Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 396, 2011 г.

А. А. Хартов

АППРОКСИМАЦИЯ В СРЕДНЕМ ТЕНЗОРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ ВОЗРАСТАЮЩЕЙ РАЗМЕРНОСТИ

§1. Введение

Рассматривается последовательность случайных полей $X_d, d \in \mathbb{N}$, вида

$$X_d(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}^d} \prod_{l=1}^{d} \lambda(k_l)\, \xi_k \prod_{l=1}^{d} \varphi_{k_l}(t_l), \quad t \in [0,1]^d, \tag{1}$$

где $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ – ортонормированная система в $L_2[0,1]$, $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}^d}$ – некоррелированные одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией, $(\lambda(i))_{i\in\mathbb{N}}$ – невозрастающая последовательность неотрицательных чисел, удовлетворяющая условию:

$$\Lambda := \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i)^2 < \infty. \tag{2}$$

Числа $\lambda_k := \prod_{l=1}^{d} \lambda(k_l)$ при $k \in \mathbb{N}^d$ удовлетворяют соотношению

$$\Lambda^d = \sum_{k\in\mathbb{N}^d} \lambda_k^2 < \infty,$$

а функции

$$\varphi_k(t) := \prod_{l=1}^{d} \varphi_{k_l}(t_l), \quad k \in \mathbb{N}^d, \quad t \in [0,1]^d,$$

образуют ортонормированный базис в $L_2([0,1]^d)$ с нормой $\|\cdot\|_2$.

Предварительно рассмотрим корреляционную структуру случайных полей (1). Несложно убедиться, что корреляционная функция для X_d

Ключевые слова: тензорные случайные поля, аппроксимация в среднем, сложность аппроксимации в среднем, проклятие размерности, точная асимптотика.

Работа поддержана грантом “Ведущие научные школы” НШ-4472.2010.1.

будет иметь вид

$$\mathcal{K}_d(s,t) = \prod_{l=1}^{d} \mathcal{K}_1(s_l, t_l),$$

где $s = (s_1, \dots, s_d)$, $t = (t_1, \dots, t_d)$ из $[0,1]^d$, а $\mathcal{K}_1$ есть корреляционная функция однопараметрического процесса

$$X_1(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i)\, \xi_i\, \varphi_i(t), \quad t \in [0,1]. \tag{3}$$

Другими словами, интегральный оператор K_d на пространстве $L_2([0,1]^d)$ поля (1) с ядром $\mathcal{K}_d$ есть тензорная степень интегрального оператора K_1 на $L_2[0,1]$ процесса (3) с ядром $\mathcal{K}_1$.

Наборы $(\lambda(i)^2)_{i\in\mathbb{N}}$ и $(\lambda_k^2)_{k\in\mathbb{N}^d}$ суть собственные числа для, соответственно, симметричных и неотрицательно определенных операторов K_1 и K_d, являющихся ковариационными операторами, соответственно, процесса X_1 и поля X_d. Принято говорить, что случайные поля вида (1) принадлежат *тензорному типу*. Мы будем интересоваться вопросами аппроксимации таких полей.

При фиксированном d иногда удобно упорядочивать слагаемые $(\lambda_k\, \xi_k\, \varphi_k(t))_{k\in\mathbb{N}^d}$ по невозрастанию λ_k. В результате получим последовательность $\big(\bar\lambda_{d,m}\, \xi_m\, \bar\varphi_m(t)\big)_{m\in\mathbb{N}}$. При этом (1) запишется в виде:

$$X_d(t) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \bar\lambda_{d,m}\, \xi_m\, \bar\varphi_m(t), \quad t \in [0,1]^d. \tag{4}$$

Частичную сумму для (4)

$$X_d^{(n)}(t) := \sum_{m=1}^{n} \bar\lambda_{d,m}\, \xi_m\, \bar\varphi_m(t), \quad t \in [0,1]^d,$$

отвечающую n максимальным собственным числам, называют *аппроксимацией X_d ранга n*.

Рассмотрим следующий типичный вопрос так называемой *теории трактабильности многомерных задач* (см. [7–9]): каким необходимо брать n, чтобы обеспечивать достаточно малую (не больше некоторого порога ε) относительную ошибку аппроксимации поля X_d при сколь угодно большой размерности d? Здесь n, зависящее от d и ε, принято называть *информационной сложностью* (или, просто, *сложностью*) *аппроксимации* случайного поля X_d.

Нас будет интересовать *сложность аппроксимации в среднем* (см. [1,6])

$$n_d^{\mathrm{avg}} = n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) := \min\bigl\{n \in \mathbb{N} : \mathbf{E}\,\|X_d(t) - X_d^{(n)}(t)\|_2^2 \leqslant \varepsilon^2 \Lambda^d\bigr\} \qquad (5)$$

при $d \to \infty$ и фиксированном пороге ε. Стоит заметить, что используется *критерий относительной ошибки*, так как здесь мы имеем дело с *последовательностью* полей $X_d, d \in \mathbb{N}$. Такая задача уже рассматривалась в [5], где был предложен новый способ изучения величины (5), и найдена её логарифмическая асимптотика. Эти результаты будут приведены в разделе 2. В настоящей работе исследуется *точная* асимптотика n_d^{avg} при более сильных условиях на массив $(\lambda(i))_{i\in\mathbb{N}}$. Новые результаты содержатся в разделе 3.

§2. Некоторые известные результаты

Для формулировки основных известных результатов нам потребуются некоторые вспомогательные объекты.

Итак, дана невозрастающая последовательность неотрицательных собственных чисел $(\lambda(i)^2)_{i\in\mathbb{N}}$ (далее будем назвать их *исходными*), удовлетворяющих условию (2). Для неё введём функцию кратности $\tau_d \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\tau_d(v) := \#\bigl\{k \in \mathbb{N}^d : v = (v_1, \ldots, v_d) = (\lambda(k_1), \ldots, \lambda(k_d))\bigr\}, \qquad (6)$$

в частности, при $d = 1$ будем иметь $\tau_1(v) = \#\{i \in \mathbb{N} : v = \lambda(i)\}$. Легко заметить, что для $v = (v_1, \ldots, v_d) \in \mathbb{R}^d$ верно

$$\tau_d(v) = \prod_{l=1}^{d} \tau_1(v_l). \qquad (7)$$

Определим $\mathcal{V} := \{\lambda(i) : i \in \mathbb{N}\}$, т.е. множество значений $(\lambda(i))_{i\in\mathbb{N}}$ без учета кратности, и множества

$$\mathcal{V}_A^d := \Bigl\{(v_1, \ldots, v_d) \in \mathcal{V}^d : \prod_{l=1}^{d} v_l \in A\Bigr\}, \quad A \subset \mathbb{R}. \qquad (8)$$

Введем вспомогательную последовательность $(U_l)_{l\in\mathbb{N}}$ независимых случайных величин с общим распределением

$$\forall i \in \mathbb{N} : \lambda(i) > 0 \quad \mathbf{P}\bigl(U_l = -\ln \lambda(i)\bigr) := \tau_1(\lambda(i)) \cdot \frac{\lambda(i)^2}{\Lambda}, \qquad (9)$$

содержащим информацию об исходном массиве собственных чисел.

Ключевую роль играет следующая лемма:

Лемма 2.1. *Для любой размерности* $d \in \mathbb{N}$ *и любого положительного* $x \in \mathbb{R}$ *верно равенство*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^d\colon \lambda_k \geqslant x} \lambda_k^2 = \Lambda^d\, \mathbf{P}\Big(\sum_{l=1}^d U_l \leqslant -\ln x\Big).$$

Доказательство. По определению (8) для $x > 0$ можно записать

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^d_{[x,+\infty)} &= \Big\{(v_1,\dots,v_d) \in \mathcal{V}^d : \prod_{l=1}^d v_l \geqslant x\Big\} \\ &= \Big\{(v_1,\dots,v_d) \in \mathcal{V}^d : -\sum_{l=1}^d \ln v_l \leqslant -\ln x\Big\}. \end{aligned}$$

По определению $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}^d}$ и τ_d имеем

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^d\colon \lambda_k \geqslant x} \lambda_k^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}^d\colon \lambda_k \geqslant x} \prod_{l=1}^d \lambda(k_l)^2 = \sum_{\substack{v\in\mathcal{V}^d_{[x,+\infty)}\\ v=(v_1,\dots,v_d)}} \tau_d(v) \prod_{l=1}^d v_l^2.$$

Далее по свойству (7) и определению независимых $(U_l)_{l\in\mathbb{N}}$ получим

$$\begin{aligned} \sum_{k\in\mathbb{N}^d\colon \lambda_k \geqslant x} \lambda_k^2 &= \Lambda^d \sum_{\substack{v\in\mathcal{V}^d_{[x,+\infty)}\\ v=(v_1,\dots,v_d)}} \prod_{l=1}^d \tau_1(v_l)\,\frac{v_l^2}{\Lambda} \\ &= \Lambda^d \sum_{\substack{v\in\mathcal{V}^d_{[x,+\infty)}\\ v=(v_1,\dots,v_d)}} \prod_{l=1}^d \mathbf{P}\,(U_l = -\ln v_l) \\ &= \Lambda^d \sum_{\substack{v\in\mathcal{V}^d_{[x,+\infty)}\\ v=(v_1,\dots,v_d)}} \mathbf{P}\,\big((U_1,\dots,U_d) = (-\ln v_1,\dots,-\ln v_d)\big) \\ &= \Lambda^d\, \mathbf{P}\Big(\sum_{l=1}^d U_l \leqslant -\ln x\Big). \end{aligned}$$

$\square$

Замечание 2.1. Для случая последовательности $(\lambda(i))_{i\in\mathbb{N}}$ с единичной кратностью каждого элемента лемма 2.1 доказана в [5].

Далее все достаточные условия результатов и утверждений, приводимых ниже (в этом и следующих разделах статьи), будут формулироваться в виде предположений о распределении величин $(U_l)_{l\in\mathbb{N}}$.

Итак, пусть величины $(U_l)_{l\in\mathbb{N}}$ имеют конечный второй момент, т.е. выполнено условие:

$$\mathbf{E}\, U_l^2 = \sum_{i\in\mathbb{N}\colon \lambda(i)>0} (-\ln\lambda(i))^2\, \frac{\lambda(i)^2}{\Lambda} < \infty.$$

Введём обозначения

$$M \quad := \quad \mathbf{E}\, U_l = \sum_{i\in\mathbb{N}\colon \lambda(i)>0} (-\ln\lambda(i))\, \frac{\lambda(i)^2}{\Lambda} < \infty, \tag{10}$$

$$\sigma^2 \quad := \quad \mathbf{D}\, U_l = \sum_{i\in\mathbb{N}\colon \lambda(i)>0} (-\ln\lambda(i) - M)^2\, \frac{\lambda(i)^2}{\Lambda} < \infty. \tag{11}$$

Следующая логарифмическая асимптотика при $d\to\infty$ для сложности аппроксимации в среднем полей X_d получена Лифшицем и Туляковой в [5].

Для произвольного порога $\varepsilon\in(0,1)$ квантиль $q=q(\varepsilon)$ далее всегда будет выбираться из равенства

$$\Phi\,(q/\sigma) = 1-\varepsilon^2, \tag{12}$$

где Φ – функция распределения стандартного нормального закона.

Введем *коэффициент роста*

$$\mathcal{E} := \Lambda\, e^{2M}. \tag{13}$$

Теорема 2.1. *Пусть выполнено* $0<\sigma^2<\infty$. *Тогда для любого* $\varepsilon\in(0,1)$ *верно*

$$\lim_{d\to\infty} \frac{\ln n_d^{\mathrm{avg}}\,(\varepsilon) - d\ln\mathcal{E}}{d^{1/2}} = 2q.$$

Замечание 2.2. При $0<\sigma^2<\infty$, коэффициент роста $\mathcal{E}>1$.

Действительно, из определений (2) и (10) величин Λ, M и выпуклости логарифмической функции имеем

$$\begin{aligned}\ln\mathcal{E} &= \ln\Lambda+2M=\ln\Lambda-\sum_{i\in\mathbb{N}:\,\lambda(i)>0}2\ln\lambda(i)\,\frac{\lambda(i)^2}{\Lambda}\\ &= \ln\Lambda-\sum_{i\in\mathbb{N}:\,\lambda(i)>0}\ln\left(\lambda(i)^2\right)\frac{\lambda(i)^2}{\Lambda}\geqslant\ln\Lambda-\ln\Big(\sum_{i\in\mathbb{N}:\,\lambda(i)>0}\lambda(i)^4/\Lambda\Big)\\ &> \ln\Lambda-\ln\bigg(\Big(\sum_{i\in\mathbb{N}:\,\lambda(i)>0}\lambda(i)^2\Big)^2/\Lambda\bigg)=\ln\Lambda-\ln\frac{\Lambda^2}{\Lambda}=0.\end{aligned}$$

Тем самым теорема 2.1 устанавливает экспоненциальный рост сложности аппроксимации при возрастании размерности d. Этот эффект в теории трактабильности многомерных задач (см. [7, 8] и [9]) носит название *проклятия размерности*, а сама задача приобретает статус *нетрактабильной*.

Замечание 2.3. Заметим, однако, что доказательство теоремы 2.1 в [5] приведено только для последовательности $(\lambda(i))_{i\in\mathbb{N}}$ с единичной кратностью каждого элемента.

§3. Точные асимптотики сложности аппроксимации

В этом разделе мы исследуем точные асимптотики сложности аппроксимации (5) для случайных полей $X_d, d\in\mathbb{N}$ вида (1) при $d\to\infty$ и фиксированном пороге ε.

Пусть, как и прежде, $(U_l)_{l\in\mathbb{N}}$ – последовательность независимых случайных величин с общим распределением (9). Также предполагается $\mathbf{E}\,U_l^2<\infty$.

Рассмотрим сначала вырожденный случай $\sigma^2=0$. Действительно, принимая во внимание (2) и (11), заметим, что он имеет место, тогда и только тогда, когда

$$\exists N\in\mathbb{N}:\ \lambda(1)=\lambda(2)=\ldots=\lambda(N)=e^{-M},\ \text{и } \lambda(i)=0 \text{ при любом } i>N. \quad (14)$$

При любом N здесь имеем для $(U_l)_{l\in\mathbb{N}}$ вырожденное распределение $\mathbf{P}\,(U_l=M)=1$.

Что же касается сложности аппроксимации, то при $N=1$ из (1) и (5) очевидно следует, что $n_d^{\text{avg}}(\varepsilon)=1$. При $N>1$ ситуация немного более интересна.

Теорема 3.1. *Пусть выполнено условие* (14) *при* $N > 1$. *Тогда при любом* $\varepsilon \in (0,1)$

$$0 \leqslant n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) - (1-\varepsilon^2)\, N^d < 1, \quad d \in \mathbb{N}.$$

Следствие 3.1. *При тех же условиях верна асимптотика*

$$n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) = (1-\varepsilon^2)\, N^d\, (1+o(1)), \quad d \to \infty.$$

Перейдем к невырожденному случаю $\sigma^2 > 0$. Следующие два результата показывают, что при дополнительных моментных предположениях для случайных величин $(U_l)_{l\in\mathbb{N}}$ вид точной асимптотики n_d^{avg} при $d \to \infty$ зависит от природы распределения этих величин, а именно: имеют ли они *решетчатую* структуру или нет.

Напомним, что случайная величина U имеет *решетчатое распределение*, если с вероятностью 1 принимает значения вида $A + b\,\nu$, $\nu \in \mathbb{Z}$, $A \in \mathbb{R}$, $b > 0$. Число b называется *шагом распределения*. Если ни при каких A' и $b' > b$ значения, принимаемые случайной величиной U с вероятностью 1, не могут быть записаны в виде $A' + b'\,\nu, \nu \in \mathbb{Z}$, то шаг b называется *максимальным*. Остальные дискретные (невырожденные) распределения называют *нерешетчатыми*.

Теорема 3.2. *Пусть* $(U_l)_{l\in\mathbb{N}}$ *имеют невырожденное нерешетчатое распределение и* $\mathbf{E}\,|U_l|^3 < \infty$. *Тогда при любом* $\varepsilon \in (0,1)$

$$n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) = \mathcal{E}^d\, e^{2qd^{1/2}}\, \frac{C}{d^{1/2}}\, (1+o(1)), \quad d \to \infty,$$

где $q = q(\varepsilon)$ *выбирается из равенства* (12), $\mathcal{E}$ – *из* (13),

$$C = \frac{e^{2\tilde q}}{2\sigma}\, \Phi'(q/\sigma), \quad \tilde q = \big((q/\sigma)^2 - 1\big)\frac{\alpha_3}{6\sigma^2}, \quad \alpha_3 := \mathbf{E}\,(U_l - M)^3. \qquad (15)$$

Теорема 3.3. *Пусть* $(U_l)_{l\in\mathbb{N}}$ *имеют невырожденное решетчатое распределение с максимальным шагом* b *и* $\mathbf{E}\,|U_l|^3 < \infty$. *Тогда при любом* $\varepsilon \in (0,1)$

$$n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) = \mathcal{E}^d\, e^{2qd^{1/2}}\, \frac{C}{d^{1/2}}\, B_d\, (1+o(1)), \quad d \to \infty,$$

где $q = q(\varepsilon)$ *выбирается из равенства* (12), $\mathcal{E}$ – *из* (13),

$$B_d = 2b\, e^{2bs_d} \left(\frac{1}{1-e^{-2b}} - (s_d + 1/2)\right), \qquad s_d \in [-1/2, 1/2),$$

коэффициенты C *и* $\tilde q$ *определяются формулами из* (15).

Замечание 3.1. Верно предельное соотношение $\lim\limits_{b\to 0} B_d = 1$.

Замечание 3.2. О значениях s_d см. ниже в замечании 4.2.

Замечание 3.3. Точные асимптотики величины n_d^{avg} в решетчатом и нерешетчатом случаях исследовались ранее в работе [3], но значения постоянных в ней ошибочны.

§4. Доказательства

Доказательство теоремы 3.1. Пусть $\varepsilon \in (0,1)$ и при некотором $N > 1$ выполнено (14), тогда

$$\begin{aligned} \bar\lambda_{d,m}^2 &= \lambda(1)^{2d}\,\mathbf{1}_{[\,1,N^d\,]}(m), \quad m \in \mathbb{N}, \\ \Lambda^d &= \lambda(1)^{2d}\,N^d. \end{aligned}$$

По определению (5) сложности n_d^{avg} имеем двойное неравенство

$$\bar\lambda_{d,1}^2 + \cdots + \bar\lambda_{d,n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)-1}^2 < (1-\varepsilon^2)\,\Lambda^d \leqslant \bar\lambda_{d,1}^2 + \cdots + \bar\lambda_{d,n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}^2.$$

Тогда в силу предыдущих замечаний имеем

$$n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) - 1 < (1-\varepsilon^2)\,N^d \leqslant n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\,,$$

что приводит к искомому результату. □

Для доказательства остальных теорем нам потребуются несколько вспомогательных утверждений.

Введем обозначения:

$$Z_d := \frac{\sum_{l=1}^d U_l - Md}{\sigma d^{1/2}}, \tag{16}$$

$$F_d(z) := \mathbf{P}\,(Z_d \leqslant z) = \mathbf{P}\left(\sum_{l=1}^d U_l \leqslant -\ln\zeta\right), \tag{17}$$

где $\zeta := \exp\left\{-Md - \sigma z d^{1/2}\right\}$. По лемме 2.1 будем иметь

$$F_d(z) = \sum_{m\in\mathbb{N}:\,\bar\lambda_{d,m}\geqslant\zeta} \frac{\bar\lambda_{d,m}^2}{\Lambda^d}. \tag{18}$$

Далее введем квантиль

$$\theta_d = \theta(\varepsilon, d) := \min\left\{z : F_d(z/\sigma) \geqslant 1-\varepsilon^2\right\}, \tag{19}$$

и вспомогательную величину

$$\zeta_d = \zeta(\varepsilon, d) := \exp\big\{ -Md - \theta_d\, d^{1/2}\big\}.$$

Тогда, учитывая (17) и (18), можно записать

$$F_d\,(\theta_d/\sigma) = \sum_{m\in\mathbb{N}:\,\bar\lambda_{d,m}\geqslant\zeta_d} \frac{\bar\lambda_{d,m}^2}{\Lambda^d}.$$

Сделаем замечание о величине ζ_d. С одной стороны, по определению θ_d, имеем

$$\zeta_d = \max\Big\{\zeta : \sum_{m\in\mathbb{N}:\,\bar\lambda_{d,m}\geqslant\zeta} \bar\lambda_{d,m}^2 \geqslant (1-\varepsilon^2)\,\Lambda^d\Big\}, \tag{20}$$

а с другой, по определению (5) для n_d^{avg} ясно, что

$$\zeta_d = \bar\lambda_{d,n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}. \tag{21}$$

Введем для последовательности $(\bar\lambda_{d,m})_{m\in\mathbb{N}}$ *считающую функцию* $\mathcal{N}_d\colon\mathbb{R}\to\mathbb{N}$

$$\mathcal{N}_d(x) := \#\{m\in\mathbb{N} : \bar\lambda_{d,m}\geqslant x\}$$

и *функцию поправки* $\mathcal{R}_d\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\mathcal{R}_d(x) := \frac{1}{x^2}\Big(\sum_{m\in\mathbb{N}:\,\bar\lambda_{d,m}\geqslant x}\bar\lambda_{d,m}^2 - (1-\varepsilon^2)\,\Lambda^d\Big). \tag{22}$$

Лемма 4.1. *Пусть $0<\sigma^2<\infty$. Тогда для произвольного $d\in\mathbb{N}$ верны соотношения*

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_d(x_d) &= \mathcal{E}^d\, e^{2g_d d^{1/2}} \int\limits_{-\infty}^{g_d/\sigma} e^{2\sigma d^{1/2}(z-g_d/\sigma)}\,\mathrm{d}F_d(z),\\
\mathcal{R}_d(x_d) &= \mathcal{E}^d\, e^{2g_d d^{1/2}} \big(F_d\,(g_d/\sigma) - \Phi\,(q/\sigma)\big).
\end{aligned} \tag{23}$$

где величина $g_d := (-\ln x_d - Md)/d^{1/2}$.

Доказательство. В силу определений (6) и (8) и свойства (7)

$$\mathcal{N}_d(x_d) = \sum_{m\in\mathbb{N}:\,\bar\lambda_{d,m}\geqslant x_d} \frac{\bar\lambda_{d,m}^2}{\bar\lambda_{d,m}^2} = \sum_{\substack{v\in\mathcal{V}^d_{[x_d,+\infty)}\\ v=(v_1,\ldots,v_d)}} \left(\tau_d(v)\prod_{l=1}^d \frac{v_l^2}{v_l^2}\right)$$

$$= \Lambda^d \sum_{\substack{v\in\mathcal{V}^d_{[x_d,+\infty)}\\ v=(v_1,\ldots,v_d)}} \prod_{l=1}^d \left(\frac{1}{v_l^2}\cdot\tau_1(v_l)\,\frac{v_l^2}{\Lambda}\right).$$

Переходя к вспомогательному распределению (9), получим

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_d(x_d) &= \Lambda^d \sum_{\substack{v\in\mathcal{V}^d_{[x_d,+\infty)}\\ v=(v_1,\ldots,v_d)}} e^{-2\sum_{l=1}^d \ln v_l}\prod_{l=1}^d \mathbf{P}\left(U_l=-\ln v_l\right)\\ &= \Lambda^d\,\mathbf{E}\,e^{2\sum_{l=1}^d U_l}\mathbf{1}_{(-\infty,-\ln x_d]}\Big(\sum\nolimits_{l=1}^d U_l\Big).\end{aligned}$$

Обозначим $g_d := (-\ln x_d - Md)/d^{1/2}$. Для центрированных и нормированных сумм Z_d с учётом определений (13), (16) и (17) будем иметь

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_d(x_d) &= \Lambda^d\,e^{2Md}\,\mathbf{E}\,e^{2\sigma d^{1/2}Z_d}\,\mathbf{1}_{(-\infty,\,g_d/\sigma]}\,(Z_d)\\ &= \mathcal{E}^d\,e^{2g_d d^{1/2}}\int\limits_{-\infty}^{g_d/\sigma} e^{2\sigma d^{1/2}(z-g_d/\sigma)}\,\mathrm{d}F_d(z).\end{aligned}$$

Для поправочного члена (22), исходя из (12), (17) и (18), верно

$$\mathcal{R}_d(x_d) = \frac{\Lambda^d}{x_d^2}\big(F_d\left(g_d/\sigma\right)-\Phi\left(q/\sigma\right)\big) = \mathcal{E}^d\,e^{2g_d d^{1/2}}\big(F_d\left(g_d/\sigma\right)-\Phi\left(q/\sigma\right)\big).$$

□

Замечание 4.1. В частности, при $x_d=\zeta_d$ получим соотношения для величин $\mathcal{N}_d(\zeta_d)$ и $\mathcal{R}_d(\zeta_d)$, выраженные через $g_d=\theta_d$.

Следующая лемма выявляет связь $\mathcal{N}_d$ и $\mathcal{R}_d$ со сложностью n_d^{avg}.

Лемма 4.2. *Пусть $0<\sigma^2<\infty$. Тогда для произвольного $\varepsilon\in(0,1)$ и любого $d\in\mathbb{N}$ верно двойное неравенство*

$$0\leqslant n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)-\left(\mathcal{N}_d(\zeta_d)-\mathcal{R}_d(\zeta_d)\right)<1. \tag{24}$$

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon \in (0,1)$. Опираясь на определение (5) для n_d^{avg} и учитывая замечания (20) и (21), можно записать

$$\bar{\lambda}_{d,1}^2 + \ldots + \bar{\lambda}_{d,n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)-1}^2 < (1-\varepsilon^2)\,\Lambda^d \leqslant \bar{\lambda}_{d,1}^2 + \ldots + \bar{\lambda}_{d,n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}^2 \leqslant \sum_{m\in\mathbb{N}:\,\bar{\lambda}_{d,m}\geqslant\zeta_d} \bar{\lambda}_{d,m}^2,$$

а также

$$\begin{aligned}
&\bar{\lambda}_{d,1}^2 + \ldots + \bar{\lambda}_{d,n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)-1}^2 \\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}:\,\bar{\lambda}_{d,m}\geqslant\zeta_d} \bar{\lambda}_{d,m}^2 - \zeta_d^2\left(\mathcal{N}_d(\zeta_d) - n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) + 1\right) < (1-\varepsilon^2)\,\Lambda^d, \\
&\bar{\lambda}_{d,1}^2 + \ldots + \bar{\lambda}_{d,n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}^2 \\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}:\,\bar{\lambda}_{d,m}\geqslant\zeta_d} \bar{\lambda}_{d,m}^2 - \zeta_d^2\left(\mathcal{N}_d(\zeta_d) - n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\right) \geqslant (1-\varepsilon^2)\,\Lambda^d.
\end{aligned}$$

Далее, сочетая последние соотношения, несложно получить искомое неравенство (24). □

Утверждение 4.1. *Пусть $(U_l)_{l\in\mathbb{N}}$ имеют невырожденное нерешетчатое распределение и $\mathbf{E}\,|U_l|^3 < \infty$. Тогда для произвольного $\varepsilon \in (0,1)$ квантиль θ_d удовлетворяет при $d \to \infty$ асимптотическим равенствам:*

$$1) \quad \theta_d = q + \frac{\tilde{q}}{d^{1/2}} + o\left(d^{-1/2}\right), \tag{25}$$

$$2) \quad F_d\left(\theta_d/\sigma\right) - \Phi\left(q/\sigma\right) = o(d^{-1/2}), \tag{26}$$

где $q = q(\varepsilon)$ выбирается из равенства (12),

$$\tilde{q} := \left((q/\sigma)^2 - 1\right)\frac{\alpha_3}{6\sigma^2}, \quad \alpha_3 := \mathbf{E}\,(U_l - M)^3\,. \tag{27}$$

Доказательство. Возьмём малое $h > 0$. По центральной предельной теореме Леви будем иметь с одной стороны

$$\lim_{d\to\infty} F_d\left(\frac{q+h}{\sigma}\right) \quad = \quad \Phi\left(\frac{q+h}{\sigma}\right) > 1 - \varepsilon^2$$

и с другой

$$\lim_{d\to\infty} F_d\left(\frac{q-h}{\sigma}\right) \quad = \quad \Phi\left(\frac{q-h}{\sigma}\right) < 1 - \varepsilon^2.$$

Следовательно, при достаточно больших d:

$$F_d\left(\frac{q-h}{\sigma}\right) < 1-\varepsilon^2 < F_d\left(\frac{q+h}{\sigma}\right).$$

Тогда по определению θ_d имеем $q-h < \theta_d \leqslant q+h$, т.е. $\lim\limits_{d\to\infty} \theta_d = q$.

По предположению $(U_l)_{l\in\mathbb{N}}$ нерешетчаты и имеют $\mathbf{E}\,|U_l|^3 < \infty$. Тогда для $F_d(z)$ при $d\to\infty$ можно воспользоваться разложением (теорема 21 §7 главы V в [2])

$$F_d(z) = \Phi(z) + \frac{Q_1(z)}{d^{1/2}} + o(d^{-1/2}), \tag{28}$$

равномерно относительно $z\in\mathbb{R}$. Здесь

$$Q_1(z) := -\Phi'(z)\,(z^2-1)\,\frac{\alpha_3}{6\sigma^3}, \tag{29}$$

где $\alpha_3 := \mathbf{E}\,(U_l - M)^3$.

Для любого фиксированного $c\in\mathbb{R}$ применим (28) для разности

$$\begin{aligned}
&F_d\left(\frac{q}{\sigma}+\frac{c}{\sigma d^{1/2}}\right) - \Phi\left(\frac{q}{\sigma}\right)\\
&= \Phi\left(\frac{q}{\sigma}+\frac{c}{\sigma d^{1/2}}\right) - \Phi\left(\frac{q}{\sigma}\right) + \frac{Q_1\left(\frac{q}{\sigma}+\frac{c}{\sigma d^{1/2}}\right)}{d^{1/2}} + o(d^{-1/2})\\
&= \frac{\Phi'\,(q/\sigma)\,c}{\sigma d^{1/2}} + \frac{Q_1\,(q/\sigma)}{d^{1/2}} + o(d^{-1/2}), \quad d\to\infty.
\end{aligned}$$

Пусть

$$\frac{\tilde q}{\sigma} := -\frac{Q_1\,(q/\sigma)}{\Phi'\,(q/\sigma)} = \Big((q/\sigma)^2 - 1\Big)\,\frac{\alpha_3}{6\sigma^3}. \tag{30}$$

Фиксируем малое $h>0$. Если принять $c = \tilde q + h$, то при больших d будем иметь

$$F_d\left(\frac{q}{\sigma}+\frac{\tilde q + h}{\sigma d^{1/2}}\right) - \Phi\left(\frac{q}{\sigma}\right) = \frac{\Phi'\,(q/\sigma)\,h}{\sigma d^{1/2}} + o(d^{-1/2}) > 0,$$

если же взять $c = \tilde q - h$, то при больших d

$$F_d\left(\frac{q}{\sigma}+\frac{\tilde q - h}{\sigma d^{1/2}}\right) - \Phi\left(\frac{q}{\sigma}\right) = -\frac{\Phi'\,(q/\sigma)\,h}{\sigma d^{1/2}} + o(d^{-1/2}) < 0.$$

Следовательно, в силу определения θ_d при достаточно больших d получим

$$\frac{q}{\sigma} + \frac{\tilde q - h}{\sigma d^{1/2}} < \frac{\theta_d}{\sigma} \leqslant \frac{q}{\sigma} + \frac{\tilde q + h}{\sigma d^{1/2}}.$$

В итоге искомая асимптотика имеет вид

$$\theta_d = q + \frac{\tilde{q}}{d^{1/2}} + o(d^{-1/2}), \quad d \to \infty.$$

Остается заметить, используя разложение (28) совместно с предыдущим равенством и (30), что при $d \to \infty$ верно

$$\begin{aligned} F_d\,(\theta_d/\sigma) - \Phi\,(q/\sigma) &= \Phi(\theta_d/\sigma) - \Phi\,(q/\sigma) + \frac{Q_1(\theta_d/\sigma)}{d^{1/2}} + o(d^{-1/2}) \\ &= \Phi'(q/\sigma)\,(\theta_d/\sigma - q/\sigma) + \frac{Q_1(q/\sigma)}{d^{1/2}} + o(d^{-1/2}) \\ &= \frac{\Phi'(q/\sigma)\,\tilde{q}}{\sigma d^{1/2}} + \frac{Q_1(q/\sigma)}{d^{1/2}} + o(d^{-1/2}) = o(d^{-1/2}). \end{aligned}$$

□

Утверждение 4.2. *Пусть $(U_l)_{l\in\mathbb{N}}$ имеют невырожденное нерешетчатое распределение и $\mathbf{E}\,|U_l|^3 < \infty$. Тогда для произвольного $\varepsilon \in (0,1)$ и $\omega \in \mathbb{R}$*

$$\mathcal{N}_d(\zeta_d\, e^{-\omega}) = \mathcal{E}^d\, e^{2qd^{1/2}} \frac{C}{d^{1/2}}\, e^{2\omega}\,(1+o(1)), \quad d \to \infty,$$

где $q = q(\varepsilon)$ выбирается из равенства (12), $\mathcal{E}$ – из (13),

$$C = \frac{e^{2\tilde{q}}}{2\sigma}\,\Phi'(q/\sigma), \qquad \tilde{q} = \Big((q/\sigma)^2 - 1\Big)\,\frac{\alpha_3}{6\sigma^2}, \qquad \alpha_3 := \mathbf{E}\,(U_l - M)^3. \tag{31}$$

Доказательство. Пусть $\zeta_d^\omega := \zeta_d\, e^{-\omega}$. В соответствии с леммой 4.1, для $\mathcal{N}_d(\zeta_d^\omega)$ верно соотношение

$$\mathcal{N}_d(\zeta_d^\omega) = \mathcal{E}^d\, e^{2\theta_d^\omega d^{1/2}} \int\limits_{-\infty}^{\theta_d^\omega/\sigma} e^{2\sigma d^{1/2}(z - \theta_d^\omega/\sigma)}\, \mathrm{d}F_d(z), \tag{32}$$

где

$$\theta_d^\omega := (-\ln \zeta_d^\omega - Md)/d^{1/2} = \theta_d + \frac{\omega}{d^{1/2}}. \tag{33}$$

Рассмотрим отдельно интеграл

$$
\begin{aligned}
I &:= \int\limits_{-\infty}^{\theta_d^\omega/\sigma} e^{2\sigma d^{1/2}(z-\theta_d^\omega/\sigma)}\, \mathrm{d}F_d(z) \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\theta_d^\omega/\sigma} e^{2\sigma d^{1/2}(z-\theta_d^\omega/\sigma)}\, \mathrm{d}\big(F_d(z) - F_d\left(\theta_d^\omega/\sigma\right)\big) \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\theta_d^\omega/\sigma} \big(F_d\left(\theta_d^\omega/\sigma\right) - F_d(z)\big)\, \mathrm{d}\left(e^{2\sigma d^{1/2}(z-\theta_d^\omega/\sigma)}\right).
\end{aligned}
$$

В условиях теоремы мы вправе разложить F_d по формуле (28), а затем проинтегрировать по частям:

$$
I = \int\limits_{-\infty}^{\theta_d^\omega/\sigma} e^{2\sigma d^{1/2}(z-\theta_d^\omega/\sigma)}\, \mathrm{d}\left(\Phi(z) + \frac{Q_1(z)}{d^{1/2}}\right) + o(d^{-1/2}).
$$

Далее, снова интегрируем по частям:

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{\Phi'(\theta_d^\omega/\sigma)}{2\sigma d^{1/2}} + o(d^{-1/2}) \\
&\quad - \frac{1}{2\sigma d^{1/2}} \int\limits_{-\infty}^{\theta_d^\omega/\sigma} e^{2\sigma d^{1/2}(z-\theta_d^\omega/\sigma)} \left(\Phi''(z) + \frac{Q_1''(z)}{d^{1/2}}\right) \mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

На самом деле последним интегральным членом, обозначим его $\tilde{I}$, можно пренебречь

$$
\begin{aligned}
|\tilde{I}| &\leqslant \frac{1}{2\sigma d^{1/2}} \sup_{z\leqslant\theta_d^\omega/\sigma} \left|\Phi''(z) + \frac{Q_1''(z)}{d^{1/2}}\right| \int\limits_{-\infty}^{\theta_d^\omega/\sigma} e^{2\sigma d^{1/2}(z-\theta_d^\omega/\sigma)}\, \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{(2\sigma d^{1/2})^2} \sup_{z\leqslant\theta_d^\omega/\sigma} \left|\Phi''(z) + \frac{Q_1''(z)}{d^{1/2}}\right| = o(d^{-1/2}), \quad d\to\infty.
\end{aligned}
$$

С учетом (33) и разложения (25) из утверждения 4.1 в итоге получим

$$
I = \frac{\Phi'(\theta_d^\omega/\sigma)}{2\sigma d^{1/2}} + o(d^{-1/2}) = \frac{\Phi'(q/\sigma)}{2\sigma d^{1/2}}\,(1 + o(1)), \quad d\to\infty. \tag{34}
$$

Возвращаясь к (32) и снова применяя (25) и (33), окончательно разложим

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_d(\zeta_d^\omega) = \mathcal{N}_d(\zeta_d\, e^{-\omega}) &= \mathcal{E}^d\, e^{2\theta_d^\omega d^{1/2}}\, \frac{\Phi'(q/\sigma)}{2\sigma d^{1/2}}\,(1+o(1)) \\ &= \mathcal{E}^d\, e^{2qd^{1/2}}\, \frac{\Phi'(q/\sigma)\, e^{2\tilde{q}}}{2\sigma d^{1/2}}\, e^{2\omega}\,(1+o(1)), \quad d\to\infty.\end{aligned}$$

□

Доказательство теоремы 3.2. Для нахождения точной асимптотики $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ при $d\to\infty$, в силу леммы 4.2, достаточно знать асимптотическое поведение величин $\mathcal{N}_d(\zeta_d)$ и $\mathcal{R}_d(\zeta_d)$.

Применяя утверждение 4.2 с параметром $\omega = 0$, получим

$$\mathcal{N}_d(\zeta_d) = \mathcal{E}^d\, e^{2qd^{1/2}}\, \frac{C}{d^{1/2}}\,(1+o(1)), \quad d\to\infty,$$

где константа C определяется формулами из (31).

Для величины $\mathcal{R}_d(\zeta_d)$ по формуле (26) утверждения 4.1 имеем

$$F_d\,(\theta_d/\sigma) - \Phi(q/\sigma) = o(d^{-1/2}), \quad d\to\infty.$$

Учитывая (23) и (25), получим

$$\mathcal{R}_d(\zeta_d) \;=\; \mathcal{E}^d\, e^{2\theta_d d^{1/2}}\cdot o(d^{-1/2}) = \mathcal{E}^d\, e^{2qd^{1/2}}\cdot o(d^{-1/2}), \quad d\to\infty.$$

Наконец, подставив найденные разложения для $\mathcal{N}_d(\zeta_d)$ и $\mathcal{R}_d(\zeta_d)$ в (24), для n_d^{avg} получим при $d\to\infty$

$$n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) \;=\; \big(\mathcal{N}_d(\zeta_d) - \mathcal{R}_d(\zeta_d)\big)\,(1+o(1)) = \mathcal{E}^d\, e^{2qd^{1/2}}\, \frac{C}{d^{1/2}}\,(1+o(1)).$$

□

Утверждение 4.3. *Пусть $(U_l)_{l\in\mathbb{N}}$ имеют невырожденное решетчатое распределение, принимают значения из множества*

$$\{(M+a) + b\nu : \nu\in\mathbb{Z}\}$$

с максимальным шагом b и $\mathbf{E}\,|U_l|^3 < \infty$. Тогда для произвольного $\varepsilon\in(0,1)$ квантиль θ_d удовлетворяет при $d\to\infty$ асимптотическим равенствам:

$$1)\quad \theta_d = q + \frac{\tilde{q}}{d^{1/2}} + \frac{b}{d^{1/2}}\, s_d + o(d^{-1/2}), \tag{35}$$

$$2)\quad F_d\,(\theta_d/\sigma) - \Phi(q/\sigma) = \frac{b(s_d+1/2)}{\sigma d^{1/2}}\,\Phi'(q/\sigma) + o(d^{-1/2}), \tag{36}$$

где $q = q(\varepsilon)$ *выбирается из равенства* (12), *коэффициенты* $\tilde{q}$ *и* α_3 *определены в* (27), *значение* $s_d \in [-1/2, 1/2)$ *при любом* $d \in \mathbb{N}$.

Замечание 4.2. Параметры s_d определяется формулами (49), (46) и (19).

Доказательство. Пусть величины $(U_l)_{l\in\mathbb{N}}$ принимают значения вида

$$(M+a)+b\nu, \quad \nu \in \mathbb{Z},$$

где число b – максимальный шаг распределения. Тогда значения величин Z_d, а значит, и точки роста $F_d(z)$, принадлежат множеству

$$P_d := \left\{ \frac{ad+bk}{\sigma d^{1/2}} : k \in \mathbb{Z} \right\}. \tag{37}$$

По предположению $(U_l)_{l\in\mathbb{N}}$ имеют $\mathbf{E}\,|U_l|^3 < \infty$. Тогда для $F_d(z)$ при $d \to \infty$ можно воспользоваться разложением (теорема 3 главы IV в [4])

$$F_d(z) = \Phi(z) + \frac{Q_1(z)}{d^{1/2}} + \frac{S_d(z)\,\Phi'(z)}{d^{1/2}} + o(d^{-1/2}), \tag{38}$$

равномерно относительно $z \in \mathbb{R}$. Здесь $Q_1(z)$ определяется формулой (29), а дискретная компонента S_d находится следующим образом:

$$S_d(z) := \frac{b}{\sigma}\, S\left(\frac{z\sigma d^{1/2} - ad}{b}\right),$$

где $S(z) := [z] - z + 1/2$.

Для удобства условимся, что

$$\operatorname{sign}(z) = \begin{cases} +1, & z \geqslant 0; \\ -1, & z < 0. \end{cases}$$

Примем $r_d := b/(2\sigma d^{1/2})$. Функция S_d является $(2r_d)$-периодической, терпит разрыв слева в каждой точке из P_d. Несложно заметить, если $p \in P_d$, то

$$S_d(z) = \begin{cases} -d^{1/2}\,(z-p-r_d), & z \in [p, p+r_d]; \\ -d^{1/2}\,(z-p+r_d), & z \in (p-r_d, p); \end{cases} \tag{39}$$

причём

$$S_d(p) - S_d(p-0) = 2r_d\, d^{1/2} = \frac{b}{\sigma}. \tag{40}$$

Поэтому удобно при каждом d ввести функцию $p_d\colon \mathbb{R} \to P_d$, значение которой для любого $z \in \mathbb{R}$ равно точке скачка $p_d(z) \in [z - r_d, z + r_d)$ для функции S_d:

$$p_d(z) := z + \frac{S_d(z)}{d^{1/2}} - \operatorname{sign}\bigl(S_d(z)\bigr)\, r_d. \tag{41}$$

Из определения (19) квантили θ_d и непрерывности справа функции $F_d(z)$ следует, что $\theta_d/\sigma \in P_d$, т.е.

$$\exists k_d \in \mathbb{Z}: \quad \frac{\theta_d}{\sigma} = \frac{ad + bk_d}{\sigma d^{1/2}} \tag{42}$$

и также

$$S_d(\theta_d/\sigma) = \frac{b}{2\sigma}, \tag{43}$$

что найдено из (39). По формуле (41) будем иметь

$$\theta_d/\sigma = p_d(z), \quad z \in (\theta_d/\sigma - r_d, \theta_d/\sigma + r_d]. \tag{44}$$

Определим функцию $\tilde{F}_d$ посредством удаления из разложения (38) для F_d дискретной составляющей, а именно

$$\tilde{F_d}(z) := F_d(z) - \frac{S_d(z)\, \Phi'(z)}{d^{1/2}}. \tag{45}$$

Введем для этой функции вспомогательную квантиль

$$\tilde{\theta_d} = \tilde{\theta}(\varepsilon, d) := \min\{z : \tilde{F}_d(z/\sigma) \geqslant \Phi\,(q/\sigma)\}, \tag{46}$$

и докажем, что $\tilde{\theta_d}/\sigma \in (\theta_d/\sigma - r_d, \theta_d/\sigma + r_d]$.

Действительно, пользуясь определением θ_d и непрерывностью справа $F_d(z)$, будем иметь

$$F_d(\theta_d/\sigma - 0) < \Phi\,(q/\sigma) \leqslant F_d\,(\theta_d/\sigma) = F_d(\theta_d/\sigma + 0),$$

причём $F_d(\theta_d/\sigma \pm 0) = F_d(\theta_d/\sigma \pm r_d)$, так как соседние с θ_d/σ скачки могут быть лишь в точках $\theta_d/\sigma \pm 2r_d$.

Также исходя из соотношения (39), заметим, что $S_d(\theta_d/\sigma \pm r_d) = 0$ и, как следствие, $F_d(\theta_d/\sigma \pm r_d) = \tilde{F}_d(\theta_d/\sigma \pm r_d)$. Тогда

$$\tilde{F}_d(\theta_d/\sigma - r_d) < \Phi\,(q/\sigma) \leqslant \tilde{F}_d(\theta_d/\sigma + r_d),$$

откуда, по определению (46) для $\tilde{\theta_d}$, следует

$$\tilde{\theta_d}/\sigma \in (\theta_d/\sigma - r_d, \theta_d/\sigma + r_d]. \tag{47}$$

Используя (44), будем иметь

$$\theta_d/\sigma = p_d(\tilde{\theta_d}/\sigma). \tag{48}$$

Далее найдем асимптотику $\tilde{\theta_d}$ при $d \to \infty$. Сочетая определение (45) функции $\tilde{F}_d$ с разложением (38), получим, равномерно по $z \in \mathbb{R}$,

$$\tilde{F_d(z)} = \Phi(z) + \frac{Q_1(z)}{d^{1/2}} + o(d^{-1/2}),$$

что идентично разложению (28) для F_d в *нерешетчатом* случае. Поэтому нахождение асимптотики квантили $\tilde{\theta_d}$ функции $\tilde{F}_d$ проводится совершенно аналогично тому, как это делалось в доказательстве утверждения 4.1 для квантили θ_d функции F_d в нерешетчатом случае. В итоге приходим к

$$\tilde{\theta_d} = q + \frac{\tilde{q}}{d^{1/2}} + o(d^{-1/2}), \quad d \to \infty,$$

где $\tilde{q}$ определяется соотношением (27).

Наконец, совмещая (41) и (48), получим

$$\theta_d = \tilde{\theta_d} + \frac{b}{d^{1/2}}\, s_d, \quad d \to \infty, \tag{49}$$

где положено

$$s_d = s_d(\tilde{\theta_d}) := \left(\frac{S_d(\tilde{\theta_d}/\sigma)}{d^{1/2}} - \operatorname{sign}\bigl(S_d(\tilde{\theta_d}/\sigma)\bigr)\, r_d\right)\left(\frac{b}{\sigma d^{1/2}}\right)^{-1}, \quad d \to \infty.$$

Так как $r_d = b/(2\sigma d^{1/2})$, то по условию (47) выполнено $s_d \in [-1/2, 1/2)$.

Остается заметить, используя разложение (38) совместно с (43) и (49), что при $d \to \infty$ верно

$$\begin{aligned}
&F_d\,(\theta_d/\sigma) - \Phi\,(q/\sigma)\\
&= \Phi(\theta_d/\sigma) + \frac{Q_1(\theta_d/\sigma)}{d^{1/2}} + \frac{S_d(\theta_d/\sigma)}{d^{1/2}}\,\Phi'(\theta_d/\sigma) - \Phi\,(q/\sigma) + o(d^{-1/2})\\
&= \Phi'(q/\sigma)\,(\theta_d/\sigma - q/\sigma) + \frac{Q_1(q/\sigma)}{d^{1/2}} + \frac{b}{2\sigma d^{1/2}}\,\Phi'(q/\sigma) + o(d^{-1/2})\\
&= \frac{\Phi'(q/\sigma)\,\tilde{q}}{\sigma d^{1/2}} + \frac{Q_1(q/\sigma)}{d^{1/2}} + \frac{b(s_d + 1/2)}{\sigma d^{1/2}}\,\Phi'(q/\sigma) + o(d^{-1/2})\\
&= \frac{b(s_d + 1/2)}{\sigma d^{1/2}}\,\Phi'(q/\sigma) + o(d^{-1/2}).
\end{aligned}$$

□

Утверждение 4.4. *Пусть $(U_l)_{l\in\mathbb{N}}$ имеют невырожденное решетчатое распределение с максимальным шагом b и $\mathbf{E}\,|U_l|^3 < \infty$. Тогда для* *произвольного* $\varepsilon \in (0,1)$ *и* $\omega \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{N}_d(\zeta_d\, e^{-\omega b}) = \mathcal{E}^d\, e^{2qd^{1/2}}\, \frac{C}{d^{1/2}}\, \frac{2b\, e^{2bs_d}}{1-e^{-2b}}\, e^{2\omega b}\,(1+o(1)), \quad d \to \infty,$$

где $q = q(\varepsilon)$ *выбирается из равенства* (12), $\mathcal{E}$ – *из* (13), *константа* C *определяется формулами из* (31), *а величина* $s_d \in [-1/2, 1/2)$.

Доказательство. Обозначим $\zeta_d^\omega := \zeta_d\, e^{-\omega b}$. В соответствие с леммой 4.1, для $\mathcal{N}_d(\zeta_d^\omega)$ верно соотношение

$$\mathcal{N}_d(\zeta_d^\omega) = \mathcal{E}^d\, e^{2\theta_d^\omega d^{1/2}} \int\limits_{-\infty}^{\theta_d^\omega/\sigma} e^{2\sigma d^{1/2}(z-\theta_d^\omega/\sigma)}\, \mathrm{d}F_d(z), \tag{50}$$

где

$$\theta_d^\omega := (-\ln \zeta_d^\omega - Md)/d^{1/2} = \theta_d + \frac{\omega b}{d^{1/2}}. \tag{51}$$

Рассмотрим отдельно интеграл

$$\begin{aligned} J \;&:=\; \int\limits_{-\infty}^{\theta_d^\omega/\sigma} e^{2\sigma d^{1/2}(z-\theta_d^\omega/\sigma)}\, \mathrm{d}F_d(z) \\ &=\; \int\limits_{-\infty}^{\theta_d^\omega/\sigma} e^{2\sigma d^{1/2}(z-\theta_d^\omega/\sigma)}\, \mathrm{d}\big(F_d(z) - F_d\left(\theta_d^\omega/\sigma\right)\big) \\ &=\; \int\limits_{-\infty}^{\theta_d^\omega/\sigma} \big(F_d\left(\theta_d^\omega/\sigma\right) - F_d(z)\big)\, \mathrm{d}\left(e^{2\sigma d^{1/2}(z-\theta_d^\omega/\sigma)}\right). \end{aligned}$$

В условиях теоремы мы вправе разложить F_d по формуле (38), а затем проинтегрировать по частям, что приведёт к

$$\begin{aligned} J = &\int\limits_{-\infty}^{\theta_d^\omega/\sigma} e^{2\sigma d^{1/2}(z-\theta_d^\omega/\sigma)}\, \mathrm{d}\left(\Phi(z) + \frac{Q_1(z)}{d^{1/2}}\right) \\ &+ \int\limits_{-\infty}^{\theta_d^\omega/\sigma} e^{2\sigma d^{1/2}(z-\theta_d^\omega/\sigma)}\, \mathrm{d}\left(\frac{S_d(z)}{d^{1/2}}\, \Phi'(z)\right) + o(d^{-1/2}), \end{aligned}$$

где асимптотика первого интеграла, назовём его $\tilde{J}$, как легко убедиться, с точностью до $o(d^{-1/2})$ имеет вид (34). Второй интеграл, в силу замечаний о свойствах функции S_d (см. доказательство предыдущего утверждения), вычисляется следующим образом

$$\bar{J} := \int\limits_{-\infty}^{\theta_d^\omega/\sigma} e^{2\sigma d^{1/2}(z-\theta_d^\omega/\sigma)}\,\mathrm{d}\left(\frac{S_d(z)}{d^{1/2}}\,\Phi'(z)\right) = \bar{J}_1 + \bar{J}_2 + \bar{J}_3,$$

где

$$\bar{J}_1 := \int\limits_{-\infty}^{\theta_d^\omega/\sigma} e^{2\sigma d^{1/2}(z-\theta_d^\omega/\sigma)}\left(\frac{S_d'(z)}{d^{1/2}}\,\Phi'(z)\right)\mathrm{d}z,$$

$$\bar{J}_2 := \int\limits_{-\infty}^{\theta_d^\omega/\sigma} e^{2\sigma d^{1/2}(z-\theta_d^\omega/\sigma)}\left(\frac{S_d(z)}{d^{1/2}}\,\Phi''(z)\right)\mathrm{d}z,$$

$$\bar{J}_3 := \sum_{\substack{p_k\in P_d:\\ p_k\leqslant\theta_d^\omega/\sigma}} \big(S_d(p_k) - S_d(p_k-0)\big)\,\frac{\Phi'(p_k)}{d^{1/2}}\,e^{2\sigma d^{1/2}(p_k-\theta_d^\omega/\sigma)},$$

где множество P_d определяется в (37).

Рассмотрим первый интеграл. Используя представление (39) функции S_d, для точек из $\mathbb{R}\backslash P_d$, имеем $S_d'(z) = -d^{1/2}$. Поэтому

$$\begin{aligned}\bar{J}_1 &= -\int\limits_{-\infty}^{\theta_d^\omega/\sigma} e^{2\sigma d^{1/2}(z-\theta_d^\omega/\sigma)}\,\Phi'(z)\,\mathrm{d}z\\ &= -\frac{\Phi'(\theta_d^\omega/\sigma)}{2\sigma d^{1/2}} + \frac{1}{2\sigma d^{1/2}}\int\limits_{-\infty}^{\theta_d^\omega/\sigma} e^{2\sigma d^{1/2}(z-\theta_d^\omega/\sigma)}\,\Phi''(z)\,\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

где последнее выражение было получено интегрированием по частям. Здесь вторым слагаемым можно пренебречь:

$$\frac{1}{2\sigma d^{1/2}}\int\limits_{-\infty}^{\theta_d^\omega/\sigma} e^{2\sigma d^{1/2}(z-\theta_d^\omega/\sigma)}\,\Phi''(z)\,\mathrm{d}z$$

$$\leqslant \frac{1}{2\sigma d^{1/2}} \sup_{z \leqslant \theta_d^\omega/\sigma} |\Phi''(z)| \int\limits_{-\infty}^{\theta_d^\omega/\sigma} e^{2\sigma d^{1/2}(z-\theta_d^\omega/\sigma)}\, \mathrm{d}z$$
$$= \frac{1}{(2\sigma d^{1/2})^2} \sup_{z \leqslant \theta_d^\omega/\sigma} |\Phi''(z)| = o(d^{-1/2}), \quad d \to \infty.$$

Тогда, с учетом (51) и разложения (35) из утверждения 4.3, получим

$$\bar{J}_1 = -\frac{\Phi'(\theta_d^\omega/\sigma)}{2\sigma d^{1/2}} + o(d^{-1/2}) = -\frac{\Phi'(q/\sigma)}{2\sigma d^{1/2}} + o(d^{-1/2}), \quad d \to \infty.$$

Теперь убедимся, что $\bar{J}_2 = o(d^{-1/2})$. Действительно,

$$\begin{aligned} \bar{J}_2 \quad &\leqslant \quad \frac{1}{d^{1/2}} \sup_{z \leqslant \theta_d^\omega/\sigma} |S_d(z)\, \Phi''(z)| \int\limits_{-\infty}^{\theta_d^\omega/\sigma} e^{2\sigma d^{1/2}(z-\theta_d^\omega/\sigma)}\, \mathrm{d}z \\ &= \quad \frac{1}{2\sigma d} \sup_{z \leqslant \theta_d^\omega/\sigma} |S_d(z)\, \Phi''(z)| = o(d^{-1/2}), \quad d \to \infty. \end{aligned}$$

Приступим к рассмотрению $\bar{J}_3$. В силу (40), имеем

$$\bar{J}_3 \quad := \quad \frac{b}{\sigma d^{1/2}} \sum_{\substack{p_k \in P_d: \\ p_k \leqslant \theta_d^\omega/\sigma}} \Phi'(p_k)\, e^{2\sigma d^{1/2}(p_k - \theta_d^\omega/\sigma)}.$$

Используя (51) и (42), заметим, что

$$\frac{\theta_d^\omega}{\sigma} = \frac{\theta_d}{\sigma} + \frac{\omega b}{d^{1/2}} = \frac{b(k_d+\omega)+ad}{\sigma d^{1/2}},$$

где по условию $\omega \in \mathbb{Z}$. Далее имеем

$$\begin{aligned} \bar{J}_3 \quad &= \quad \frac{b}{\sigma d^{1/2}} \sum_{k=-\infty}^{k_d+\omega} \Phi'\left(\theta_d^\omega/\sigma - \frac{b(k_d+\omega-k)}{\sigma d^{1/2}}\right) e^{-2b(k_d+\omega-k)} \\ &= \quad \frac{b}{\sigma d^{1/2}} \sum_{l=0}^{\infty} \Phi'\left(\theta_d^\omega/\sigma - \frac{bl}{\sigma d^{1/2}}\right) e^{-2bl} = \frac{b}{\sigma d^{1/2}}\, R_d. \end{aligned}$$

Полученный ряд R_d сходится равномерно по l, поэтому возможен почленный переход к пределу при $d \to \infty$, т.е.

$$\begin{aligned}\lim_{d\to\infty} R_d &= \sum_{l=0}^{\infty} \lim_{d\to\infty} \left[\Phi'\left(\theta_d^{\omega}/\sigma - \frac{bl}{\sigma d^{1/2}}\right) e^{-2bl}\right] \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \Phi'(q/\sigma)\, e^{-2bl} = \frac{\Phi'(q/\sigma)}{1-e^{-2b}}.\end{aligned}$$

Тогда

$$\bar{J}_3 \;:=\; \frac{b}{\sigma d^{1/2}}\,\frac{\Phi'(q/\sigma)}{1-e^{-2b}} + o(d^{-1/2}), \quad d\to\infty.$$

В итоге, при $d \to \infty$

$$\bar{J} \;=\; \bar{J}_1 + \bar{J}_2 + \bar{J}_3 = -\frac{\Phi'(q/\sigma)}{2\sigma d^{1/2}} + \frac{b}{\sigma d^{1/2}}\,\frac{\Phi'(q/\sigma)}{1-e^{-2b}} + o(d^{-1/2}),$$

Подставив в выражение для J разложение (34) для интеграла $\tilde{J}$ и найденное соотношение для $\bar{J}$, наконец, получим

$$J = \tilde{J} + \bar{J} + o(d^{-1/2}) = \frac{b}{\sigma d^{1/2}}\,\frac{\Phi'(q/\sigma)}{1-e^{-2b}} + o(d^{-1/2}), \quad d\to\infty.$$

Если теперь вернуться к формуле (50) для величины $\mathcal{N}_d(\zeta_d^{\omega})$, то можно записать, с учётом (51) и (35):

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_d(\zeta_d^{\omega}) &= \mathcal{N}_d(\zeta_d\, e^{-\omega b}) = \mathcal{E}^d\, e^{2\theta_d^{\omega} d^{1/2}} J \\ &= \mathcal{E}^d\, e^{2\theta_d d^{1/2}}\,\frac{b}{\sigma d^{1/2}}\,\frac{\Phi'(q/\sigma)}{1-e^{-2b}}\, e^{2\omega b}\,(1+o(1)) \\ &= \mathcal{E}^d\, e^{2qd^{1/2}}\,\frac{b\, e^{2\tilde{q}+2bs_d}}{\sigma d^{1/2}}\,\frac{\Phi'(q/\sigma)}{1-e^{-2b}}\, e^{2\omega b}\,(1+o(1)), \quad d\to\infty.\end{aligned}$$

□

Доказательство теоремы 3.3. Для нахождения точной асимптотики $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ при $d \to \infty$, в силу леммы 4.2, достаточно выявить асимптотическое поведение величин $\mathcal{N}_d(\zeta_d)$ и $\mathcal{R}_d(\zeta_d)$, когда $(U_l)_{l\in\mathbb{N}}$ решетчаты.

Применяя утверждение 4.2 с параметром $\omega = 0$, получим

$$\mathcal{N}_d(\zeta_d) = \mathcal{E}^d\, e^{2qd^{1/2}}\,\frac{C}{d^{1/2}}\,\frac{2b\, e^{2bs_d}}{1-e^{-2b}}\,(1+o(1)), \quad d\to\infty,$$

где константа C определяется формулами из (31), $s_d \in [-1/2, 1/2)$.

Для величины $\mathcal{R}_d(\zeta_d)$ по формуле (36) утверждения 4.3 имеем

$$F_d\,(\theta_d/\sigma) - \Phi(q/\sigma) = \frac{b(s_d+1/2)}{\sigma d^{1/2}}\,\Phi'(q/\sigma) + o(d^{-1/2}).$$

Учитывая (23) и (35), получим

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_d(\zeta_d) &= \mathcal{E}^d\,e^{2\theta_d d^{1/2}}\,\frac{b(s_d+1/2)}{\sigma d^{1/2}}\,\Phi'(q/\sigma)\,(1+o(1))\\ &= \mathcal{E}^d\,e^{2qd^{1/2}}\,\frac{C}{d^{1/2}}\cdot 2b\,e^{2bs_d}\,(s_d+1/2)\,(1+o(1)), \quad d\to\infty.\end{aligned}$$

Наконец, подставив найденные разложения для $\mathcal{N}_d(\zeta_d)$ и $\mathcal{R}_d(\zeta_d)$ в (24), для n_d^{avg} получим при $d\to\infty$

$$n_d^{\mathrm{avg}}\,(\varepsilon) = \mathcal{E}^d\,e^{2qd^{1/2}}\,\frac{C}{d^{1/2}}\cdot 2b\,e^{2bs_d}\left(\frac{1}{1-e^{-2b}} - (s_d+1/2)\right)(1+o(1)).$$

$\square$

Автор признателен М. А. Лифшицу за внимание к этой работе.

Литература

1. Г. Василковский, Г. Возняковский, *Обзор сложности в средней ситуации для линейных многомерных проблем.* — Изв. вузов. Матем. **4** (2009), 3–19.
2. В. В. Петров, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* Наука, М. (1987)
3. Н. А. Сердюкова, *Зависимость сложности аппроксимации случайных полей от размерности.* — Теория вероятн. и ее примен. **54**, No. 2 (2009), 256–270.
4. C.-G. Esseen, *Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace–Gaussian law.* — Acta Math. **77** (1945), 1–125.
5. M. A. Lifshits, E. V. Tulyakova, *Curse of dimentionality in approximation of random fields.* — Probab. Math. Stat. **26**, No. 1 (2006), 97–112.
6. A. Papageorgiou, I. Petras, *Tractability of tensor product problems in the average case setting.* — J. Complexity **27**, N. 3–4 (2011), 273–280.
7. E. Novak, H. Wózniakowski, *Tractability of multivariate problems.* Vol. I: Linear Information, EMS Tracts Math. **6**, European Mathematical Society Publishing House, Zürich (2008).
8. E. Novak, H. Wózniakowski, *Tractability of multivariate problems.* Vol. II: Standart Information for Functionals, EMS Tracts Math. **12**, European Mathematical Society Publishing House, Zürich (2010).
9. E. Novak, I. H. Sloan, J. F. Traub, and H. Wózniakowski, *Essays on the complexity of continuous problems.* European Mathematical Society Publishing House, Zürich (2009).

Khartov A. A. Average approximation of tensor product-type random fields of increasing dimension.

Consider a sequence of random fields $X_d, d \in \mathbb{N}$, given by

$$X_d(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}^d} \prod_{l=1}^{d} \lambda(k_l) \xi_k \prod_{l=1}^{d} \varphi_{k_l}(t_l), \quad t \in [0,1]^d,$$

where $(\lambda(i))_{i\in\mathbb{N}} \in l_2$, $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ is an orthonormal system in $L_2[0,1]$ and $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}^d}$ are non-correlated random variables with zero mean and unit variance. We investigate the exact asymptotic behavior of average-case complexity of approximation to X_d by n-term partial sums providing a fixed level of relative error, as $d \to \infty$. The result depends on existence of lattice structure of $(\lambda(i))_{i\in\mathbb{N}}$.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Старый Петергоф,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: alexeykhartov@gmail.com

Поступило 21 октября 2011 г.