ_t, а затем к Γ мы придём к задаче для $\mathbf{u}$, $q = p_1(X_{\mathbf{u}}, t)$ с заданной поверхностью $\Gamma \equiv \Gamma_0$. Если угол между $\mathbf{n}$ и внешней нормалью $\mathbf{n}_0$ к Γ острый, то полученная система эквивалентна следующей:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_t \mathbf{u} - \nu^\pm \nabla_{\mathbf{u}}^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho^\pm} \nabla_{\mathbf{u}} q = 0,\\
&\nabla_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u} = 0 \ \text{ в } \ Q_T^\pm = \Omega_0^\pm \times (0,T),\\
&\mathbf{u}\big|_{t=0} = \mathbf{v}_0 \ \text{ в } \ \Omega_0^- \cup \Omega_0^+, \quad \mathbf{u}\big|_{S_T} = 0,\\
&[\mathbf{u}]\big|_{G_T} = 0, \quad [\mu^\pm \Pi_0 \Pi \mathbb{S}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u})\mathbf{n}]\big|_{G_T} = 0 \quad (G_T \equiv \Gamma \times (0,T)),\\
&[\mathbf{n}_0 \cdot \mathbb{T}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, q)\mathbf{n}]\big|_{G_T} = \sigma\Big(H(X_n) + \frac{2}{R_0}\Big)\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Здесь мы использовали следующие обозначения: $\nabla_{\mathbf{u}} = \mathbb{A}\nabla$, $\mathbb{A}$ – матрица алгебраических дополнений A_{ij} к элементам

$$a_{ij}(\xi, t) = \delta_i^j + \int\limits_0^t \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}\, \mathrm{d}t'$$

якобиевой матрицы преобразования (1.5), δ_i^k – символ Кронекера, вектор $\mathbf{n}$ связан с $\mathbf{n}_0$ соотношением

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbb{A}\mathbf{n}_0}{|\mathbb{A}\mathbf{n}_0|}; \tag{1.9}$$

$\Pi\omega = \omega - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \omega)$, $\Pi_0\omega = \omega - \mathbf{n}_0(\mathbf{n}_0 \cdot \omega)$ – проекции вектора ω на касательные плоскости к Γ_t и к Γ, соответственно; $\mathbb{T}_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}, q) = -q\mathbb{I} + \mu^\pm \mathbb{S}_{\mathbf{u}}(\mathbf{w})$, где $\mathbb{S}_{\mathbf{u}}(\mathbf{w})$ – это тензор с элементами

$$(\mathbb{S}_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}))_{ij} = A_{ik}\partial w_j/\partial \xi_k + A_{jk}\partial w_i/\partial \xi_k.$$

Приведём ниже обозначения для функциональных пространств Гёльдера.

Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$; для $T > 0$ положим $Q_T = \Omega \times (0,T)$; наконец, пусть $\alpha \in (0,1)$. Обозначим через $C^{\alpha,\alpha/2}(Q_T)$ множество функций f, заданных в Q_T, с нормой

$$|f|_{Q_T}^{(\alpha,\alpha/2)} = |f|_{Q_T} + \langle f \rangle_{Q_T}^{(\alpha,\alpha/2)},$$

где

$$|f|_{Q_T} = \sup_{t\in(0,T)} \sup_{x\in\Omega} |f(x,t)|, \quad \langle f\rangle^{(\alpha,\alpha/2)}_{Q_T} = \langle f\rangle^{(\alpha)}_{x,Q_T} + \langle f\rangle^{(\alpha/2)}_{t,Q_T},$$

$$\langle f\rangle^{(\alpha)}_{x,Q_T} = \sup_{t\in(0,T)} \sup_{x,y\in\Omega} |f(x,t)-f(y,t)||x-y|^{-\alpha},$$

$$\langle f\rangle^{(\mu)}_{t,Q_T} = \sup_{x\in\Omega} \sup_{t,\tau\in(0,T)} |f(x,t)-f(x,\tau)||t-\tau|^{-\mu}, \quad \mu\in(0,1).$$

Введём следующие обозначения:

$$\mathcal{D}^{\mathbf{r}}_x = \partial^{|\mathbf{r}|}/\partial x_1^{r_1}\dots\partial x_n^{r_n}, \quad \mathbf{r}=(r_1,\dots r_n), \quad r_i\geqslant 0, \quad |\mathbf{r}| = r_1+\dots+r_n,$$
$$\mathcal{D}^s_t = \partial^s/\partial t^s, \quad s\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Пусть $k\in\mathbb{N}$. По определению пространство $C^{k+\alpha,(k+\alpha)/2}(Q_T)$ состоит из функций f с конечной нормой

$$|f|^{(k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2})}_{Q_T} = \sum_{|\mathbf{r}|+2s\leqslant k} |\mathcal{D}^{\mathbf{r}}_x\mathcal{D}^s_t f|_{Q_T} + \langle f\rangle^{(k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2})}_{Q_T},$$

где

$$\langle f\rangle^{(k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2})}_{Q_T} = \sum_{|\mathbf{r}|+2s=k} \langle \mathcal{D}^{\mathbf{r}}_x\mathcal{D}^s_t f\rangle^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}_{Q_T} + \sum_{|\mathbf{r}|+2s=k-1} \langle \mathcal{D}^{\mathbf{r}}_x\mathcal{D}^s_t f\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,Q_T}.$$

Определим $C^{k+\alpha}(\Omega)$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, как пространство функций $f(x)$, $x\in\Omega$, с нормой

$$|f|^{(k+\alpha)}_{\Omega} = \sum_{|\mathbf{r}|\leqslant k} |\mathcal{D}^{\mathbf{r}}_x f|_{\Omega} + \langle f\rangle^{(k+\alpha)}_{\Omega}.$$

Здесь

$$\langle f\rangle^{(k+\alpha)}_{\Omega} = \sum_{|\mathbf{r}|=k} \langle \mathcal{D}^{\mathbf{r}}_x f\rangle^{(\alpha)}_{\Omega} = \sum_{|\mathbf{r}|=k} \sup_{x,y\in\Omega} |\mathcal{D}^{\mathbf{r}}_x f(x) - \mathcal{D}^{\mathbf{r}}_y f(y)||x-y|^{-\alpha}.$$

Нам понадобится следующая полунорма с $\alpha,\gamma\in(0,1)$:

$$|f|^{(\gamma,1+\alpha)}_{Q_T} = \langle f\rangle^{(\gamma,1+\alpha)}_{Q_T} + \langle f\rangle^{(\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{t,Q_T},$$

где

$$\langle f\rangle^{(\gamma,1+\alpha)}_{Q_T} = \sup_{t,\tau\in(0,T)} \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|f(x,t)-f(y,t)-f(x,\tau)+f(y,\tau)|}{|x-y|^{\gamma}|t-\tau|^{(1+\alpha-\gamma)/2}}.$$

Известна оценка

$$\langle f\rangle^{(\gamma,1+\alpha)}_{Q_T} \leqslant c_1\langle f\rangle^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{Q_T}.$$

Будем считать, что $f \in C^{(\gamma,1+\alpha)}(Q_T)$, если
$$|f|^{(\gamma,1+\alpha)}_{Q_T} < \infty.$$

Наконец, если функция f имеет конечную норму
$$|f|^{(\gamma,\mu)}_{Q_T} \equiv \langle f\rangle^{(\gamma)}_{x,Q_T} + |f|^{(\mu)}_{t,Q_T}, \quad \gamma \in (0,1), \quad \mu \in [0,1),$$
где
$$|f|^{(\mu)}_{t,Q_T} = \begin{cases} |f|_{Q_T} + \langle f\rangle^{(\mu)}_{t,Q_T}, & \text{если} \quad \mu > 0, \\ |f|_{Q_T}, & \text{если} \quad \mu = 0, \end{cases}$$
мы полагаем, что она принадлежит гёльдеровскому пространству $C^{\gamma,\mu}(Q_T)$.

Мы считаем, что векторнозначная функция является элементом гёльдеровского пространства, если все её компоненты принадлежат этому пространству, и её норма определяется как максимум норм её компонент. Это же касается и тензорных функций.

Вернёмся к задаче (1.8). В случае отсутствия границы S и члена $\sigma\frac{2}{R_0}\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}$ в последнем краевом условии для неё была доказана теорема существования и единственности на конечном промежутке времени, размер которого определяют норма $\mathbf{v}_0$ и кривизна поверхности Γ ([1, теорема 1.3]). Этот результат был получен в гёльдеровских пространствах со степенным весом на бесконечности. Поскольку вышеупомянутые весовые пространства эквивалентны обычным гёльдеровским пространствам в ограниченных областях, то разрешимость задачи (1.8) может быть доказана совершенно так же, как и существование решения аналогичной задачи в бесконечной области. Для оценок вблизи внешней границы нужно использовать теорему о разрешимости задачи Дирихле для системы Стокса в полупространстве [3]. Член $\sigma\frac{2}{R_0}\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}$ в последнем краевом условии является слабым по отношению к левой части равенства, поэтому несложно видеть, что упомянутая выше теорема 1.3 из [1] остается в силе и при наличии этого члена.

Приведём формулировку полученной теоремы.

Пусть $T \in (0,\infty]$, $t,\tau > 0$. Положим:
$$D_{ST} = Q^-_T \cup Q^+_T, \quad Q^\pm_T = \Omega^\pm_0 \times (0,T), \quad Q^\pm_{(t,t+\tau)} = \Omega^\pm_t \times (t,t+\tau).$$
Будем считать, кроме того, что
$$|f|^{(k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2})}_{D_{ST}} \equiv |f|^{(k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2})}_{Q^-_T} + |f|^{(k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2})}_{Q^+_T},$$
$$|f|^{(k+\alpha)}_{\cup\Omega^\pm} \equiv |f|^{(k+\alpha)}_{\Omega^-} + |f|^{(k+\alpha)}_{\Omega^+}.$$

Теорема 1.1. *Предположим, что* $\Gamma \in C^{3+\alpha}$, $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{C}^{2+\alpha}(\Omega_0^- \cup \Omega_0^+)$, $\sigma \in C^{3+\alpha}(\mathbb{R}_+)$, $\sigma > 0$, $S \in C^{2+\alpha}$ *с некоторым* $\alpha \in (0,1)$, $T < \infty$. *Кроме того, пусть выполнены условия согласования*

$$\begin{gathered}\nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0, \quad \mathbf{v}_0\big|_S = 0, \quad [\mathbf{v}_0]\big|_\Gamma = 0,\\ [\mu^\pm \Pi_0 \mathbb{S}(\mathbf{v}_0)\mathbf{n}_0]\big|_\Gamma = 0, \quad \Big[\Pi_0\Big(\nu^\pm \nabla^2 \mathbf{v}_0 - \frac{1}{\rho^\pm}\nabla q_0\Big)\Big]\Big|_\Gamma = 0,\\ \Big(\Pi_S\Big(\nu^- \nabla^2 \mathbf{v}_0 - \frac{1}{\rho^-}\nabla q_0\Big)\Big)\Big|_S = 0,\end{gathered} \tag{1.10}$$

где $q_0(\xi) \equiv q(\xi, 0)$ *– решение задачи дифракции*

$$\begin{gathered}\frac{1}{\rho^\pm}\nabla^2 q_0(\xi) = -\nabla \cdot \mathcal{D}_t \mathbb{B}^T\big|_{t=0}\mathbf{v}_0(\xi), \quad \xi \in \Omega_0^- \cup \Omega_0^+,\\ [q_0]\big|_\Gamma = \Big[2\mu^\pm \frac{\partial \mathbf{v_0}}{\partial \mathbf{n}_0} \cdot \mathbf{n}_0\Big]\Big|_\Gamma - \sigma\Big(H_0(\xi) + \frac{2}{R_0}\Big), \quad \xi \in \Gamma,\\ \Big[\frac{1}{\rho^\pm}\frac{\partial q_0}{\partial \mathbf{n}_0}\Big]\Big|_\Gamma = [\nu^\pm \mathbf{n}_0 \cdot \nabla^2 \mathbf{v}_0]\big|_\Gamma \quad \Big(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_0} = \mathbf{n}_0 \cdot \nabla\Big),\\ \frac{1}{\rho^-}\frac{\partial q_0}{\partial \mathbf{n}_S}\Big|_S = \nu^- \mathbf{n}_S \cdot \nabla^2 \mathbf{v}_0\big|_S \quad \Big(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_S} = \mathbf{n_S} \cdot \nabla\Big).\end{gathered} \tag{1.11}$$

Здесь $H_0(\xi) = \mathbf{n}_0 \cdot \Delta(0)\xi\big|_\Gamma$ *– удвоенная средняя кривизна* Γ; $\mathbb{B} = \mathbb{A} - \mathbb{I}$, $\mathbb{B}^T$ *– матрица, транспонированная к* $\mathbb{B}$, $\mathbf{n_S}$ *– внешняя нормаль к* S, $\Pi_S \boldsymbol{\omega} \equiv \boldsymbol{\omega} - \mathbf{n}_S(\mathbf{n}_S \cdot \boldsymbol{\omega})$.

Тогда существует положительное число $T_0 \leqslant T$ *такое, что задача* (1.8) *имеет единственное решение* $(\mathbf{u}, q)$ *с дифференциальными свойствами:* $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(D_{ST_0})$, $q \in C^{(\gamma, 1+\alpha)}(D_{ST_0})$ $(\gamma \leqslant \alpha)$, $\nabla q \in \mathbf{C}^{\alpha, \alpha/2}(D_{ST_0})$, *и для него верно неравенство*

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}|^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{D_{ST_0}} + |\nabla q|^{(\alpha,\alpha/2)}_{D_{ST_0}} + |q|^{(\gamma,1+\alpha)}_{D_{ST_0}}\\ \leqslant c\Big\{|\mathbf{v}_0|^{(2+\alpha)}_{\cup\Omega_0^\pm} + \Big|H_0 + \frac{2}{R_0}\Big|^{(1+\alpha)}_\Gamma\Big\}.\end{aligned} \tag{1.12}$$

Значение T_0 *зависит от норм заданных функций, от кривизны* Γ *и от расстояния между* Γ *и* S, *причём* T_0 *неограниченно возрастает, когда нормы правых частей стремятся к нулю, а начальная поверхность* Γ *– к сфере радиуса* R_0.

Замечание 1.1. Хотя в формулировке теоремы в [1] оценка (1.12) отсутствует, но из доказательства нетрудно видеть, что она следует в пределе из оценок решений линеаризованных задач типа (3.1). При выводе (1.12) используется оценка решения линейной задачи, соответствующей (1.4). Эта оценка получена в работе [4].

Результат аналогичный теореме 1.1 в пространствах Соболева–Слободецкого тоже имеет место: так же, как и для гёльдеровских пространств, его несложно получить по аналогии с доказательством о локальной разрешимости задачи в бесконечной области (см. [5, 6] или [7]). Глобальную по времени разрешимость в соболевских пространствах этой задачи исследовал Н. Танака [8], причём он считал жидкости неоднородными. Безусловно, глобальная теорема существования справедлива в этих пространствах, однако следует заметить, что изложение доказательства в [8] не очень убедительно. Ссылка на локальную разрешимость задачи дана как частный случай задачи термокапиллярной конвекции [9], где доказательства тоже носят конспективный характер, при этом не рассмотрены необходимые слабые нормы давления. Автор следит за положением общего центра тяжести двух жидкостей, тогда, как нам кажется, более логичным было бы контролировать положение центра масс внутренней жидкости. Мы считаем необходимым оценить его предельное положение, чтобы исключить возможность пересечения внутренней границы раздела жидкостей с внешней поверхностью. В случае гёльдеровских пространств это будет сделано с помощью экспоненциальной оценки решения через начальные данные. Мы уверены, что аналогичная оценка есть и в соболевских классах функций.

Следующая теорема даёт существование глобального решения системы (1.4), (1.2). Это основной результат данной работы.

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1 *с* $q_0 = p_1(x, 0)$ *и при* $t = 0$ $\Gamma \in C^{3+\alpha}$ *задаётся уравнением*

$$|x| = R\left(\frac{x}{|x|}, 0\right)$$

на единичной сфере S_1. *Предположим, кроме того, что начальные данные достаточно малы, т.е.*

$$|\mathbf{v}_0|^{(2+\alpha)}_{\cup\Omega_0^\pm} + |r_0|^{(3+\alpha)}_{S_1} \leqslant \varepsilon \ll 1, \tag{1.13}$$

где $r_0(x/|x|) = R(x/|x|, 0) - R_0$, R_0 *– радиус шара* B_{R_0}: $|\Omega_0^+| = 4\pi R_0^3/3$.

Тогда задача (1.4), (1.2) *однозначно разрешима на всей положительной полуоси* $t > 0$, *а решение* $(\mathbf{v}, p_1)$ *обладает свойствами:* $\mathbf{v} \in$

$\mathbf{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}$, $p_1 \in C^{(\gamma,1+\alpha)}$, $\nabla p_1 \in \mathbf{C}^{\alpha,\alpha/2}$, при этом граница Γ_t задаётся при каждом t функцией $R(\cdot,t)$ класса $C^{3+\alpha}$:

$$|x-h(t)| = R\left(\frac{x-h}{|x-h|}, t\right)$$

(где $h(t)$ – положение центра тяжести Ω_t^+ в момент времени t), и стремится к сфере радиуса R_0 с центром в некоторой точке h_∞, а давление определяется с точностью до ограниченной функции времени. Это означает, что при любом $t_0 \in (0,\infty)$ решение $(\mathbf{u},q)$ и его производные в лагранжевых координатах лежат в соответствующих пространствах от $D_{(t_0,t_0+\tau)} \equiv \cup Q^{\pm}_{(t_0,t_0+\tau)}$ для достаточно малого временного интервала $(t_0,t_0+\tau)$. Помимо того, имеет место оценка

$$|\mathbf{u}|^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{D_{(t_0,t_0+\tau)}} + |\nabla q|^{(\alpha,\alpha/2)}_{D_{(t_0,t_0+\tau)}} + |q|^{(\gamma,1+\alpha)}_{D_{(t_0,t_0+\tau)}} + \sup_{t\in(t_0,t_0+\tau)} |r(\cdot,t)|^{(3+\alpha)}_{S_1}$$
$$\leqslant c\mathrm{e}^{-\mathrm{b}t_0}\big\{|\mathbf{v}_0|^{(2+\alpha)}_{\cup\Omega_0^{\pm}} + |r_0|^{(3+\alpha)}_{\mathrm{S}_1}\big\}, \tag{1.14}$$

где $r(\omega,t) = R(\omega,t) - R_0$, $\omega \in S_1$.

Из этой теоремы следует вывод об единственности тривиального решения в случае, когда отсутствует начальная скорость, а начальная поверхность раздела жидкостей совпадает со сферой. Имеет место и устойчивость этого решения в том смысле, что при малых отклонениях начальных данных от нулевых решение будет мало отличаться от нуля. Тем не менее центр предельной сферы $S_{R_0}(h_\infty)$ может быть смещён относительно исходного центра тяжести Ω_0^+ даже при сколь угодно малых начальных скоростях $\mathbf{v}_0$. Это смещение характеризует неравенство (4.27) в конце работы. Там же приводится необходимая оценка сверху начального расстояния между внешней поверхностью и границей раздела жидкостей.

Отметим также, что глобальная разрешимость задачи о движении двух жидкостей без учёта поверхностного натяжения была получена одним из авторов в [10].

§2. Энергетическая оценка решения

Цель этого параграфа – доказать энергетическую оценку решения нелинейной задачи (1.4), (1.2) в L_2, используя понятие обобщённой энергии $\mathcal{E}$, введённой в [13, 14].

Допустим, что мы уже знаем решение на интервале $[0,T]$. (Его существование гарантирует теорема 1.1.) Тогда у нас есть и траектория движения центра тяжести капли Ω_t^+: $\mathbf{h}(t) = \frac{1}{|\Omega_t^+|}\int\limits_{\Omega_t^+} \mathbf{x}\,\mathrm{d}x$.

Обозначим через $r(\omega,t)$ функцию отклонения поверхности Γ_t от сферы $S_{R_0}(t) \equiv S_{R_0}(h(t)) = \{|x-h(t)| = R_0\}$. Из несжимаемости рассматриваемых жидкостей следует, что области $\Omega_t^\pm$ сохраняют свой объём при всех $t > 0$:

$$\int_{S_1} \left(R^3 - R_0^3\right) \mathrm{d}\omega = 0.$$

Отсюда следует равенство

$$\int\limits_{S_1} r\,\mathrm{d}\omega = -\frac{1}{R_0}\int\limits_{S_1} r^2\,\mathrm{d}\omega - \frac{1}{3R_0^2}\int\limits_{S_1} r^3\,\mathrm{d}\omega, \tag{2.1}$$

которое мы будем в последствии использовать.

Допустим, без ограничения общности, что в начальный момент центр тяжести внутренней жидкости совпадает с началом координат: $\mathbf{h}(0) = 0$. Пусть, кроме того, Γ описывается уравнением

$$x = y + \mathbf{N}(y) r_0\left(\frac{y}{|y|}\right), \quad y \in S_{R_0}. \tag{2.2}$$

(Под $\mathbf{N}(y)$ мы подразумеваем внешнюю нормаль к $S_{R_0} = \{|y| = R_0\}$, т.е. $\mathbf{N}(y) = \mathbf{y}/|y|$.) Мы будем считать, что и при $0 < t \leqslant T$ Γ_t может быть задана как

$$x = y + \mathbf{N}(y) r\left(\frac{y}{|y|}, t\right) + \mathbf{h}(t), \quad y \in S_{R_0}. \tag{2.3}$$

Уравнения (2.2) и (2.3) равносильны двум равенствам

$$|x| = R_0 + r_0\left(\frac{x}{|x|}\right) \ \text{ и } \ |x-h(t)| = R_0 + r\left(\frac{x-h}{|x-h|}, t\right),$$

соответственно.

Согласно кинематическому условию (1.3) имеем:

$$\mathcal{D}_t x \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|_{\Gamma_t}.$$

Следовательно,

$$\begin{gathered} n_{0N}(y)\mathcal{D}_t r\big|_{t=0} = \mathbf{v}_0\cdot\mathbf{n}_0 - \mathbf{h}_t'(0)\cdot\mathbf{n}_0, \\ n_N(y)\mathcal{D}_t r = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} - \mathbf{h}_t'\cdot\mathbf{n}, \quad y \in S_{R_0}, \end{gathered} \tag{2.4}$$

где $n_{0N} = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{N}$ – это радиальная компонента $\mathbf{n}_0$ в координатной системе с центром в 0, а $n_N = \mathbf{n} \cdot \mathbf{N}$ – это радиальная компонента $\mathbf{n}$ в координатной системе с центром в h. Напомним, что

$$\mathbf{h}_t'(t) = |\Omega_t^+|^{-1} \int\limits_{\Omega_t^+} \mathbf{v}(x,t)\,\mathrm{d}x. \tag{2.5}$$

Заметим, что в координатах $\{y\}$ центр тяжести Ω_t^+ всегда находится в нуле, поэтому

$$\int\limits_{S_1} (R^4 - R_0^4)\omega_i\,\mathrm{d}\omega = 0, \tag{2.6}$$

где $\omega_i = y_i/|y|$.

Пусть теперь $\Omega = \Omega_0^- \cup \overline{\Omega_0^+} \equiv \Omega_t^- \cup \overline{\Omega_t^+}$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $T \in (0,\infty)$. Будем обозначать через $\|\cdot\|_{2,\Omega}$ норму $\|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$.

Предложение 2.1. *Предположим, что классическое решение задачи* (1.4), (1.2) *определено на* $[0,T]$ *и* $\mathbf{v}_0$ *удовлетворяет условиям согласования* (1.10). *Кроме того, пусть* r *таково, что*

$$|r(\omega,t)|_{S_1\times(0,T)} + |\nabla_{S_1} r(\omega,t)|_{S_1\times(0,T)} \leqslant \delta_1 R_0 \ll 1. \tag{2.7}$$

Тогда для любого $t \in (0,T]$

$$\|\mathbf{v}(\cdot,t)\|_{2,\Omega}^2 + \|r(\cdot,t)\|_{W_2^1(S_1)}^2 \leqslant c\mathrm{e}^{-2bt}\Big\{\|\mathbf{v}_0\|_{2,\Omega}^2 + \|r_0\|_{W_2^1(S_1)}^2\Big\}, \tag{2.8}$$

$$\int\limits_0^T \big(\|\mathbf{v}(\cdot,\tau)\|_{2,\Omega} + \|r(\cdot,t)\|_{W_2^1(S_1)}\big)\,\mathrm{d}\tau \leqslant c\Big\{\|\mathbf{v}_0\|_{2,\Omega} + \|r_0\|_{W_2^1(S_1)}\Big\}, \tag{2.9}$$

где постоянные b *и* c *не зависят от* T.

Доказательство. Умножим первое уравнение в (1.4) на $\rho^\pm \mathbf{v}$ и проинтегрируем по частям по $\Omega_t^- \cup \Omega_t^+$. Тогда получим

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\rho^\pm \mathbf{v}\|_{2,\Omega}^2 + \frac{\mu^+}{2}\|\mathbb{S}(\mathbf{v})\|_{2,\Omega_t^+}^2 + \frac{\mu^-}{2}\|\mathbb{S}(\mathbf{v})\|_{2,\Omega_t^-}^2 = \sigma \int\limits_{\Gamma_t} \Big(H + \frac{2}{R_0}\Big)\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}\Gamma.$$

Воспользуемся формулой (1.6) и учтём, что $\int\limits_{\Gamma_t} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\Gamma = 0$, тогда интеграл в правой части примет вид: $\sigma \int\limits_{\Gamma_t} \mathbf{v}\cdot\Delta(t)\mathbf{x}\,\mathrm{d}\Gamma$. В [11, стр. 148] было показано, что этот интеграл равен $-\sigma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\Gamma_t|$. Поэтому мы можем записать:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big\{\frac{1}{2}\|\rho^{\pm}\mathbf{v}\|^2_{2,\Omega}+\sigma\big(|\Gamma_t|-4\pi R_0^2\big)\Big\}+\frac{\mu^+}{2}\|\mathbb{S}(\mathbf{v})\|^2_{2,\Omega_t^+}+\frac{\mu^-}{2}\|\mathbb{S}(\mathbf{v})\|^2_{2,\Omega_t^-}=0.$$

Поскольку $\mathbf{v}\big|_S=0$, то для $\mathbf{v}$ в Ω верно неравенство Корна

$$\|\mathbf{v}\|_{W_2^1(\Omega)}\leqslant c_0\|\mathbb{S}(\mathbf{v})\|_{2,\Omega}, \tag{2.10}$$

при этом $\|\mathbf{v}\|_{W_2^1(\Omega)}$ совпадает с $\|\mathbf{v}\|_{W_2^1(\Omega_t^-\cup\Omega_t^+)}$ вследствие того, что $[\mathbf{v}]\big|_{\Gamma_t}=0$. Следовательно,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big\{\frac{1}{2}\|\rho^{\pm}\mathbf{v}\|^2_{2,\Omega}+\sigma\big(|\Gamma_t|-4\pi R_0^2\big)\Big\}+c_1\|\mathbf{v}\|^2_{W_2^1(\Omega)}\leqslant 0. \tag{2.11}$$

Чтобы воспользоваться леммой Гронуолла для уже упомянутой обобщённой энергии, нужно постараться добавить в полученное неравенство член типа $|\Gamma_t|-4\pi R_0^2$. С этой целью мы построим вспомогательную соленоидальную вектор-функцию $\mathbf{W}(x,t)$, $x\in\Omega$.

Пусть функция $f_0(z)$ задана на сфере S_{R_0} и $\int\limits_{S_{R_0}} f_0\,\mathrm{d}S=0$. Определим $\mathbf{W}_0(z)$ как соленоидальное векторное поле во всём пространстве $\mathbb{R}^3$, такое, что $\mathbf{W}_0\big|_{S_{R_0}}=\mathbf{N}f_0(z)$. Будем считать, что $\operatorname{supp}\mathbf{W}_0$ содержится в шаре $B_{R_0+a}=\{|y|\leqslant R_0+a\}$, при этом a выбрано не очень большим. Кроме того,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{W}_0\|_{W_2^1(\mathbb{R}^3)}&\leqslant c\|f_0\|_{W_2^{1/2}(S_{R_0})},\\ \|\mathbf{W}_0\|_{2,\mathbb{R}^3}&\leqslant c\|f_0\|_{2,S_{R_0}},\end{aligned} \tag{2.12}$$

и если $f_0=f_0(z,t)$, то

$$\|\mathcal{D}_t\mathbf{W}_0\|_{2,\mathbb{R}^3}\leqslant c\|\mathcal{D}_t f_0\|_{2,S_{R_0}}. \tag{2.13}$$

Такое $\mathbf{W}_0$ можно построить (см., например, [15], гл. I).

Далее, положим

$$f_0(y,t)=\widetilde{r}(y,t)\equiv r(y,t)-\overline{r}(t).$$

Здесь $\overline{r}(t)=\frac{1}{4\pi R_0^2}\int\limits_{S_{R_0}} r(y,t)\,\mathrm{d}S_{R_0}$. Для достаточно малых a и $\mathbf{h}$ векторное поле $\mathbf{W}_0$ исчезает вблизи S при всех $t\leqslant T$.

Сделаем следующее преобразование координат

$$x=y+\mathbf{N}^*(y)r^*(y,t)+\mathbf{h}(t)=e_r(y,t),\quad y\in\Omega,$$

где $\mathbf{N}^*$ – продолжение $\mathbf{N}$ на Ω, $r^*(y,t)$ – продолжение $\widetilde{r}(y)$ с носителем в a–окрестности S_{R_0}, при этом S_{R_0} переходит в Γ_t и $r^*=0$ вблизи S. Заметим, что при достаточно малых $r^*(y,t)$ и $\mathbf{h}$ это преобразование обратимо, и мы можем определить векторное поле $\mathbf{W}$ как

$$\mathbf{W}(x,t)=\frac{\mathcal{L}(y,t)}{L(y,t)}\mathbf{W}_0(y,t)\big|_{y=e_r^{-1}(x)}.$$

Здесь $\mathcal{L}$ – это матрица Якоби преобразования e_r:

$$\mathcal{L}(y,t)=\Big\{\frac{\partial e_r(y,t)}{\partial y}\Big\}=\Big\{\delta^i_j+\frac{\partial(N_i^*r^*)}{\partial y_j}\Big\}^3_{i,j=1},$$

а $L=\det\mathcal{L}$. Пусть $\widehat{\mathcal{L}}$ – взаимная матрица, т. е. $\widehat{\mathcal{L}}(y,t)=L\mathcal{L}^{-1}(y,t)$.

Поле $\mathbf{W}$ соленоидально как функция x. Действительно,

$$\nabla_x\cdot\mathbf{W}=\mathcal{L}^{-1T}\nabla_y\cdot\mathbf{W}=L^{-1}\nabla_y\cdot(\widehat{\mathcal{L}}\mathbf{W})=L^{-1}\nabla_y\cdot\widehat{\mathcal{L}}\frac{\mathcal{L}}{L}\mathbf{W}_0=0$$

ввиду тождества $\nabla_y\cdot\widehat{\mathcal{L}}=0$, верного для любой матрицы, взаимной к матрице Якоби некоторого преобразования. Кроме того, $\mathbf{W}(x,t)=0$ при $x\in S$ и

$$\mathbf{W}\cdot\mathbf{n}\big|_{\Gamma_t}=\mathbf{W}\cdot\frac{\widehat{\mathcal{L}}^T\mathbf{N}}{|\widehat{\mathcal{L}}^T\mathbf{N}|}=\frac{\mathbf{W}_0\cdot\mathbf{N}}{|\widehat{\mathcal{L}}^T\mathbf{N}|}=\frac{\widetilde{r}}{|\widehat{\mathcal{L}}^T\mathbf{N}|}\Big|_{y=e_r^{-1}(x)}. \tag{2.14}$$

Из (2.12), (2.13) вытекают оценки:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{W}(\cdot,t)\|_{W_2^1(\Omega)}&\leqslant c\|\mathbf{W}_0(\cdot,t)\|_{W_2^1(B_{R_0+a})}\\&\leqslant c\|r(\cdot,t)\|_{W_2^{1/2}(S_{R_0})},\\\|\mathbf{W}(\cdot,t)\|_{2,\Omega}&\leqslant c\|r(\cdot,t)\|_{2,S_{R_0}},\end{aligned}\tag{2.15}$$

а поскольку

$$\mathcal{D}_t\mathbf{W}(e_r(y,t),t)=\mathcal{D}_t\mathbf{W}(x,t)\big|_{x=e_r(y,t)}+\nabla\mathbf{W}(x,t)\big|_{x=e_r(y,t)}(\mathbf{N}^*\mathcal{D}_tr^*),$$

$$\mathcal{D}_t\mathbf{W}(e_r(y,t),t)=L^{-1}\mathcal{L}\mathcal{D}_t\mathbf{W}_0(y,t)+\mathcal{D}_t\big(L^{-1}\mathcal{L}\big)\mathbf{W}_0(y,t),$$

то

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{D}_t\mathbf{W}(\cdot,t)\|_{2,\Omega}\leqslant c\Big(\sup_{\mathbb{R}^3}|L^{-1}\mathcal{L}|\|\mathcal{D}_t\mathbf{W}_0(\cdot,t)\|_{2,\mathbb{R}^3}\\&+\sup_{\mathbb{R}^3}|\mathcal{D}_t(L^{-1}\mathcal{L})|\|\mathbf{W}_0(\cdot,t)\|_{2,\mathbb{R}^3}+\sup_{\mathbb{R}^3}|\mathcal{D}_t(\mathbf{N}^*r^*)|\|\nabla\mathbf{W}_0\|_{2,\mathbb{R}^3}\Big)\\&\leqslant c\Big(\|\mathcal{D}_tr(\cdot,t)\|_{2,S_1}+\|r(\cdot,t)\|_{W_2^{1/2}(S_1)}\Big).\end{aligned}\tag{2.16}$$

В силу того, что $\mathcal{L}$ зависит от $\nabla_{S_1} r$, постоянные c в неравенствах (2.15) зависят от $|\nabla_{S_1} r|_{S_1}$, а в (2.16) – и от $|\mathcal{D}_t r|_{S_1}$, $|\mathcal{D}_t \nabla_{S_1} r|_{S_1}$. Производную от r по времени можно оценить из условия на подвижной границе Γ_t (2.4):

$$\mathcal{D}_t r = \frac{1}{n_N}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} - \mathbf{h}'_t(t)\cdot\mathbf{n}), \quad \mathbf{n} = \frac{\widehat{\mathcal{L}}^T\mathbf{N}}{|\widehat{\mathcal{L}}^T\mathbf{N}|},$$

так что

$$|\mathcal{D}_t r|_{S_1} \leqslant c|\mathbf{v}|_{\Omega}, \quad |\mathcal{D}_t \nabla_{S_1} r|_{S_1} \leqslant c|\mathbf{v}|^{(1)}_{\cup\Omega_t^\pm}.$$

Кроме того,

$$\|\mathcal{D}_t r(\cdot,t)\|_{2,S_1} \leqslant c\big(\|\mathbf{v}\|_{2,\Gamma_t} + \|\mathbf{v}\|_{2,\Omega_t^+}\big).$$

Значит, (2.16) можно продолжить следующим образом:

$$\|\mathcal{D}_t \mathbf{W}(\cdot,t)\|_{2,\Omega} \leqslant c(|\mathbf{v}|^{(1)}_{\cup\Omega_t^\pm})\big\{\|\mathbf{v}\|_{W_2^1(\Omega)} + \|r\|_{W_2^{1/2}(S_1)}\big\}. \tag{2.17}$$

Теперь домножим первое уравнение в (1.4) на $\rho^\pm\mathbf{W}$ и проинтегрируем по частям по $\Omega_t^- \cup \Omega_t^+$:

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_\Omega \rho^\pm \mathbf{v}\cdot\mathbf{W}\,\mathrm{d}x + \int\limits_\Omega \rho^\pm\mathbf{v}\cdot(\mathcal{D}_t\mathbf{W} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{W})\,\mathrm{d}x \\ + \int\limits_\Omega \frac{\mu^\pm}{2}\mathbb{S}(\mathbf{v}):\mathbb{S}(\mathbf{W})\,\mathrm{d}x - \sigma\int\limits_{\Gamma_t}\big(H + \frac{2}{R_0}\big)\mathbf{n}\cdot\mathbf{W}\,\mathrm{d}\Gamma = 0,\end{gathered} \tag{2.18}$$

где $\mathbb{S}(\mathbf{v}):\mathbb{S}(\mathbf{W}) = S_{ij}(\mathbf{v})S_{ij}(\mathbf{W})$. Сложим равенство (2.18), умноженное на малый множитель γ, с (2.11). Воспользовавшись (2.14) и неравенством Корна (2.10), получим

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big\{\frac{1}{2}\|\rho^\pm\mathbf{v}\|^2_{2,\Omega} + \gamma\int\limits_\Omega\rho^\pm\mathbf{v}\cdot\mathbf{W}\,\mathrm{d}x + \sigma\big(|\Gamma_t| - 4\pi R_0^2\big)\Big\} + c_1\|\mathbf{v}\|^2_{W_2^1(\Omega)} \\ -\gamma\int\limits_\Omega \rho^\pm\mathbf{v}\cdot(\mathcal{D}_t\mathbf{W} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{W})\,\mathrm{d}x + \gamma\int\limits_\Omega\frac{\mu^\pm}{2}\mathbb{S}(\mathbf{v}):\mathbb{S}(\mathbf{W})\,\mathrm{d}x \\ -\gamma\sigma\int\limits_{S_{R_0}}\Big(H + \frac{2}{R_0}\Big)\widetilde{r}\,\mathrm{d}S_{R_0} \leqslant 0.\end{gathered} \tag{2.19}$$

(Здесь мы использовали равенство $\mathrm{d}\Gamma(x) = |\widehat{\mathcal{L}}^T\mathbf{N}|\,\mathrm{d}S_{R_0}(y)$, [14, с. 227].) При достаточно малом γ под знаком производной стоит положительное выражение, которое можно назвать обобщённой энергией $\mathcal{E}(t)$.

Действительно, по теореме 3 из [11] при условиях (2.1), (2.6), (2.7) верно неравенство

$$E_1(R,R_0) \equiv |\Gamma_t| - 4\pi R_0^2 \geqslant c_2 \|r\|^2_{W_2^1(S_1)}, \tag{2.20}$$

где константа c_2 не зависит ни от δ_1, ни от R_0.

Далее, будем исходить из формулы

$$E_1(R,R_0) = \int\limits_{S_1} \Big(R\sqrt{R^2 + |\nabla_{S_1} R|^2} - R_0^2 \Big)\,\mathrm{d}\omega.$$

Используя разложение $E_1(R,R_0)$ в ряд Тейлора в точке R_0 и равенство

$$\begin{gathered}\int\limits_{S_1} r\omega_i\,\mathrm{d}\omega = -\frac{3}{2R_0}\int\limits_{S_1} r^2\omega_i\,\mathrm{d}\omega - \frac{1}{R_0^2}\int\limits_{S_1} r^3\omega_i\,\mathrm{d}\omega \\ -\frac{1}{4R_0^3}\int\limits_{S_1} r^4\omega_i\,\mathrm{d}\omega,\ i=1,2,3,\end{gathered} \tag{2.21}$$

которое следует из (2.6) ввиду формул сокращённого умножения, можно показать, что

$$E_1(R,R_0) = \int\limits_{S_1} r^2\,\mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}\int\limits_{S_1} |\nabla_{S_1} r|^2\,\mathrm{d}\omega - \frac{2}{3R_0}\int\limits_{S_1} r^3\,\mathrm{d}\omega + I,$$

где I – интеграл от остаточного члена в ряде Тейлора. Он тоже будет зависеть только от r и ∇r и будет мал относительно других членов (см. [11, стр. 142]). Поэтому мы будем писать $E_1(r) \equiv E_1(R,R_0)$. При условии (2.7)

$$E_1(r) \leqslant c_3 \|r\|^2_{W_2^1(S_1)}. \tag{2.22}$$

Покажем теперь, что также положительно определён и поверхностный интеграл

$$E_2(r) \equiv -\int\limits_{S_{R_0}} \Big(H + \frac{2}{R_0}\Big)\widetilde{r}\,\mathrm{d}S_{R_0}.$$

Для этого воспользуемся известной формулой

$$H[R] = \frac{1}{R}\nabla_{S_1}\cdot\frac{\nabla_{S_1} R}{\sqrt{g}} - \frac{2}{\sqrt{g}}, \tag{2.23}$$

где

$$g = R^2 + |\nabla_{S_1} R|^2, \quad \nabla_{S_1} R = R'_\theta e_\theta + \frac{1}{\sin\theta} R'_\varphi e_\varphi,$$
$$\nabla_{S_1} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta u_\theta) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}$$

в сферических координатах. При оценке $E_2(r)$ учтём, что $\nabla_{S_1} R = \nabla_{S_1} r$ и

$$\int\limits_{S_1} \nabla_{S_1} \cdot \frac{\nabla_{S_1} R}{\sqrt{g}}\, \mathrm{d}\omega = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} -R_0^2 \int\limits_{S_1} \frac{\widetilde{r}}{R} \nabla_{S_1} \cdot \frac{\nabla_{S_1} R}{\sqrt{g}}\, \mathrm{d}\omega &= -R_0^2 (R_0 + \overline{r}) \int\limits_{S_1} \nabla_{S_1} \left(\frac{1}{R}\right) \cdot \frac{\nabla_{S_1} R}{\sqrt{g}}\, \mathrm{d}\omega \\ &= R_0^2 (R_0 + \overline{r}) \int\limits_{S_1} \frac{|\nabla_{S_1} r|^2}{R^2 \sqrt{g}}\, \mathrm{d}\omega \\ &\geqslant \int\limits_{S_1} |\nabla_{S_1} r|^2\, \mathrm{d}\omega - \delta_1 c \int\limits_{S_1} \big(|\nabla_{S_1} r|^2 + r^2\big)\, \mathrm{d}\omega. \end{aligned}$$

А так как

$$\frac{2}{R_0} - \frac{2}{\sqrt{g}} = -\frac{2\big(r(R + R_0) + |\nabla_{S_1} r|^2\big)}{R_0\big(R^2 + |\nabla_{S_1} r|^2 + R_0\sqrt{g}\big)},$$

то, используя (2.1), нетрудно показать, что при условии (2.7)

$$2R_0^2 \left| \int\limits_{S_1} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} - \frac{1}{R_0}\right) \widetilde{r}\, \mathrm{d}\omega \right| \leqslant 2 \int\limits_{S_1} r^2\, \mathrm{d}\omega + \delta_1 c \int\limits_{S_1} \big(|\nabla_{S_1} r|^2 + r^2\big)\, \mathrm{d}\omega,$$

и, следовательно,

$$E_2(r) \geqslant E_0(r) - \delta_1 c \|r\|^2_{W_2^1(S_1)}, \qquad (2.24)$$

где $E_0(r) = \int\limits_{S_1} (|\nabla_{S_1} r|^2 - 2r^2)\, \mathrm{d}\omega$

Лемма 2.5 из [12] даёт нам оценку

$$E_0(r) \geqslant \frac{4}{7}\int\limits_{S_1}(|\nabla_{S_1} r|^2 + r^2)\,\mathrm{d}\omega - \frac{9}{14\pi}\Bigl(\int\limits_{S_1} r\,\mathrm{d}\omega\Bigr)^2 - \frac{9}{7\pi}\Bigl(\int\limits_{S_1} r\omega_i\,\mathrm{d}\omega\Bigr)^2. \tag{2.25}$$

Второй интеграл в правой части оценим с учётом равенства (2.1), используя (2.7):

$$\begin{aligned} \frac{9}{14\pi}\Bigl(\int\limits_{S_1} r\,\mathrm{d}\omega\Bigr)^2 &\leqslant \frac{c\delta_1^2 R_0^2}{R_0^2}\int\limits_{S_1} r^2\,\mathrm{d}\omega + \frac{c\delta_1^4 R_0^4}{R_0^4}\int\limits_{S_1} r^2\,\mathrm{d}\omega \\ &\leqslant c\delta_1\int\limits_{S_1} r^2\,\mathrm{d}\omega. \end{aligned}$$

Третий интеграл в правой части (2.25) можно оценить аналогичным образом, принимая во внимание равенство (2.21). Он тоже будет мал при малом δ_1. Значит,

$$E_0(r) \geqslant c\int\limits_{S_1}(|\nabla_{S_1} r|^2 + r^2)\,\mathrm{d}\omega,$$

откуда в совокупности с (2.24) вытекает аналогичная оценка для $E_2(r)$:

$$E_2(r) \geqslant c\|r\|^2_{W_2^1(S_1)}. \tag{2.26}$$

Итак, положим

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\|\rho^{\pm}\mathbf{v}\|^2_{2,\Omega} + \gamma\int\limits_{\Omega}\rho^{\pm}\mathbf{v}\cdot\mathbf{W}\,\mathrm{d}x + \sigma E_1(r).$$

На основании (2.15), (2.20), (2.22) при достаточно малом γ заключаем:

$$c_4(\|\mathbf{v}\|^2_{2,\Omega} + \|r\|^2_{W_2^1(S_1)}) \leqslant \mathcal{E}(t) \leqslant c_5(\|\mathbf{v}\|^2_{2,\Omega} + \|r\|^2_{W_2^1(S_1)}). \tag{2.27}$$

Обозначим члены вне знака производной в левой части (2.19) через $\mathcal{E}_1(t)$. Легко видеть с учётом (2.15), (2.17), (2.26), (2.27), что при малом γ

$$\mathcal{E}_1(t) \geqslant b\mathcal{E}(t).$$

Отсюда следует оценка

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(t) + b\mathcal{E}(t) \leqslant 0$$

с некоторой положительной константой b. Переписывая это неравенство в виде:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\mathcal{E}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{bt}}\Big) \leqslant 0$$

и интегрируя его от 0 до t, приходим к (2.8), ввиду (2.27).

Неравенство (2.9) является очевидным следствием (2.8). $\square$

Следствие 2.1. *Координаты центра тяжести* Ω_t^+ *удовлетворяют неравенству*

$$|h(t)| \leqslant c\Big\{\|\mathbf{v}_0\|_{2,\Omega} + \|r_0\|_{W_2^1(S_1)}\Big\}, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{2.28}$$

Доказательство. Из формулы (2.5) следует оценка

$$|h(t)| \leqslant \frac{1}{|\Omega_t^+|^{1/2}} \int\limits_0^t \|\mathbf{v}(\cdot, \tau)\|_{2,\Omega_t^+}\,\mathrm{d}\tau,$$

которая в совокупности с (2.9) даёт неравенство (2.28). $\square$

§3. Линеаризованная задача

Рассмотрим линейную задачу с заданным вектором $\mathbf{u}$:

$$\begin{gathered}
\mathcal{D}_t\mathbf{w} - \nu^{\pm}\nabla_{\mathbf{u}}^2\mathbf{w} + \frac{1}{\rho^{\pm}}\nabla_{\mathbf{u}} s = \mathbf{f}, \quad \nabla_{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{w} = r \ \text{ в } \ D_{ST}, \\
\mathbf{w}\big|_{t=0} = \mathbf{w}_0 \ \text{ в } \ \Omega_0^- \cup \Omega_0^+, \\
[\mathbf{w}]\big|_{G_T} = 0, \quad \mathbf{w}|_S = 0, \quad [\mu^{\pm}\Pi_0\Pi\mathbb{S}_{\mathbf{u}}(\mathbf{w})\mathbf{n}]\big|_{G_T} = \Pi_0\mathbf{b}, \\
[\mathbf{n}_0\cdot\mathbb{T}_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}, s)\mathbf{n}]\big|_{G_T} - \sigma\mathbf{n}_0\cdot\Delta(t)\int\limits_0^t \mathbf{w}\big|_{\Gamma}\,\mathrm{d}\tau = b + \int\limits_0^t B\,\mathrm{d}\tau \ \text{ на } \ G_T.
\end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь в правых частях уравнений, начальных и краевых условий стоят известные функции.

Задача (3.1) изучалась в [1]. Там была доказана однозначная разрешимость для неё на любом конечном интервале времени в случае, когда поверхность S отсутствовала и область $\Omega_0^- \cup \overline{\Omega_0^+}$ совпадала со всем пространством $\mathbb{R}^3$. Этот результат был получен в гёльдеровских пространствах со степенным весом на бесконечности, однако он справедлив также и в нашем случае.

Приведём формулировку теоремы существования для задачи (3.1).

Теорема 3.1. *Допустим, что для некоторых* $\alpha, \gamma \in (0,1)$, $\gamma \leqslant \alpha$, $0 < T < \infty$, *поверхности* $\Gamma, S \in C^{2+\alpha}$, $\sigma > 0$, *а вектор* $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(D_{ST})$ *такой, что* $[\mathbf{u}]\big|_{G_T} = 0$ *и верно неравенство*

$$(T + T^{\gamma/2})|\mathbf{u}|^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{D_{ST}} \leqslant \delta \tag{3.2}$$

для достаточно малого $\delta > 0$.

Предположим, кроме того, что выполнены четыре группы условий:

(1) $\mathbf{f} \in \mathbf{C}^{\alpha,\alpha/2}(D_{ST})$, $r \in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(D_{ST})$, $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{C}^{2+\alpha}(\Omega_0^- \cup \Omega_0^+)$, $\mathbf{b} \in \mathbf{C}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(G_T)$, $b \in C^{(\gamma,1+\alpha)}(G_T)$, $B \in C^{\alpha,\alpha/2}(G_T)$;

(2) *имеют место условия согласования*

$$\nabla \cdot \mathbf{w}_0(\xi) = r(\xi,0) = 0, \quad [\mathbf{w}_0]\big|_{\Gamma} = 0, \quad \mathbf{w}_0|_S = 0,$$

$$[\mu^{\pm}\Pi_0\mathbb{S}(\mathbf{w}_0(\xi))\mathbf{n}_0]\big|_{\xi\in\Gamma} = \Pi_0\mathbf{b}(\xi,0), \quad \xi \in \Gamma,$$

$$\left[\Pi_0\left(\mathbf{f}(\xi,0) - \frac{1}{\rho^{\pm}}\nabla s(\xi,0) + \nu^{\pm}\nabla^2\mathbf{w}_0(\xi)\right)\right]\bigg|_{\xi\in\Gamma} = 0, \tag{3.3}$$

$$\Pi_S\left(\mathbf{f}(\xi,0) - \frac{1}{\rho^{-}}\nabla s(\xi,0) + \nu^{-}\nabla^2\mathbf{w}_0(\xi)\right)\bigg|_{\xi\in S} = 0;$$

(3) *существует вектор* $\mathbf{g} \in \mathbf{C}^{\alpha,\alpha/2}(D_{ST})$ *и тензор* $\mathbb{G} = \{G_{ik}\}^3_{i,k=1}$, $G_{ik} \in C^{(\gamma,1+\alpha)}(D_{ST}) \cap C^{\gamma,0}(D_{ST})$ *такие, что имеют место представления*

$$\mathcal{D}_t r - \nabla_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{g}, \quad \mathbf{g} = \nabla \cdot \mathbb{G} \quad (g_i = \partial G_{ik}/\partial \xi_k, \quad i = 1,2,3),$$

(эти равенства понимаются в обобщённом смысле) и, помимо того,

$$[(\mathbf{g} + \mathbb{A}^T\mathbf{f}) \cdot \mathbf{n}_0]\big|_{G_T} = 0;$$

(4) $s_0(\xi) = s(\xi, 0)$ *является решением задачи*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho^\pm}\nabla^2 s_0(\xi) = \nabla\cdot\big(\mathcal{D}_t\mathbb{B}^T\big|_{t=0}\mathbf{w}_0(\xi) - \mathbf{g}(\xi,0)\big) \equiv \nabla\cdot\mathbf{d} \quad \text{в} \quad \Omega_0^-\cup\Omega_0^+,\\
&[s_0]\big|_\Gamma = \left[2\mu^\pm\frac{\partial\mathbf{w}_0}{\partial\mathbf{n}_0}\cdot\mathbf{n}_0\right]\Big|_\Gamma - b\big|_{t=0}, \qquad (3.4)\\
&\left[\frac{1}{\rho^\pm}\frac{\partial s_0}{\partial\mathbf{n}_0}\right]\Big|_\Gamma = \big[\mathbf{n}_0\cdot\big(\mathbf{f}\big|_{t=0} + \nu^\pm\nabla^2\mathbf{w}_0\big)\big]\big|_\Gamma,\\
&\frac{1}{\rho^-}\;\frac{\partial s_0}{\partial\mathbf{n}_S}\Big|_S = \nu^-\mathbf{n}_S\cdot\nabla^2\mathbf{w}_0|_S + \mathbf{n}_S\cdot\mathbf{f}\big|_{S,\,t=0}.
\end{aligned}$$

При этих предположениях задача (3.1) *имеет единственное решение* $(\mathbf{w}, s)$, $\mathbf{w}\in\mathbf{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(D_{ST})$, $s\in C^{(\gamma,1+\alpha)}(D_{ST})$, $\nabla s\in\mathbf{C}^{\alpha,\alpha/2}(D_{ST})$ *(давление определяется с точностью до ограниченной функции времени), причём для* $(\mathbf{w}, s)$ *при любом* $t'\in(0,T]$ *верно неравенство*

$$\begin{aligned}
N_{t'}[\mathbf{w},s] \;&\equiv\; |\mathbf{w}|^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{D_{St'}} + |\nabla s|^{(\alpha,\alpha/2)}_{D_{St'}} + |s|^{(\gamma,1+\alpha)}_{D_{St'}}\\
&\leqslant\; c_1(t')\Big\{|\mathbf{f}|^{(\alpha,\alpha/2)}_{D_{St'}} + |r|^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{D_{St'}} + |\mathbf{w}_0|^{(2+\alpha)}_{\cup\Omega_0^\pm} + |\mathbf{g}|^{(\alpha,\alpha/2)}_{D_{St'}}\\
&+\; |\mathbb{G}|^{(\gamma,1+\alpha)}_{D_{St'}} + |\mathbb{G}|^{(\gamma,0)}_{D_{St'}} + |\mathbf{b}|^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{G_{t'}} + |b|_{G_{t'}} + |b|^{(\gamma,1+\alpha)}_{G_{t'}}\\
&+\; |\nabla_\Gamma b|^{(\alpha,\alpha/2)}_{G_{t'}} + |B|^{(\alpha,\alpha/2)}_{G_{t'}} + P_{t'}[\mathbf{u}]|\mathbf{w}_0|^{(1)}_{\cup\Omega_0^\pm}\Big\}, \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

где $c_1(t')$ – *неубывающая функция* $t'\leqslant T$, $\nabla_\Gamma = \Pi_0\nabla$, *а*

$$P_t[\mathbf{u}] = t^{\frac{1-\alpha}{2}}|\nabla\mathbf{u}|_{D_{St}} + |\nabla\mathbf{u}|^{(\alpha,\alpha/2)}_{D_{St}}.$$

При доказательстве (3.5) используется оценка решения линейной задачи из работы [4]. Ниже мы докажем важную оценку (4.6) для решения задачи (1.4), (1.2) с помощью неравенства (3.5), причем, как и прежде, наличие члена $\sigma\frac{2}{R_0}\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{n}$ не вносит в доказательство никаких трудностей.

§4. Глобальная разрешимость задачи (1.4), (1.2)

Цель этого параграфа – доказать разрешимость задачи (1.4), (1.2) на всём промежутке времени $t > 0$.

В [10] была доказана лемма, которая нам понадобится при доказательстве.

Лемма 4.1. *Пусть* $u \in C^{0,\frac{1+\alpha}{2}}(D_{ST_0})$, $T_0 > 0$, $0 < \theta < T_0^{1/2}$. *Тогда функция* u *подчиняется неравенству*

$$\langle u\rangle_{t,D_{ST_0}}^{(\frac{1+\alpha-\gamma}{2})} \leqslant 2\theta^{\gamma}\langle u\rangle_{t,D_{ST_0}}^{(\frac{1+\alpha}{2})} + c\,\theta^{\gamma-\alpha-\frac{9}{2}}\int\limits_0^{T_0}\|u(\cdot,\tau)\|_{2,\Omega}\,\mathrm{d}\tau. \tag{4.1}$$

Используя интерполяционные неравенства по x, можно также доказать следующее утверждение.

Лемма 4.2. *Для любой функции*

$$u \in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(D_{ST_0}), \quad 0 < \theta < \min\big\{\operatorname{diam}\{\Omega\}, T_0^{1/2}\big\},$$

верны неравенства

$$\langle u\rangle_{D_{ST_0}}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})} \leqslant 2\theta^2\langle u\rangle_{D_{ST_0}}^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})} + c\,\theta^{-\alpha-\frac{7}{2}}\int\limits_0^{T_0}\|u(\cdot,\tau)\|_{2,\Omega}\mathrm{d}\tau, \tag{4.2}$$

$$\langle \nabla u\rangle_{D_{ST_0}}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})} \leqslant c\Big\{\theta\langle u\rangle_{D_{ST_0}}^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})} + \theta^{-\alpha-\frac{9}{2}}\int\limits_0^{T_0}\|u(\cdot,\tau)\|_{2,\Omega}\mathrm{d}\tau\Big\}, \tag{4.3}$$

$$|u|_{x,D_{ST_0}}^{(2)} \leqslant c\Big\{\theta^{\alpha}\langle u\rangle_{D_{ST_0}}^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})} + \theta^{-\frac{11}{2}}\int\limits_0^{T_0}\|u(\cdot,\tau)\|_{2,\Omega}\,\mathrm{d}\tau\Big\}, \tag{4.4}$$

$$|\nabla u|_{D_{ST_0}} \leqslant c\Big\{\theta^{1+\alpha}\langle u\rangle_{D_{ST_0}}^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})} + \theta^{-\frac{9}{2}}\int\limits_0^{T_0}\|u(\cdot,\tau)\|_{2,\Omega}\,\mathrm{d}\tau\Big\}. \tag{4.5}$$

Кроме того, приведём лемму об оценке градиента ньютонова потенциала из [1] для обычных гёльдеровских пространств в $D_T \equiv \big(\Omega_0^+ \cup (\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_0^+})\big) \times (0,T)$.

Лемма 4.3. *Если* $F \in C^{(0,\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}(D_T)$ *и исчезает на бесконечности, то для градиента ньютонова потенциала*

$$\nabla_x V(x,t) = \nabla_x \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x,y)F(y,t)\,dy$$

верны оценки

$$\begin{aligned} |\nabla V|_{D_T}^{(\gamma,0)} &\leqslant c|F|_{D_T}, \\ |\nabla V|_{D_T}^{(\gamma,1+\alpha)} &\leqslant c|F|_{t,D_T}^{(\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}. \end{aligned}$$

Предложение 4.1. *Пусть на интервале* $(0,T]$ *существует решение* $(\mathbf{v},p_1)$ *задачи* (1.4), (1.2) *и справедлива оценка*

$$N_{(0,T)}[\mathbf{v},p_1] \equiv |\mathbf{u}^0|^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{D_{ST}} + |\nabla q^0|^{(\alpha,\alpha/2)}_{D_{ST}} + |q^0|^{(\gamma,1+\alpha)}_{D_{ST}} \leqslant \mu.$$

Здесь $(\mathbf{u}^0,q^0)$ – *решение задачи* (1.4), 1.2 *в лагранжевых координатах.*

Тогда

$$N_{(t_0-\tau_0,t_0)}[\mathbf{v},p_1] + \sup_{t_0-\tau_0<\tau<t_0} |r(\cdot,\tau)|^{(3+\alpha)}_{S_1} \tag{4.6}$$
$$\leqslant \quad c(\delta,\tau_0)\Big\{\int\limits_{t_0-2\tau_0}^{t_0} \|\mathbf{v}(\cdot,\tau)\|_{2,\Omega}\,\mathrm{d}\tau + \int\limits_{t_0-2\tau_0}^{t_0} \|r(\cdot,\tau)\|_{W_2^1(S_1)}\,\mathrm{d}\tau\Big\},$$

где $t_0 \in (0,T]$, $\tau_0 \in (0,t_0/2)$, τ_0 *зависит от* μ *и от константы* δ *из* (4.11).

Доказательство. Фиксируем произвольное $t_0 \in (0,T]$. Пусть $\tau_0 \in (0,t_0/2)$, а $\eta_\lambda(t)$ – гладкая монотонная функция от t такая, что

$$\eta_\lambda(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad t \leqslant t_0 - 2\tau_0 + \lambda/2, \\ 1, & \text{если} \quad t \geqslant t_0 - 2\tau_0 + \lambda, \end{cases}$$

$\lambda \in (0,\tau_0]$, и

$$\Big|\frac{\mathrm{d}\eta_\lambda(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{\mathbb{R}} \leqslant c\lambda^{-1}, \quad \Big\langle\frac{\mathrm{d}\eta_\lambda(t)}{\mathrm{d}t}\Big\rangle^{(\alpha/2)}_{\mathbb{R}} \leqslant c\lambda^{-1-\alpha/2}.$$

Рассмотрим пару $\mathbf{w} = \mathbf{v}\eta_\lambda$, $s = p\eta_\lambda$. Она удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}_t\mathbf{w} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{w} - \nu^{\pm}\nabla^2\mathbf{w} + \frac{1}{\rho^{\pm}}\nabla s = \mathbf{v}\eta'_\lambda, \\ &\nabla\cdot\mathbf{w} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_t^- \cup \Omega_t^+, \quad t > t_0 - 2\tau_0, \\ &\mathbf{w}\big|_{t=t_0-2\tau_0} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^-_{t_0-2\tau_0} \cup \Omega^+_{t_0-2\tau_0}, \\ &[\mathbf{w}]\big|_{\Gamma_t} = 0, \quad [\mathbb{T}(\mathbf{w},s)\mathbf{n}]\big|_{\Gamma_t} = \sigma\big(H + \frac{2}{R_0}\big)\mathbf{n}\eta_\lambda\big|_{\Gamma_t}, \quad \mathbf{w}\big|_S = 0, \end{aligned} \tag{4.7}$$

где $\eta'_\lambda \equiv \mathrm{d}\eta_\lambda(t)/\mathrm{d}t$. Введём лагранжевы координаты по формуле

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}' + \int\limits_{t_0-2\tau_0}^{t} \mathbf{u}(\xi',\tau)\,\mathrm{d}\tau \equiv \mathbf{X}(\xi',t), \\ &\xi' \in \cup\Omega' \equiv \cup\Omega^{\pm}_{t_0-2\tau_0}, \quad t > t_0 - 2\tau_0, \end{aligned} \tag{4.8}$$

здесь $\mathbf{u}(\xi',t) = \mathbf{v}(X(\xi',t),t)$. Функции $\mathbf{w}$ и s в лагранжевых координатах будем обозначать теми же буквами. Они будут удовлетворять системе:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{D}_t\mathbf{w} - \nu^{\pm}\nabla^2_{\mathbf{u}}\mathbf{w} + \frac{1}{\rho^{\pm}}\nabla_{\mathbf{u}}s = \mathbf{u}\eta'_\lambda,\\
&\nabla_{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{w} = 0 \quad \text{в} \quad \cup\,\Omega', \quad t > t_0 - 2\tau_0,\\
&\mathbf{w}\big|_{t=t_0-2\tau_0} = 0 \quad \text{в} \quad \cup\,\Omega',\\
&[\mathbf{w}]\big|_{\Gamma'} = 0, \quad [\mu^{\pm}\Pi'_0\Pi\mathbb{S}_{\mathbf{u}}(\mathbf{w})\mathbf{n}]\big|_{\Gamma'} = 0, \quad \mathbf{w}|_S = 0,\\
&[\mathbf{n}'_0\cdot\mathbb{T}_{\mathbf{u}}(\mathbf{w},s)\mathbf{n}]\big|_{\Gamma'} = \sigma\eta_\lambda\Big(H + \frac{2}{R_0}\Big)\mathbf{n}'_0\cdot\mathbf{n}\big|_{\Gamma'}.
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Здесь $\Gamma' = \Gamma_{t_0-2\tau_0}$, $\mathbf{n}'_0$ – внешняя нормаль к Γ', Π'_0 и Π – проекции на касательные плоскости к Γ' и к Γ_t соответственно. Пусть остальные обозначения, например $\nabla_{\mathbf{u}}$, тоже соответствуют преобразованию (4.8).

Напишем последнее граничное условие в (4.9) в виде:

$$
\begin{aligned}
&\big[\mathbf{n}'_0\cdot\mathbb{T}_{\mathbf{u}}(\mathbf{w},s)\mathbf{n}\big]\big|_{\Gamma'} - \sigma\eta_\lambda\Big(H + \frac{2}{R_0}\Big)\mathbf{n}'_0\cdot\mathbf{n}\big|_{\Gamma'}\\
&\qquad - \int\limits_{t_0-2\tau_0}^{t}\eta'_\lambda\Big\{\big[\mathbf{n}'_0\cdot\mathbb{T}_{\mathbf{u}}(\mathbf{w},s)\mathbf{n}\big]\big|_{\Gamma'} - \sigma\Big(H + \frac{2}{R_0}\Big)\mathbf{n}'_0\cdot\mathbf{n}\big|_{\Gamma'}\Big\}\,\mathrm{d}\tau = 0,
\end{aligned}
$$

затем воспользуемся соотношением (1.6) и проинтегрируем по частям. Тогда получим:

$$
\begin{aligned}
&[\mathbf{n}'_0\cdot\mathbb{T}_{\mathbf{u}}(\mathbf{w},s)\mathbf{n}]\big|_{\Gamma'} - \sigma\mathbf{n}'_0\cdot\int\limits_{t_0-2\tau_0}^{t}\Delta(\tau)\mathbf{w}\big|_{\Gamma'}\,\mathrm{d}\tau\\
&= \int\limits_{t_0-2\tau_0}^{t}\Big\{\eta'_\lambda[\mathbf{n}'_0\cdot\mathbb{T}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u},q)\mathbf{n}]\big|_{\Gamma'} + \frac{2\sigma}{R_0}\eta_\lambda\mathbf{n}'_0\cdot\frac{d\mathbf{n}}{dt} + \sigma\eta_\lambda(\tau)\mathbf{n}'_0\cdot\dot{\Delta}(\tau)\mathbf{X}(\xi',\tau)\Big\}\,\mathrm{d}\tau,
\end{aligned}
$$

где $\dot{\Delta}(t)$ – это оператор, получающийся из (1.7) дифференцированием его коэффициентов по времени:

$$
\dot{\Delta}(t) = \dot{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial s_\alpha\partial s_\beta} + \dot{h}^\beta\frac{\partial}{\partial s_\beta};
$$

здесь точкой обозначено дифференцирование по t (подробнее см. [16]). Заменим $\mathbf{X}$ по формуле (4.8). Тогда будем иметь

$$[\mathbf{n}_0' \cdot \mathbb{T}_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}, s)\mathbf{n}]\big|_{\Gamma'} - \sigma \mathbf{n}_0' \cdot \Delta(t) \int\limits_{t_0 - 2\tau_0}^{t} \mathbf{w}\big|_{\Gamma'} \,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{t_0 - 2\tau_0}^{t} B(\xi, \tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad \xi \in \Gamma', \tag{4.10}$$

где

$$B(\xi, \tau) = \frac{2\sigma}{R_0} \eta_\lambda \mathbf{n}_0' \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathbf{n}\big|_{\Gamma'} + \eta_\lambda' [\mathbf{n}_0' \cdot \mathbb{T}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, q)\mathbf{n}]|_{\Gamma'}$$

$$+\sigma \eta_\lambda(\tau) \mathbf{n}_0' \cdot \dot{\Delta}(\tau)\xi + \sigma \eta_\lambda(\tau) \mathbf{n}_0' \cdot \dot{\Delta}(\tau) \int\limits_{t_0 - 2\tau_0}^{\tau} \mathbf{u}(\xi, \tau')\mathrm{d}\tau' - \sigma \mathbf{n}_0' \cdot \int\limits_{\tau}^{t} \dot{\Delta}(\tau')\,\mathrm{d}\tau' \mathbf{w}\big|_{\Gamma'}.$$

Мы использовали здесь равенство $\Delta(\tau) - \Delta(t) = -\int\limits_{\tau}^{t} \dot{\Delta}(\tau')\,\mathrm{d}\tau'$.

Чтобы применить теорему 3.1 к задаче (4.10), (4.8), нам надо проверить её предположения. Для этого выберем τ_0 настолько малым, чтобы было выполнено неравенство (3.2). Достаточно взять τ_0 таким, чтобы

$$(2\tau_0 + (2\tau_0)^{\gamma/2})\mu \leqslant \delta. \tag{4.11}$$

Условие $\mathbf{f} \in \mathbf{C}^{\alpha, \alpha/2}(D_{ST})$ выполнено ввиду того, что

$$\mathbf{u} \in \mathbf{C}^{\alpha, \alpha/2}(\cup Q^{\pm}_{(t_0 - 2\tau_0, T)}), \quad Q^{\pm}_{(t_1, t_2)} \equiv \Omega^{\pm}_{t_1} \times (t_1, t_2)$$

для $0 < t_1 < t_2$. Что до предположений 2, 4, то все функции в (3.3), (3.4) с $\Omega_0^{\pm} = \Omega^{\pm}_{t_0 - 2\tau_0}$ равны нулю при $t = t_0 - 2\tau_0$. Поскольку $\nabla_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} = 0$, то предположение 3

$$-\nabla_{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{u}\eta_\lambda') = \nabla \cdot \mathbf{g}$$

выполнено с $\mathbf{g} = -\mathbb{A}^T(\mathbf{u}\eta_\lambda')$, к тому же

$$[(\mathbf{g} + \mathbb{A}^T(\mathbf{u}\eta_\lambda')) \cdot \mathbf{n}_0']\big|_{\Gamma'} = 0.$$

В качестве $\mathbb{G} = \{G_{ik}\}_{i,k=1}^3$ мы возьмём потенциал

$$\mathbb{G}(\xi, t) = \nabla \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(\xi, y) \mathbb{A}^T(\mathbf{u}\eta_\lambda')\,\mathrm{d}y,$$

где $\mathcal{E}(x, y) = \frac{-1}{4\pi|x-y|}$, а вектор $\mathbf{u}$ продолжен с сохранением класса во всё пространство $\mathbb{R}^3$ так, что он исчезает на бесконечности. Значит, согласно (3.5)

$$N_{(t_0-2\tau_0+\lambda,t_0)}[\mathbf{v},p] \leqslant N_{(t_0-2\tau_0,t_0)}[\mathbf{w},s] \tag{4.12}$$

$$\leqslant c_1(2\tau_0)\Big\{|\mathbf{u}\eta'_\lambda|^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}_{\cup Q'_0} + |\mathbf{g}|^{(\alpha,\alpha/2)}_{\cup Q'_0} + |\mathbb{G}|^{(\gamma,0)}_{\cup Q'_0} + |\mathbb{G}|^{(\gamma,1+\alpha)}_{\cup Q'_0} + |B|^{(\alpha,\alpha/2)}_{G'_0}\Big\}.$$

Здесь мы использовали обозначения: $\cup Q'_\beta = \cup Q^{\pm}_{(t_0-2\tau_0+\beta,t_0)}$, $G'_\beta = \Gamma' \times (t_0-2\tau_0+\beta, t_0)$ с $\beta \in [0,2\tau_0)$.

Оценим нормы функций, стоящие в правой части неравенства. Предположим, что $\lambda < 1$, тогда ввиду леммы 4.3 выводим

$$|\mathbb{G}|^{(\gamma,1+\alpha)}_{\cup Q'_0} + |\mathbb{G}|^{(\gamma,0)}_{\cup Q'_0} \leqslant c\Big\{\frac{1}{\lambda}\langle\mathbf{u}\rangle^{(\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{t,\cup Q'_{\lambda/2}} + \Big(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^{\frac{3+\alpha-\gamma}{2}}}\Big)|\mathbf{u}|_{\cup Q'_{\lambda/2}}\Big\}.$$

Остановимся ещё только на оценке нормы $|B|^{(\alpha,\alpha/2)}_{G'_0}$. Член, содержащий $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{n}$, с учётом формулы (1.9) оценивается очевидным образом:

$$|\eta_\lambda \mathbf{n}'_0 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{n}|^{(\alpha,\alpha/2)}_{G'_0} \leqslant c(\delta)\Big\{|\nabla\mathbf{u}|^{(\alpha,\alpha/2)}_{\cup Q'_{\lambda/2}} + \frac{1}{\lambda^{\frac{\alpha}{2}}}|\nabla\mathbf{u}|_{\cup Q'_{\lambda/2}}\Big\}.$$

Для оператора $\dot{\Delta}(t)$ в [16] была доказана лемма (лемма 6.2), из которой вытекает следующее очевидное следствие.

Лемма 4.4. *Если для* $\mathbf{u} \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q^+_T)$ *верно неравенство* (3.2) *относительно области* Q^+_T*, а поверхность* $\Gamma \in C^{2+\alpha}$*, то*

$$|\mathbf{n}_0 \cdot \dot{\Delta}(t) boldsymbol\xi|^{(\alpha,\alpha/2)}_{G_T} \leqslant c_6|\nabla\mathbf{u}|^{(\alpha,\alpha/2)}_{G_T}.$$

Применяя лемму 4.4 и используя оценки других членов в B из [16] (лемма 5.2), мы можем написать

$$\begin{aligned}
|B|^{(\alpha,\alpha/2)}_{G'_0} \quad &\leqslant \quad c\Big\{\frac{1}{\lambda}\Big(\langle\nabla\mathbf{u}\rangle^{(\alpha,\alpha/2)}_{\cup Q'_{\lambda/2}} + \langle[q]\big|_\Gamma\rangle^{(\alpha,\alpha/2)}_{G'_{\lambda/2}}\Big)\\
&+ \quad \frac{1}{\lambda^{1+\frac{\alpha}{2}}}\big(|\nabla\mathbf{u}|_{\cup Q'_{\lambda/2}} + |[q]\big|_\Gamma|_{G'_{\lambda/2}}\big)\\
&+ \quad \Big(1+\frac{1}{\lambda^{1+\frac{\alpha}{2}}}\Big)|\nabla\mathbf{u}|^{(\alpha,\alpha/2)}_{\cup Q'_{\lambda/2}} + \Big(\tau_0^{(1-\alpha/2)} + \frac{1}{\lambda^{\frac{\alpha}{2}}}\Big)|\mathbf{u}|^{(2)}_{\xi,\cup Q'_{\lambda/2}}\\
&+ \quad \tau_0|\mathbf{u}|^{(2+\alpha)}_{\xi,\cup Q'_{\lambda/2}} + \big(\tau_0^{(1-\alpha/2)} + \tau_0\big)|\mathbf{w}|^{(2+\alpha,\alpha/2)}_{\cup Q'_0}\Big\}.
\end{aligned}$$

Таким образом, при малом τ_0 неравенство (4.12) можно продолжить так:

$$
\begin{aligned}
& N_{(t_0-2\tau_0+\lambda,t_0)}[\mathbf{v},p_1] \\
\leqslant\ & c_2(\delta)\Big\{\tau_0|\mathbf{u}|^{(2+\alpha)}_{\xi,\cup Q'_{\lambda/2}}+\frac{1}{\lambda}\Big(\langle\nabla\mathbf{u}\rangle^{(\alpha,\alpha/2)}_{\cup Q'_{\lambda/2}}+\langle[q]\big|_\Gamma\rangle^{(\alpha,\alpha/2)}_{G'_{\lambda/2}}\Big) \\
+\ & \frac{1}{\lambda}\Big(\langle\mathbf{u}\rangle^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}_{\cup Q'_{\lambda/2}}+\langle\mathbf{u}\rangle^{(\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{t,\cup Q'_{\lambda/2}}\Big)+\frac{1}{\lambda^{\frac{3+\alpha-\gamma}{2}}}|\mathbf{u}|_{\cup Q'_{\lambda/2}} \\
+\ & \frac{1}{\lambda^{\frac{\alpha}{2}}}|\mathbf{u}|^{(2)}_{\xi,\cup Q'_{\lambda/2}}+\frac{1}{\lambda^{1+\frac{\alpha}{2}}}\Big(|\nabla\mathbf{u}|_{\cup Q'_{\lambda/2}}+|[q]\big|_\Gamma|_{G'_{\lambda/2}}\Big)\Big\}.
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Скачок давления оценим, исходя из последнего граничного условия в системе (1.8) и неравенства (4.3):

$$
\begin{aligned}
\langle[q]\big|_\Gamma\rangle^{(\alpha)}_{\xi,G'_{\lambda/2}} &\leqslant c(\delta)\Big\{|\nabla\mathbf{u}|^{(\alpha)}_{\xi,G'_{\lambda/2}}+|H+\frac{2}{R_0}|^{(\alpha)}_{\xi,G'_{\lambda/2}}\Big\} \\
&\leqslant c(\delta)\Big\{|\nabla\mathbf{u}|^{(\alpha)}_{\xi,\cup Q'_{\lambda/2}}+|r|^{(2+\alpha)}_{y,S_1\times(t_0-2\tau_0+\lambda/2,t_0)}\Big\} \\
&\leqslant c(\delta)\Big\{\theta_3\big(|\mathbf{u}|^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{\cup Q'_{\lambda/2}}+|r|^{(3+\alpha)}_{y,S_1\times(t_0-2\tau_0+\lambda/2,t_0)}\big) \\
&+\ c\,\theta_3^{-9/2-\alpha}\int\limits_{t_0-2\tau_0}^{t_0}\Big(\|\mathbf{u}(\cdot,\tau)\|_{2,Q}+\|r(\cdot,\tau)\|_{W_2^1(S_1)}\Big)\,\mathrm{d}\tau\Big\},
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

$|r|^{(2+\alpha)}_{y,S_1\times(t_0-2\tau_0+\lambda/2,t_0)}\equiv\sup_{t_0-2\tau_0+\lambda/2<\tau<t_0}|r(\cdot,\tau)|^{(2+\alpha)}_{S_1}$.

Норму r в $C^{3+\alpha}(S_1)$ можно оценить, подставляя последнее в граничное условие в (1.8) соотношение (2.23). Очевидно, что r является решением квазилинейного уравнения эллиптического типа, поэтому его норма подчиняется неравенству [17]

$$
|r(\cdot,t)|^{(3+\alpha)}_{S_1}\leqslant c\big\{|\nabla_{\Gamma'}[q(\cdot,t)]\big|_{\Gamma'}|^{(\alpha)}_{\Gamma'}+|\mathbf{u}(\cdot,t)|^{(2+\alpha)}_{\cup\Omega'}+\|r(\cdot,t)\|_{2,S_1}\big\}. \tag{4.15}
$$

Оценка полунормы $\langle [q]\big|_{\Gamma}\rangle^{(\alpha/2)}_{t,G'_{\lambda/2}}$ вытекает из того же граничного условия, но в преобразованном виде:

$$[q]\big|_{\Gamma}\mathbf{n}'_0\cdot\mathbf{n} = 2\Big[\mu^{\pm}\mathbf{n}'_0\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{n}}\Big]\Big|_{\Gamma'} - \sigma\mathbf{n}'_0\cdot\Delta(t)\int\limits_{t_0-2\tau_0+\frac{\lambda}{2}}^{t}\mathbf{u}\,\mathrm{d}\tau$$
$$-\sigma\mathbf{n}'_0\cdot\int\limits_{t_0-2\tau_0+\frac{\lambda}{2}}^{t}\dot{\Delta}(\tau)\boldsymbol{\xi}\,\mathrm{d}\tau - \sigma\Big(H_1+\frac{2}{R_0}\Big) - \frac{2}{R_0}\sigma(\mathbf{n}-\mathbf{n}'_0)\cdot\mathbf{n}'_0,$$

где H_1 – кривизна поверхности $\Gamma_{t_0-2\tau_0+\lambda/2}$.

Так как $|\mathbf{n}-\mathbf{n}'_0|\geqslant c$ при достаточно малом τ_0, то с учётом лемм 4.2, 4.4 и формулы (1.9) получаем, что

$$\begin{aligned}\langle [q]\big|_{\Gamma'}\rangle^{(\frac{\alpha}{2})}_{t,G'_{\lambda/2}} \leqslant c(\delta)\Big\{&\tau_0^{1-\frac{\alpha}{2}}|\mathbf{u}|^{(2)}_{\xi,\cup Q'_{\lambda/2}}\\ &+\theta_3|\mathbf{u}|^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})}_{\cup Q'_{\lambda/2}} + c\,\theta_3^{-\frac{9}{2}-\alpha}\int\limits_{t_0-2\tau_0}^{t_0}\|\mathbf{u}(\cdot,\tau)\|_{2,Q}\,\mathrm{d}\tau\Big\}.\end{aligned}\tag{4.16}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}|[q]\big|_{\Gamma'}|_{G'_{\lambda/2}} \leqslant c(\delta)\Big\{&|\nabla\mathbf{u}|_{\cup Q'_{\lambda/2}} + \tau_0|\mathbf{u}|^{(2)}_{\xi,\cup Q'_{\lambda/2}}\\ &+\tau_0|\nabla\mathbf{u}|^{(\alpha,\alpha/2)}_{\cup Q'_{\lambda/2}} + \Big|r\Big(\cdot,t_0-2\tau_0+\frac{\lambda}{2}\Big)\Big|^{(2)}_{S_1}\Big\}.\end{aligned}\tag{4.17}$$

Младшие нормы $\mathbf{u}$ в (4.13) и (4.17) оценим с помощью лемм 4.1, 4.2, полагая $\theta_1=(\varepsilon\lambda)^{1/\gamma}$, $\theta_2=(\varepsilon\lambda)^{1/2}$, $\theta_3=\varepsilon\lambda$, $\theta_4=(\varepsilon\lambda^{\frac{\alpha}{2}})^{\frac{1}{\alpha}}$, $\theta_5=(\varepsilon\lambda^{1+\frac{\alpha}{2}})^{\frac{1}{1+\alpha}}$ в неравенствах (4.1)–(4.5), соответственно. Последний член в (4.17) оценим снова по интерполяционному неравенству, как в (4.14), а $|\mathbf{u}|_{\cup Q'_{\lambda/2}}$ – по неравенству

$$|\mathbf{u}|_{\cup Q'_{\lambda/2}} \leqslant c\Big\{\theta_6^{1+\alpha}\langle\mathbf{u}\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,\cup Q'_{\lambda/2}} + \theta_6^{-\frac{7}{2}}\int\limits_{t_0-2\tau_0}^{t_0}\|\mathbf{u}(\cdot,\tau)\|_{2,Q}\,\mathrm{d}\tau\Big\}\tag{4.18}$$

с $\theta_6=(\varepsilon\lambda^{\frac{3+\alpha-\gamma}{2}})^{\frac{1}{1+\alpha}}$.

В результате из оценок (4.13)–(4.18) выводим, что

$$N_{(t_0-2\tau_0+\lambda,t_0)}[\mathbf{v},p_1,r]\leqslant c_3(\delta)\Big\{(\varepsilon+\tau_0)N_{(t_0-2\tau_0+\frac{\lambda}{2},t_0)}[\mathbf{v},p_1,r]$$
$$+c(\varepsilon)\lambda^{-\varkappa}\int\limits_{t_0-2\tau_0}^{t_0}\Big(\|\mathbf{u}(\cdot,\tau)\|_{2,Q}+\|r(\cdot,\tau)\|_{W_2^1(S_1)}\Big)\,\mathrm{d}\tau\Big\},\qquad(4.19)$$

здесь

$$N_{(t_0-2\tau_0+\lambda,t_0)}[\mathbf{v},p_1,r]=N_{(t_0-2\tau_0+\lambda,t_0)}[\mathbf{v},p_1]+|r|^{(3+\alpha)}_{\xi,S_1\times(t_0-2\tau_0+\lambda,t_0)},$$

$$\varkappa=\max\Big\{\frac{9}{2\gamma}+\frac{\alpha}{\gamma},\frac{11}{4}+\frac{\alpha}{2},\Big(\frac{11}{2}+\alpha\Big)\Big(1+\frac{\alpha}{2}\Big),$$
$$\frac{2+\alpha}{2}\Big(1+\frac{9}{2(1+\alpha)}\Big),\frac{3+\alpha-\gamma}{2}\Big(1+\frac{7}{2(1+\alpha)}\Big)\Big\}.$$

Введём функцию $\Phi(\lambda)=\lambda^{\varkappa}N_{(t_0-2\tau_0+\lambda,t_0)}[\mathbf{v},p,r]$. Тогда мы можем переписать (4.19) так:

$$\Phi(\lambda)\leqslant c_4(\varepsilon+\tau_0)\Phi(\lambda/2)+K,\qquad(4.20)$$

где $c_4=c_3(\delta)2^{\varkappa}$,

$$K=c_3(\delta)c(\varepsilon)\int\limits_{t_0-2\tau_0}^{t_0}\Big(\|\mathbf{u}(\cdot,\tau)\|_{2,Q}+\|r(\cdot,\tau)\|_{W_2^1(S_1)}\Big)\,\mathrm{d}\tau.$$

Положим $\varepsilon+\tau_0=\frac{1}{2c_4}$, тогда путём итераций с $\lambda/2,\ldots,\lambda/2^k$ из неравенства (4.20) выводим в пределе по $k\to\infty$, что

$$\Phi(\lambda)\leqslant 2K.$$

Из этой оценки с $\lambda=\tau_0$ вытекает (4.6). □

Лемма 4.5. *Пусть $r_0\in C^{1+\alpha}(S_1)$ и $\mathbf{u}\in C^{1+\alpha,0}(D_{ST_0})$, $\alpha\in(0,1)$. Тогда $r(\cdot,t)\in C^{1+\alpha}(S_1)$ для любого $t\in(0,T_0)$ и верно неравенство*

$$|r(\cdot,t)|^{(1+\alpha)}_{S_1}\leqslant c_5\big(|r_0|^{(1+\alpha)}_{S_1}+t|\mathbf{u}|^{(1+\alpha)}_{\xi,D_{St}}\big),\qquad(4.21)$$

если нормы r_0 и $\mathbf{u}$ малы.

Эта лемма доказывается путём перехода к лагранжевым координатам (1.5) аналогично предложению 4.5 из [18].

Доказательство. Рассмотрим функцию расстояния до сферы S_{R_0} $R_1(x) = \pm\operatorname{dist}\{x, S_{R_0}\}$, причём $R_1(x) < 0$, если x лежит внутри S_{R_0}, и $R_1(x) > 0$, если x – вне S_{R_0}. Уравнение $R_1(x) = r_0\big(\frac{x}{|x|}\big)$, $x \in \Gamma$, задаёт поверхность Γ, а функция $r_1(\xi,t) \equiv R_1(X(\xi,t)-h(t)) = |\mathbf{X}(\xi,t)-\mathbf{h}(t)|-R_0$, $\xi \in \Gamma$, задаёт поверхность Γ_t. Заметим, что $\xi = x$ при $t = 0$ и ввиду (2.2) ясно, что $r_1(\xi,0) \equiv |\xi| - R_0 = r_0\big(\frac{x}{|x|}\big)$, $\xi \in \Gamma$. Вследствие формулы (1.5) имеем

$$\mathbf{X}(\xi,t) - \mathbf{h}(t) = \boldsymbol{\xi} + \int\limits_0^t \big(\mathbf{u}(\xi,\tau) - \mathbf{h}'(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau,$$

откуда с учётом (2.5) вытекает, что

$$\begin{aligned} r_1(\xi,t) &= R_1(\xi) + R_1(X(\xi,t)-h(t)) - R_1(\xi) = R_1(\xi) + \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} R_1(X_s)\,\mathrm{d}s \\ &= R_1(\xi) + \int\limits_0^1 \nabla_{X_s} R_1(X_s)\,\mathrm{d}s \cdot \int\limits_0^t \Big(\mathbf{u}(\xi,\tau) - \frac{1}{|\Omega_0^+|}\int\limits_{\Omega_0^+} \mathbf{u}(\xi',\tau)\,\mathrm{d}\xi'\Big)\mathrm{d}\tau, \end{aligned}$$

где $\mathbf{X}_s(\xi,t) = \boldsymbol{\xi} + s\int\limits_0^t \Big(\mathbf{u}(\xi,\tau) - \frac{1}{|\Omega_0^+|}\int\limits_{\Omega_0^+} \mathbf{u}(\xi',\tau)\,\mathrm{d}\xi'\Big)\mathrm{d}\tau$.

Очевидно, что

$$\begin{aligned} |r_1(\cdot,t)|_\Gamma^{(1+\alpha)} &\leqslant c\Big\{|r_0|_{S_1}^{(1+\alpha)} + t\max_{s\in[0,1]} |\nabla_{X_s} R_1(X_s)|_\Gamma^{(1+\alpha)} \\ &\times \Big(|\mathbf{u}|_{\xi,G_t}^{(1+\alpha)} + \frac{1}{|\Omega_0^+|}\max_{\tau\in(0,t)}\Big|\int\limits_{\Omega_0^+} \mathbf{u}(\xi',\tau)\,\mathrm{d}\xi'\Big|\Big)\Big\}. \end{aligned}$$

Так как $R_1(x)$ — гладкая функция x в окрестности Γ_t, а норма аргумента X_s ограничена, то верно неравенство

$$\begin{aligned} |\nabla_{X_s} R_1(X_s)|_\Gamma^{(1+\alpha)} &\leqslant c|X_s(\cdot,t)|_\Gamma^{(1+\alpha)} \\ &\leqslant c\Big(1 + t\big(|\mathbf{u}|_{\xi,G_t}^{(1+\alpha)} + \max_{\tau\in(0,t)}|\int\limits_{\Omega_0^+} \mathbf{u}(\xi',\tau)\,\mathrm{d}\xi'|\big)\Big) \leqslant c. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|r_1(\cdot,t)|_\Gamma^{(1+\alpha)} \leqslant c\big(|r_0|_{S_1}^{(1+\alpha)} + t|\mathbf{u}|_{\xi,D_{St}}^{(1+\alpha)}\big). \tag{4.22}$$

Рассмотрим преобразование

$$y = \frac{X(\xi,t)-h(t)}{|X(\xi,t)-h(t)|}R_0 \equiv \mathcal{T}(\xi,t), \quad \xi \in \Gamma.$$

При достаточно малом $\mathbf{u}$ это обратимое отображение Γ на S_{R_0} класса $C^{1+\alpha}$ по ξ, при этом $r_1(\mathcal{T}^{-1}(y,t),t)$ совпадает с $r(\frac{y}{R_0},t)$. Поэтому

$$|r(\cdot,t)|_{S_1}^{(1+\alpha)} \leqslant c|r_1|_{\Gamma}^{(1+\alpha)},$$

отсюда в совокупности с (4.22) следует (4.21). □

Теперь мы можем доказать теорему 1.2.

Доказательство. По теореме 1.1 существует решение $(\mathbf{v},p_1)$ на интервале $(0,T_0]$. Величина T_0 зависит от ε в условии (1.13)(неравенство (4.15) из [1]). Для нормы решения $(\mathbf{v},p_1)$ верна оценка (1.12), поэтому

$$N_{(0,T_0)}[\mathbf{v},p_1] \leqslant c\Big(|\mathbf{v}_0|_{\cup\Omega_0^\pm}^{(2+\alpha)} + |H_0+\frac{2}{R_0}|_{\Gamma}^{(1+\alpha)}\Big) \leqslant \mu \tag{4.23}$$

с малым $\mu>0$ при достаточно малом ε. В последнем неравенстве мы учли оценку

$$|H_0+\frac{2}{R_0}|_{\Gamma}^{(1+\alpha)} \leqslant c|r_0|_{S_1}^{(3+\alpha)},$$

полученную на основании формулы (2.23) при $t=0$.

Согласно предложению 4.1 существует $\tau_0<T_0/2$ такое, что выполняется (4.11) и для $(\mathbf{v},p_1)$, T_0 верна оценка (4.6). Лемма 4.5 обеспечивает нам при достаточно малом ε в условии (1.13) неравенство

$$|r|_{y,S_1\times(0,T_0)}^{(1+\alpha)} \leqslant c_5\big(|r_0|_{S_1}^{(1+\alpha)}+\mu T_0\big) \leqslant \delta_1 R_0 \tag{4.24}$$

($|r|_{y,S_1\times(0,T_0)}^{(1+\alpha)} \equiv \sup_{0<\tau<T_0}|r(\cdot,\tau)|_{S_1}^{(1+\alpha)}$). Это позволяет нам применить предложение 2.1, при этом из (2.8) в совокупности с (4.6) следует, что

$$\begin{aligned} N_{(t_0-\tau_0,t_0)}[\mathbf{v},p_1,r] &\leqslant c_6\,\mathrm{e}^{-b(t_0-2\tau_0)}\Big\{\|\mathbf{v}_0\|_{2,\Omega}+\|r_0\|_{W_2^1(S_1)}\Big\} \\ &\leqslant c_6\,\mathrm{e}^{-b(t_0-2\tau_0)}\Big(|\Omega|^{\frac12}|\mathbf{v}_0|_{\cup\Omega_0^\pm}^{(2+\alpha)}+2\pi^{\frac12}|r_0|_{S_1}^{(3+\alpha)}\Big), \end{aligned} \tag{4.25}$$

где $|\Omega|$ – мера Ω, $t_0\in(2\tau_0,T_0]$. При $t_0=T_0$ из (4.25) вытекает оценка

$$|\mathbf{v}(\cdot,T_0)|_{\cup\Omega^\pm}^{(2+\alpha)}+|r(\cdot,T_0)|_{S_1}^{(3+\alpha)} \leqslant c_7\mathrm{e}^{-bT_0}\big(|\Omega|^{\frac12}+2\pi^{\frac12}\big)\Big(|\mathbf{v}_0|_{\cup\Omega_0^\pm}^{(2+\alpha)}+|r_0|_{S_1}^{(3+\alpha)}\Big).$$

Мы можем выбрать T_0 за счёт малости ε в условии (1.13) столь большим, что константа $c_7\mathrm{e}^{-bT_0}\big(|\Omega|^{1/2}+2\pi^{1/2}\big)$ будет меньше единицы.

Зафиксировав это значение T_0, мы ещё уменьшим μ за счёт ε, если понадобится, чтобы было выполнено условие (4.24). Заметим, что при этом значение τ_0 не изменится.

Таким образом, мы показали, что решение при $t = T_0$ имеет меньшую норму, чем в начальный момент. Значит, мы снова можем применить теорему 1.1 и получить решение, по крайней мере, на интервале $(T_0, 2T_0]$, соответствующее начальным данным $\mathbf{v}(\cdot, T_0)$, $r(\cdot, T_0)$.

При повторении наших рассуждений для получения экспоненциальных оценок нам надо будет делать преобразование к лагранжевым координатам по формуле

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\xi}^{(1)} + \int\limits_{T_0}^{t} \widetilde{\mathbf{u}}(\xi^{(1)}, \tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad \xi^{(1)} \in \cup\Omega^{\pm}_{T_0}, \quad t \in (T_0, 2T_0). \tag{4.26}$$

На самом деле, из аддитивности интеграла следует, что формула (4.26) совпадает с (1.5):

$$\mathbf{X}(\xi, t) = \boldsymbol{\xi} + \int\limits_{0}^{T_0} \mathbf{u}(\xi, \tau)\,\mathrm{d}\tau + \int\limits_{T_0}^{t} \mathbf{u}(\xi, \tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad \xi \in \cup\Omega^{\pm}_0, \quad t \in (T_0, 2T_0),$$

ведь $\widetilde{\mathbf{u}}(\xi^{(1)}, \tau) = \mathbf{u}(\xi, \tau)$.

Это же замечание касается и центра масс внутренней жидкости, поскольку объём жидкости сохраняется:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(t) \;&=\; \mathbf{h}(T_0) + \int\limits_{T_0}^{t} \frac{1}{|\Omega_t^+|} \int\limits_{\Omega_t^+} \mathbf{v}(x, \tau)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{0}^{T_0} \frac{1}{|\Omega_t^+|} \int\limits_{\Omega_t^+} \mathbf{v}(x, \tau)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau \\ &+ \int\limits_{T_0}^{t} \frac{1}{|\Omega_t^+|} \int\limits_{\Omega_t^+} \mathbf{v}(x, \tau)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau = \frac{3}{4\pi R_0^3} \int\limits_{0}^{t} \int\limits_{\Omega_t^+} \mathbf{v}(x, \tau)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

Значит, мы можем заключить, что

$$|\mathbf{h}(t)| \leqslant a, \quad t \leqslant 2T_0,$$

где $a = \frac{c_8}{|\Omega_0^+|^{1/2}} \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-bt}\,\mathrm{d}t \Big\{ \|\mathbf{v}_0\|_{L_2(\Omega)} + \|r_0\|_{W_2^1(S_1)} \Big\}$.

Решение системы (1.4), (1.2) можно таким образом продолжить по t как угодно далеко, при этом для него будет выполняться неравенство (1.14).

Предельное положение центра тяжести оценивается из неравенства

$$\begin{aligned} |h_\infty| \leqslant a &\leqslant c_9\Big\{\|\mathbf{v}_0\|_{2,\Omega} + \|r_0\|_{W_2^1(S_1)}\Big\} \\ &\leqslant c_{10}\Big(|\mathbf{v}_0|^{(2+\alpha)}_{\cup\Omega_0^\pm} + |r_0|^{(3+\alpha)}_{S_1}\Big) \leqslant c_{10}\varepsilon. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Следовательно, исходное расстояние между поверхностями Γ и S должно быть строго больше величины $c_{10}\Big(|\mathbf{v}_0|^{(2+\alpha)}_{\cup\Omega_0^\pm} + |r_0|^{(3+\alpha)}_{S_1}\Big) + \delta_1 R_0$, чтобы было исключено пересечения этих поверхностей в дальнейшем.

Единственность решения доказывается точно так же, как это было сделано в локальном случае в [1]. □

Литература

1. И. В. Денисова, В. А. Солонников, *Классическая разрешимость задачи о движении двух вязких несжимаемых жидкостей.* — Алгебра и анализ **7** (1995), No. 5, 101–142.
2. V. A. Solonnikov, *Lectures on evolution free boundary problems: classical solutions.* — Lect. Notes Mat. **1812** (2003), 123–175.
3. В. А. Солонников, *Оценки решения нестационарной системы Навье–Стокса.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **38** (1973), 153-231
4. И. В. Денисова, *Разрешимость в гёльдеровских пространствах линейной задачи о движении двух жидкостей, разделенных замкнутой поверхностью.* — Алгебра и анализ **5** (1993), No. 4, 122–148.
5. И. В. Денисова, В. А. Солонников, *Разрешимость линеаризованной задачи о движении капли в потоке жидкости*, — Зап. научн. семин. ЛОМИ **171** (1989), 53–65.
6. И. В. Денисова, *Движение капли в потоке жидкости*, — Динамика сплошной среды. СО АН СССР, Новосибирск, **93/94** (1989), 32–37.
7. I. V. Denisova, *Problem of the motion of two viscous incompressible fluids separated by a closed free interface.* — Acta Appl. Math. **37** (1994), 31–40.
8. N. Tanaka, *Global existence of two phase nonhomogeneous viscous incompressible fluid flow.* — Commun. Part. Diff. Eq. **18** (1 and 2) (1993), 41–81.
9. N. Tanaka, *Two-phase free boundary problem for viscous incompressible thermo-capillary convection.* — Japan J. Mech. **2**1 (1995), 1–41.
10. И. В. Денисова, *Global solvability of a problem on two fluid motion without surface tension.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **348** (2007), 19–39.
11. В. А. Солонников, *О неустановившемся движении конечной массы жидкости, ограниченной свободной поверхностью.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **152** (1986), 137–157.
12. В. А. Солонников, *О неустановившемся движении конечной изолированной массы самогравитирующей жидкости.* — Алгебра и анализ **1** (1989), No. 1, 207–250.
13. M. Padula, *On the exponential stability of the rest state of a viscous compressible fluid.* — J. Math. Fluid Mech. **1** (1999), 62–77.

14. В. А. Солонников, *Оценка обобщённой энергии в задаче со свободной границей для вязкой несжимаемой жидкости.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **282** (2001), 216–243.
15. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики.* Наука, М., 1973.
16. I. Sh. Mogilevskii, V. A. Solonnikov, *On the solvability of an evolution free boundary problem for the Navier–Stokes equations in Hölder spaces of functions.* — Mathematlcal Problems Relating to Navier–Stokes Equations, Ser. Adv. Math. Appl. Sci. (G. P. Galdi, eds.) **11** World Sci. Publ. (1992), 105–181.
17. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* Наука, М., 1964.
18. В. А. Солонников, *On the stability of uniformly rotating viscous incompressible self-gravitating liquid.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **348** (2007), 165–208.

Denisova I. V., Solonnikov V. A. Global solvability of a problem governing the motion of two incompressible capillary fluids in a container

We deal with the motion of two incompressible fluids in a container, one of which is inside another. We take surface tension into account. We prove that this problem is uniquely solvable in an infinite time interval provided the initial velocity of the liquids is small and an initial configuration of the inner fluid is close to a ball. Moreover, we show that the velocity decays exponentially at infinity with respect to time and that the interface between the fluids tends to a sphere of the certain radius. The proof is based on the exponential estimate of a generalized energy and on a local existence theorem of the problem in anisotropic Hölder spaces. We follow the scheme developed by one of the authors for proving global solvability of a problem governing the motion of one incompressible capillary fluid bounded by a free surface.

Институт проблем машиноведения
РАН, В.О., Большой пр., 61
Санкт-Петербург 199178, Россия
E-mail: denisovairinavlad@gmail.com

Поступило 3 ноября 2011 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: solonnik@pdmi.ras.ru