Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 396, 2011 г.

А. Н. Фролов

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ МАЛЫХ УКЛОНЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ИТЕРИРОВАННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

1. Введение

На протяжении многих лет исследованию асимптотического поведения вероятностей малых уклонений различных случайных последовательностей и процессов уделяется большое внимание. К наиболее важным исследованным классам случайных последовательностей и процессов относятся суммы независимых случайных величин, процессы с независимыми приращениями и гауссовские процессы. Изучению асимптотического поведения вероятностей малых уклонений сумм независимых случайных величин и процессов с независимыми приращениями посвящены работы Могульского [1], Боровкова и Могульского [2] и ряд статей из библиографий этих работ. Различные результаты для гауссовских процессов и литература по этому вопросу может быть найдена, например, в обзорах Леду [3], Ли и Шао [4] и Лифшица [5]. Кроме того, мы рекомендуем библиографию, составленную Лифшицем [6] и содержащую на настоящий момент более двухсот пятидесяти работ по малым уклонениям.

Расширение классов случайных процессов, для которых удается найти асимптотику вероятностей малых уклонений, представляет существенный интерес. В этой работе мы получим новые результаты для некоторых итерированных случайных процессов.

Начнем с определения итерированных процессов.

Пусть $\xi(t)$ и $\Lambda(t)$, $t \geqslant 0$, – независимые случайные процессы, заданные на одном вероятностном пространстве. Предположим, что с вероятностью 1 $\Lambda(t)$ принимает неотрицательные вещественные значения

Ключевые слова: вероятности малых уклонений, итерированные процессы, обобщенные пуассоновские процессы, обобщенные процессы восстановления, обобщенные процессы Кокса.

Работа выполнена при поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России", грант No. 2010-1.1-111-128-033.

и имеет непрерывные траектории, начинающиеся в нуле. Случайный процесс $\xi(\Lambda(t))$, $t \geqslant 0$, мы будем называть итерированным процессом.

Ряд важных примеров итерированных процессов возникает при рассмотрении сумм случайного числа независимых случайных величин. Действительно, пусть $\xi(t) = S_{[t]}$, где S_n – сумма n независимых одинаково распределенных случайных величин, $[\cdot]$ – целая часть числа в скобках. Если $\Lambda(t)$ – стандартный пуассоновский процесс, то $\xi(\Lambda(t))$ называется обобщенным пуассоновским процессом. Эти процессы играют важную роль в теории вероятностей и её различных приложениях. В частности, в страховой и финансовой математике такие процессы используются в качестве модели для процесса выплат. Для этой цели используются также обобщенные процессы Кокса и обобщенные процессы восстановления (подробнее см., например, [7]). Если $\Lambda(t)$ – процесс восстановления, то $\xi(\Lambda(t))$ называется обобщенным процессом восстановления. Аналогично, если $\Lambda(t)$ – процесс Кокса, то $\xi(\Lambda(t))$ называется обобщенным процессом Кокса. Отметим, что процесс Кокса сам является итерированным пуассоновским процессом.

Асимптотическое поведение вероятностей малых уклонений обобщенных процессов Кокса было исследовано в работе Фролова [7], а обобщенных процессов восстановления – в работе Мартикайнена, Фролова и Штайнебаха [8].

К другим важным примерам относятся процессы, итерированные самими собой. Например, пусть $w_1(t)$, $w_2(t)$, $t \geqslant 0$, – независимые стандартные винеровские процессы. Положим $w(t) = w_1(t)$ при $t \geqslant 0$ и $w(t) = w_2(-t)$ при $t < 0$. Теперь рассмотрим итерированный процесс $w^{(2)}(t) = w(w(t))$. Кроме того, процедуру итерирования можно проводить любое конечное количество раз. Так мы придем к случайному процессу $w^{(n)}(t) = w^{(n-1)}(w(t))$, $n = 3, 4, \ldots$. Аналогично можно построить подобные процессы по дробному броуновскому движению, строго устойчивым процессам и другим самоподобным процессам. Асимптотическое поведение вероятностей малых уклонений таких итерированных самоподобных процессов было исследовано в работе Аурзады и Лифшица [9].

Отметим, что главное отличие итерированных процессов из работ [7–9] состоит в том, что траектории процесса $\Lambda(t)$ имеют различные свойства.

В настоящей работе мы получим новые результаты об асимптотическом поведении логарифмов вероятностей малых уклонений некоторых итерированных случайных процессов, обобщающие результаты работ [7] и [9]. При этом мы сначала найдем связь между логарифмическими асимптотиками вероятностей $\mathbf{P}\Big(M(\Lambda(t)) \leqslant y_t\Big)$ и $\mathbf{P}\Big(M(t) \leqslant y_t\Big)$, где $M(t)$ – некоторый случайный процесс с положительными, неубывающими траекториями, а y_t – функция такая, что $y_t \to \infty$ при $t \to \infty$. Затем мы возьмем в качестве $M(t)$ такой функционал от траектории процесса $\xi(t)$, логарифмическая асимптотика вероятностей малых уклонений которого известна. В наших примерах мы положим $M(t) = \sup\limits_{0 \leqslant u \leqslant t} |\xi(u)|$. Так как $M(\Lambda(t)) = \sup\limits_{0 \leqslant u \leqslant t} |\xi(\Lambda(u))|$, то это позволит нам найти асимптотику логарифмов вероятностей малых уклонений

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{0 \leqslant u \leqslant t} |\xi(\Lambda(u))| \leqslant y_t\Big)$$

для $\xi(t)$ из различных классов случайных процессов.

2. Результаты

Пусть $M(t), \Lambda(t)$, $t \geqslant 0$, – независимые случайные процессы, заданные на одном вероятностном пространстве. Предположим, что п.н. (почти наверное) $M(0) = \Lambda(0) = 0$, $M(t) < \infty$ и $\Lambda(t) < \infty$ для всех $t > 0$, $M(\infty) = \Lambda(\infty) = \infty$, траектории $M(t)$ не убывают, траектории $\Lambda(t)$ не убывают и непрерывны.

В этом параграфе мы сформулируем некоторые достаточно общие результаты, которые позволяют по известной асимптотике малых уклонений процесса $M(t)$ найти асимптотику малых уклонений итерированного процесса $M(\Lambda(t))$ при различных предположениях о характере асимптотического поведения $\Lambda(t)$. Относительно $M(t)$ мы сделаем следующее предположение:

существуют положительные функции $B(t)$ и $\zeta(t)$, $t > 0$, такие, что $B(t) \to \infty$ и $\zeta(t) \to 0$ при $t \to \infty$, $\limsup\limits_{t \to \infty} B(ct)/B(t) < \infty$ для любого $c > 0$, и соотношение

$$\log \mathbf{P}\Big(M(t) \leqslant y_t\Big) = -t\zeta(y_t)(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad t \to \infty, \tag{1}$$

выполнено для любой положительной функции y_t такой, что $y_t \to \infty$, $y_t = o(B(t))$ и $t\zeta(y_t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

Отметим, что (1) может быть выполнено за счет структуры процесса $M(t)$. Действительно, если $\xi(t)$ – H-самоподобный процесс (т.е. все конечномерные распределения $\xi(ct)$ и $c^H\xi(t)$ совпадают), а $M(t) = \sup\limits_{0\leqslant u\leqslant t^\beta} |\xi(u)|$, $\beta > 0$, то

$$\log \mathbf{P}\Big(M(t) \leqslant y_t\Big) = \log \mathbf{P}\Big(M(1) \leqslant t^{-\beta H} y_t\Big) = -\varrho(t^{-\beta H} y_t),$$

где $\varrho(x) = -\log \mathbf{P}\Big(M(1) \leqslant x\Big)$. Если теперь $y_t = o(t^{\beta H})$ при $t \to \infty$ и $\varrho(x) \sim x^{-\gamma}$ при $x \to 0$, где $\gamma > 0$, то мы приходим к соотношению

$$\log \mathbf{P}\Big(M(t) \leqslant y_t\Big) = -t^{\gamma\beta H} y_t^{-\gamma}(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

При подходящем выборе β мы получим (1). В частности, приведенное рассуждение показывает, что можно вместо t в правой части (1) взять некоторую возрастающую функцию $g(t)$, что приведет к обобщениям результатов, приводимых ниже.

Итак, в дальнейшем мы будем рассматривать соотношение (1) как форму записи результата об асимптотике малых уклонений. В этом случае условия, достаточные для (1), можно будет либо взять из известных результатов, либо получить с помощью известной техники.

Обозначим $\lambda_t = \operatorname{ess\,inf} \Lambda(t)$ и $V_t(\lambda) = \mathbf{P}(\Lambda(t) < \lambda)$.

Наш первый результат содержит условия, при которых асимптотика малых уклонений итерированного процесса $M(\Lambda(t))$ определяется поведением функции λ_t.

Теорема 1. *Пусть $\lambda_t \sim \widetilde{\lambda}_t$ при $t \to \infty$, где $\widetilde{\lambda}_t$ – непрерывная строго возрастающая функция. Пусть $\lambda_t \to \infty$ при $t \to \infty$ и для любого $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{t\to\infty} V_t((1+\varepsilon)\lambda_t) > 0. \tag{2}$$

Тогда

$$\log \mathbf{P}\Big(M(\Lambda(t)) \leqslant y_t\Big) = -\lambda_t \zeta(y_t)(1 + o(1)) \quad \textit{при} \quad t \to \infty \tag{3}$$

для любой положительной функции y_t такой, что $y_t \to \infty$, $y_t = o(B(\widetilde{\lambda}_t))$ и $\lambda_t\zeta(y_t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

Условие (2) выполнено, например, если все случайные величины $\Lambda(t)$ имеют атом одинаковой массы в λ_t.

Перейдем к результатам, в которых (2) выполнено за счет предположений о поведении процесса $\Lambda(t)$.

Наиболее простым и важным примером $\Lambda(t)$ является $\Lambda(t) = \Lambda f(t)$, где Λ – неотрицательная случайная величина, а функция $f(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Поэтому всюду в дальнейшем мы будем использовать следующее его естественное обобщение:

предположим, что существуют положительная, возрастающая, непрерывная функция $f(t)$, $f(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, и неотрицательная случайная величина Λ такие, что распределения $\Lambda(t)/f(t)$ слабо сходятся к распределению Λ при $t \to \infty$.

Заметим, что распределение Λ может быть вырожденным.

Обозначим $\widehat{\lambda} = \operatorname{ess\,inf} \Lambda$.

Сначала мы рассмотрим случай $\widehat{\lambda} > 0$.

Теорема 2. *Пусть $\widehat{\lambda} > 0$ и $\lambda_t/f(t) \to \widehat{\lambda}$ при $t \to \infty$. Тогда*

$$\log \mathbf{P}\Big(M(\Lambda(t)) \leqslant y_t\Big) = -\widehat{\lambda} f(t)\zeta(y_t)(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad t \to \infty \tag{4}$$

для любой положительной функции y_t такой, что $y_t \to \infty$, $y_t = o(B(f(t)))$ и $f(t)\zeta(y_t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

В следующих результатах мы будем предполагать, что $\lambda_t = o(f(t))$ при $t \to \infty$. Более того, возможен случай $\lambda_t = 0$ для всех $t > 0$.

Теорема 3. *Предположим, что $\widehat{\lambda} = 0$ и $\lambda_t/f(t) \to \widehat{\lambda}$ при $t \to \infty$. Тогда*

$$\log \mathbf{P}\Big(M(\Lambda(t)) \leqslant y_t\Big) = o(f(t)\zeta(y_t)) \quad \text{при} \quad t \to \infty \tag{5}$$

для любой положительной функции y_t такой, что $y_t \to \infty$, $y_t = o(B(f(t)))$ и $f(t)\zeta(y_t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

При некоторых дополнительных предположениях можно получить следующий более точный результат.

Теорема 4. *Пусть функция $B(t)$ правильно меняется на бесконечности, $\widehat{\lambda} = 0$ и $\lambda_t/f(t) \to \widehat{\lambda}$ при $t \to \infty$. Предположим, что для любых $t > 0$ функции $F_t(\lambda) = V_t(\lambda f(t))$ и $F(\lambda) = \mathbf{P}(\Lambda < \lambda)$ непрерывны при $\lambda \leqslant \lambda'$ и положительны при $\lambda \in (\lambda_t/f(t), \lambda']$ и $\lambda \in (0, \lambda']$, соответственно, где $\lambda' > 0$. Пусть y_t – положительная функция такая, что $y_t \to \infty$, $y_t = o(B(f(t)))$ и $f(t)\zeta(y_t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Пусть ε_t – решение уравнения*

$$\frac{-\log F_t(\varepsilon_t)}{\varepsilon_t} = f(t)\zeta(y_t).$$

Пусть $\varepsilon_t f(t)$ *эквивалентна некоторой непрерывной строго возрастающей функции. Предположим, что*

$$y_t = o(B(\varepsilon_t f(t))), \quad \lambda_t = o(\varepsilon_t f(t))$$

и для любого $\tau > 0$ *выполняется соотношение*

$$\log F_t(\tau\varepsilon_t) \sim \log F_t(\varepsilon_t) \tag{6}$$

при $t \to \infty$. *Тогда*

$$\begin{aligned} \log \mathbf{P}\Big(M(\Lambda(t)) \leqslant y_t\Big) &= \log F_t(\varepsilon_t)(1+o(1)) \\ &= -\varepsilon_t f(t)\zeta(y_t)(1+o(1)) \quad \textit{при} \quad t \to \infty. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $\varepsilon_t \to 0$ *и* $F_t(\varepsilon_t) \to 0$ *при* $t \to \infty$.

Покажем, что скорости убывания правых частей в соотношениях (4) и (7) могут сильно различаться.

Пусть $F_t(\lambda) \equiv F(\lambda)$ и $\lambda_t = 0$ для всех t. Если, например, $F(\lambda) = \lambda^p$ при $\lambda \in [0,1]$, где $p > 0$, то $\log F_t(\varepsilon_t) \sim -p\log(f(t)\zeta(y_t))$ при $t \to \infty$. Если $F(\lambda) = (-\log\lambda)^{-p}$ при $\lambda \in (0, e^{-1}]$, где $p > 0$, то $\log F_t(\varepsilon_t) \sim -p\log\log(f(t)\zeta(y_t))$ при $t \to \infty$.

Следующий результат показывает, что условие (6) нельзя отбросить.

Теорема 5. *Пусть выполнены все условия теоремы* 4 *кроме условия* (6). *Пусть для любого* $\tau > 0$ *выполняется соотношение* $\log F_t(\tau\varepsilon_t) \sim \tau^p \log F_t(\varepsilon_t)$ *при* $t \to \infty$, *где* $p > 0$. *Тогда*

$$\log \mathbf{P}\Big(M(\Lambda(t)) \leqslant y_t\Big) = o(\varepsilon_t f(t)\zeta(y_t)) \quad \textit{при} \quad t \to \infty.$$

При дополнительных предположениях о функциях $B(t)$ и $\zeta(t)$ некоторые условия теорем 2–5 будут выполнены автоматически.

Замечание 1. Если существуют положительные постоянные d и γ и медленно меняющаяся функция $L(t)$ такие, что $\zeta(t) = t^{-\gamma}L(t)$ и $tB^{-\gamma}(t)L(B(t)) \to d$ при $t \to \infty$, то можно опустить условия $f(t)\zeta(y_t) \to \infty$ и $y_t = o(B(\varepsilon_t f(t)))$ при $t \to \infty$ в теоремах 2–5 и 4–5, соответственно.

Условия замечания отражают тот факт, что обычно в результатах о малых уклонениях функции $B(t)$ и $\zeta(t)$ связаны между собой благодаря структуре рассматриваемого процесса. Так как эта связь не используется в доказательствах теорем 1–5, то мы не предполагали ее существования при формулировке условия (1).

В заключение этого параграфа мы отметим, что если траектории процесса $\Lambda(t)$ не являются неубывающими функциями, то можно взять вместо него процесс $\sup\limits_{0\leqslant u\leqslant t}\Lambda(u)$.

3. Приложения

В этом параграфе мы сформулируем ряд следствий из теорем предыдущего параграфа.

Важную роль в теории вероятностей и ее приложениях играют процессы и итерированные процессы, связанные с суммами независимых случайных величин. Мы рассмотрим сначала такие случайные процессы.

Далее нам понадобится следующий результат Могульского [1] для сумм н.о.р. (независимых одинаково распределенных) случайных величин из областей притяжения устойчивых законов.

Теорема A. *Пусть* $\{\eta_i\}$ *– последовательность н.о.р. случайных величин. Если* $\mathbf{E}\,\eta_1$ *существует, то предположим, что* $\mathbf{E}\,\eta_1 = 0$. *Пусть распределения* $(\eta_1+\eta_2+\dots+\eta_n)/B_n$ *слабо сходятся к строго устойчивому распределению* G_α, $\alpha\in(0,2]$, *с* $G_\alpha((-\infty,0))\in(0,1)$, *где* $\{B_n\}$ *– последовательность положительных постоянных.*

Тогда для любой последовательности положительных чисел $\{x_n\}$ *такой, что* $x_n\to\infty$ *и* $x_n = o(B_n)$ *при* $n\to\infty$, *выполняется соотношение*

$$\log \mathbf{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\eta_1+\eta_2+\dots+\eta_k|\leqslant x_n\Big) = -\,C\,\frac{n}{x_n^\alpha}\,L(x_n)\big(1+o(1)\big)$$

при $n\to\infty$, *где* $L(x) = x^{\alpha-2}\,\mathbf{E}\,\eta_1^2 I\{|\eta_1|<x\}$ *– медленно меняющаяся (на бесконечности) функция,* C *– абсолютная положительная постоянная, зависящая только от распределения* G_α. *Если* $\alpha=2$, *то* $C=\pi^2/8$.

Наш первый результат посвящен малым уклонениям итерированных процессов суммирования н.о.р. случайных величин.

Теорема 6. *Пусть* $\{\eta_i\}$ *– последовательность н.о.р. случайных величин, удовлетворяющих условиям теоремы* A. *Положим*

$$\xi(t) = \eta_1+\eta_2+\dots+\eta_{[t]} \quad \text{и} \quad M(t) = \sup_{0\leqslant u\leqslant t}|\xi(u)|, \quad t\geqslant 0.$$

Обозначим $\zeta(t) = Ct^{-\alpha}L(t)$ *и* $B(t) = B_{[t]}$.

Если $\Lambda(t)$ *удовлетворяет условиям одной из теорем* 1–5, *то выполнено заключение этой теоремы с заменой* $\log \mathbf{P}\Big(M(\Lambda(t)) \leqslant y_t\Big)$ *на* $\log \mathbf{P}\Big(\sup\limits_{0\leqslant u\leqslant t} |\xi(\Lambda(u))| \leqslant y_t\Big)$.

Если сделать конкретные предположения о распределении η_1 и свойствах $\Lambda(t)$, то результат теоремы 6 записывается достаточно просто. Например, если $\Lambda(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, а $\mathbf{E}\,\eta_1 = 0$ и $\mathbf{E}\,\eta_1^2 = 1$, то

$$\log \mathbf{P}\Big(\sup_{0\leqslant u\leqslant t} |\xi(\Lambda(u))| \leqslant y_t\Big) = -\widehat{\lambda}\,\frac{\pi^2}{8}\,\frac{f(t)}{y_t^2}\,(1+o(1)) \quad \text{при} \quad t\to\infty,$$

для любой положительной функции y_t такой, что $y_t \to \infty$ и $y_t = o(\sqrt{[f(t)]})$ при $t\to\infty$.

Заметим, что в теореме A нормирующие постоянные B_n могут быть выбраны так, что

$$\frac{nL(B_n)}{B_n^\alpha} \to d \quad \text{при} \quad n\to\infty,$$

(см., например, Феллер [10, глава XVII, §5]). Поэтому справедливо замечание 1.

Перейдем к малым уклонениям обобщенных процессов Кокса.

Теорема 7. *Пусть* $\{\eta_i\}$ – *последовательность н.о.р. случайных величин, удовлетворяющих условиям теоремы* A. *Пусть* $\nu(t)$ – *стандартный пуассоновский процесс, не зависящий от последовательности* $\{\eta_i\}$. *Положим* $\xi(t) = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_{\nu(t)}$ *и* $M(t) = \sup\limits_{0\leqslant u\leqslant t} |\xi(u)|$, $t \geqslant 0$. *Обозначим* $\zeta(t) = Ct^{-\alpha}L(t)$ *и* $B(t) = B_{[t]}$.

Если $\Lambda(t)$ *удовлетворяет условиям одной из теорем* 1–5, *то выполнено заключение этой теоремы с заменой* $\log \mathbf{P}\Big(M(\Lambda(t)) \leqslant y_t\Big)$ *на* $\log \mathbf{P}\Big(\sup\limits_{0\leqslant u\leqslant t} |\xi(\Lambda(u))| \leqslant y_t\Big)$.

Процесс $\xi(\Lambda(u))$ из теоремы 7 называется обобщенным процессом Кокса. Результаты теоремы 7 получены автором в [7].

Так как процедуру итерирования можно проводить несколько раз, то мы приходим к следующему результату.

Замечание 2. Используя теоремы 1–7, можно получить результаты об асимптотическом поведении логарифмов вероятностей малых уклонений итерированных процессов $\xi(\Lambda^{(m)}(u))$, где $\Lambda^{(m)}(u) = \Lambda^{(m-1)}(\Lambda(u))$, $m = 2, 3, \ldots$.

В силу того, что непрерывным аналогом сумм н.о.р. случайных величин выступают однородные процессы с независимыми приращениями, мы приходим к следующему заключению.

Замечание 3. Используя вместо теоремы A её аналог для однородных процессов с независимыми приращениями из работы Могульского [1] (теорема 4, с. 765), можно получить обобщения теорем 6 и 7 на случай, когда в определении процесса $\xi(t)$ сумма случайных величин η_i заменяется однородным процессом с независимыми приращениями $\eta(t)$.

Перейдем теперь к итерированным обобщенным процессам восстановления. Мы воспользуемся здесь следующим результатом из работы Мартикайнена, Фролова и Штайнебаха [8].

Теорема B. *Пусть $\{(X_i, Y_i)\}$ – последовательность н.о.р. случайных векторов таких, что $\mathbf{E}\, X_1 = \mu \in (0, \infty)$, $\mathbf{P}(Y_1 > 0) = 1$ и $\mathbf{E}\, Y_1 = \varrho \in (0, \infty)$. Обозначим $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ и $R_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ для $n \geqslant 1$, $S_0 = R_0 = 0$, $N(t) = \max\{n : R_n \leqslant t\}$ и $S(t) = S_{N(t)}$ для $t \geqslant 0$. Пусть случайные величины $\eta_i = X_i/\mu - Y_i/\varrho$, $i \geqslant 1$, удовлетворяют условиям теоремы A с $\alpha \in (1, 2]$ и по крайней мере одна из случайных величин X_1 или Y_1 ограничена.*

Тогда для любой положительной функции $\{x_t\}$ такой, что $x_t \to \infty$ и $x_t = o(B_{[t]})$ при $t \to \infty$, выполняется соотношение

$$\log \mathbf{P}\left(\max_{1 \leqslant u \leqslant t} \left| S(u) - \frac{\mu}{\varrho} u \right| \leqslant x_t \right) = -\, C\, \frac{\mu^\alpha}{\varrho}\, \frac{t}{x_t^\alpha}\, L(x_t)\bigl(1 + o(1)\bigr)$$

при $t \to \infty$, где $L(x)$ и C суть, соответственно, функция и постоянная из теоремы A.

Случайный процесс $S(t)$ называется обобщенным процессом восстановления.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия теоремы* B. *Положим*

$$\xi(t) = S(t) - \mu t/\varrho \quad \text{и} \quad M(t) = \sup_{0 \leqslant u \leqslant t} |\xi(u)|, \quad t \geqslant 0.$$

Обозначим $\zeta(t) = C \mu^\alpha \varrho^{-1} t^{-\alpha} L(t)$ и $B(t) = B_{[t]}$.

Если $\Lambda(t)$ *удовлетворяет условиям одной из теорем* 1–5, *то выполнено заключение этой теоремы с заменой* $\log \mathbf{P}\Big(M(\Lambda(t)) \leqslant y_t\Big)$ *на* $\log \mathbf{P}\Big(\sup\limits_{0\leqslant u\leqslant t} |\xi(\Lambda(u))| \leqslant y_t\Big)$.

Заметим, что если $\mathbf{P}(X_1 = 1) = 1$, то $S(t) = N(t)$. В этом случае теорема 8 дает результат для итерированных процессов восстановления.

Для итерированных обобщенных процессов восстановления сохраняется в силе замечание 2.

В случае неограниченных X_1 и Y_1 с конечными дисперсиями вместо теоремы В можно использовать теорему 3 из [8].

Завершим этот параграф упоминанием о том, что результаты, аналогичные теоремам 6 и 7, можно получить для итерированных самоподобных процессов. К самоподобным процессам относятся, в частности, броуновское движение, дробное броуновское движение, строго устойчивые процессы. Кроме того, можно получить соответствующие результаты, если проитерировать итерированные процессы из работы Аурзады и Лифшица [9]. Здесь также остается в силе замечание 2.

4. Доказательства

Обозначим
$$P_t = \mathbf{P}\Big(M(\Lambda(t)) \leqslant y_t\Big).$$

Доказательство теоремы 1. Пусть $\widetilde{\lambda}_t^{-1}$ – функция, обратная к $\widetilde{\lambda}_t$, а y_t – положительная функция такая, что $y_t \to \infty$, $y_t = o(B(\widetilde{\lambda}_t))$ и $\lambda_t \zeta(y_t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

В силу независимости $M(t)$ и $\Lambda(t)$ мы имеем
$$P_t = \int\limits_{\lambda_t}^{\infty} \mathbf{P}\big(M(\lambda) \leqslant y_t\big)\, dV_t(\lambda).$$

Возьмем $\varepsilon \in (0,1)$. Так как $\mathbf{P}\big(M(\lambda) \leqslant y_t\big)$ не возрастает по λ, мы получим
$$P_t \leqslant \mathbf{P}\big(M(\lambda_t) \leqslant y_t\big) \leqslant \mathbf{P}\big(M((1-\varepsilon)\widetilde{\lambda}_t) \leqslant y_t\big)$$
для всех достаточно больших t.

Положим $x_u = y_{\widetilde{\lambda}^{-1}_{u/(1-\varepsilon)}}$, $u > 0$. Тогда $x_u = o(B(u/(1-\varepsilon))) = o(B(u))$ при $u \to \infty$. Возьмем $\delta \in (0,1)$. В силу (1) существует $U = U(\delta)$ такое, что для всех $u > U$ выполняется неравенство

$$\mathbf{P}\big(M(u) \leqslant x_u\big) \leqslant e^{-(1-\delta)u\zeta(x_u)}.$$

Положив $t = \widetilde{\lambda}^{-1}_{u/(1-\varepsilon)}$, заключаем, что неравенство

$$\mathbf{P}\big(M((1-\varepsilon)\widetilde{\lambda}_t) \leqslant y_t\big) \leqslant e^{-(1-\delta)(1-\varepsilon)\widetilde{\lambda}_t\zeta(y_t)}$$

справедливо для всех достаточно больших t. Отсюда следует, что

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log P_t}{\lambda_t \zeta(y_t)} \leqslant -(1-\delta)(1-\varepsilon).$$

Устремляя в последнем соотношении ε и δ к нулю, получаем оценку сверху в (3).

Докажем, что справедлива оценка снизу. Возьмем $\varepsilon > 0$. Используя монотонность $\mathbf{P}\big(M(\lambda) \leqslant y_t\big)$ по λ и условие (2), мы имеем

$$\begin{aligned} P_t &\geqslant \int\limits_{\lambda_t}^{\sqrt{1+\varepsilon}\lambda_t} \mathbf{P}\big(M(\lambda) \leqslant y_t\big)\, dV_t(\lambda) \\ &\geqslant \mathbf{P}\big(M(\sqrt{1+\varepsilon}\lambda_t) \leqslant y_t\big)\, V_t(\sqrt{1+\varepsilon}\lambda_t) \\ &\geqslant \mathbf{P}\big(M((1+\varepsilon)\widetilde{\lambda}_t) \leqslant y_t\big)\, V_t(\sqrt{1+\varepsilon}\lambda_t) \geqslant C\,\mathbf{P}\big(M((1+\varepsilon)\widetilde{\lambda}_t) \leqslant y_t\big) \end{aligned}$$

для всех достаточно больших t, где $C = C(\varepsilon) > 0$.

Положим $x_u = y_{\widetilde{\lambda}^{-1}_{u/(1+\varepsilon)}}$, $u > 0$. Тогда $x_u = o(B(u/(1+\varepsilon))) = o(B(u))$ при $u \to \infty$. Возьмем $\delta > 0$. В силу (1) существует $U = U(\delta)$ такое, что для всех $u > U$ выполняется неравенство

$$\mathbf{P}\big(M(u) \leqslant x_u\big) \geqslant e^{-(1+\delta)u\zeta(x_u)}.$$

Отсюда, положив $t = \widetilde{\lambda}^{-1}_{u/(1+\varepsilon)}$, получим, что

$$\mathbf{P}\big(M((1+\varepsilon)\widetilde{\lambda}_t) \leqslant y_t\big) \geqslant e^{-(1+\delta)(1+\varepsilon)\widetilde{\lambda}_t\zeta(y_t)}$$

для всех достаточно больших t. Следовательно,

$$\log P_t \geqslant \log C - (1+\delta)(1+\varepsilon)\widetilde{\lambda}_t\zeta(y_t)$$

для всех достаточно больших t. Учитывая, что $\lambda_t\zeta(y_t)\to\infty$ при $t\to\infty$, мы приходим к неравенству

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{\log P_t}{\lambda_t\zeta(y_t)}\geqslant -(1+\delta)(1+\varepsilon).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$ и $\delta\to 0$, получим оценку снизу в (3). $\square$

Доказательство теоремы 2. Положим $\widetilde{\lambda}_t=\widehat{\lambda}f(t)$ и покажем, что выполнены условия теоремы 1. Для этого достаточно доказать, что выполняется соотношение (2).

Возьмем $\varepsilon>0$. Выберем $p\in(0,1)$ так, чтобы точка $(1+p\varepsilon)\widehat{\lambda}$ была точкой непрерывности функции распределения Λ. Мы имеем

$$\liminf_{t\to\infty}V_t((1+\varepsilon)\lambda_t)=\liminf_{t\to\infty}\mathbf{P}\Big(\frac{\Lambda(t)}{f(t)}<(1+\varepsilon)\frac{\lambda_t}{f(t)}\Big)$$
$$\geqslant\liminf_{t\to\infty}\mathbf{P}\Big(\frac{\Lambda(t)}{f(t)}<(1+p\varepsilon)\widehat{\lambda}\Big)=\mathbf{P}\big(\Lambda<(1+p\varepsilon)\widehat{\lambda}\big)>0.$$

По теореме 1 соотношение (4) выполнено для любой положительной функции y_t такой, что $y_t=o(B(\widetilde{\lambda}_t))$ при $t\to\infty$. Осталось только заметить, что условие $y_t=o(B(\widetilde{\lambda}_t))$ эквивалентно условию $y_t=o(B(f(t)))$. $\square$

Доказательство теоремы 3. Так как $\log P_T\leqslant 0$, то нам достаточно доказать только соответствующую оценку снизу. Пусть y_t – положительная функция такая, что $y_t\to\infty$, $y_t=o(B(f(t)))$ и $f(t)\zeta(y_t)\to\infty$ при $t\to\infty$.

Возьмем $\varepsilon>0$. Пусть ε – точка непрерывности функции распределения Λ. Так как $\lambda_t=o(f(t))$ при $t\to\infty$, то, используя монотонность по λ вероятности $\mathbf{P}\big(M(\lambda)\leqslant y_t\big)$ так же, как в доказательстве теоремы 1, мы имеем

$$P_t\geqslant\int_{\lambda_t}^{\varepsilon f(t)}\mathbf{P}\big(M(\lambda)\leqslant y_t\big)\,dV_t(\lambda)\geqslant\mathbf{P}\big(M(\varepsilon f(t))\leqslant y_t\big)\,V_t(\varepsilon f(t))$$

для всех достаточно больших t. Так как $V_t(\varepsilon f(t))\to\mathbf{P}\big(\Lambda<\varepsilon\big)>0$ при $t\to\infty$, то

$$P_t\geqslant C_1\,\mathbf{P}\big(M(\varepsilon f(t))\leqslant y_t\big)$$

для всех достаточно больших t, где $C_1=C_1(\varepsilon)>0$.

Возьмем $\delta > 0$. Заметим, что для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ условие $y_t = o(B(\varepsilon f(t)))$ эквивалентно условию $y_t = o(B(f(t)))$. Используя (1) так же, как в доказательстве теоремы 1, получим

$$\mathbf{P}\big(M(\varepsilon f(t)) \leqslant y_t\big) \geqslant e^{-(1+\delta)\varepsilon f(t)\zeta(y_t)}$$

для всех достаточно больших t. Следовательно,

$$\log P_t \geqslant \log C_1 - (1+\delta)\varepsilon f(t)\zeta(y_t)$$

для всех достаточно больших t. Учитывая, что $f(t)\zeta(y_t) \to \infty$ при $t \to \infty$, получим

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\log P_t}{f(t)\zeta(y_t)} \geqslant -(1+\delta)\varepsilon.$$

Переходя в последнем соотношении к пределу при $\varepsilon \to 0$, приходим к (5). □

Доказательство теоремы 4. Положим $b_t = f(t)\zeta(y_t)$. По условию $b_t \to \infty$ при $t \to \infty$. Действуя так же, как в доказательстве теоремы 3 на стр. 172 в [7], мы получим, что $\varepsilon_t \to 0$ и $F_t(\varepsilon_t) \to 0$ при $t \to \infty$.

По построению $\varepsilon_t f(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Заметим, что для любого фиксированного $c > 0$ условие $y_t = o(B(\varepsilon_t f(t)))$ эквивалентно условию $y_t = o(B(c\varepsilon_t f(t)))$.

Рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 1, несложно показать, что

$$\log \mathbf{P}\big(M(c\varepsilon_t f(t)) \leqslant y_t\big) = -c\varepsilon_t f(t)\zeta(y_t)(1+o(1))$$

при $t \to \infty$, где c – произвольная положительная постоянная.

Возьмем $\delta \in (0,1)$. Для всех достаточно больших t выполняется неравенство $\lambda_t \leqslant \varepsilon_t f(t)$. Мы имеем

$$\begin{aligned} P_t &= \int\limits_{\lambda_t}^{\varepsilon_t f(t)} \mathbf{P}\big(M(\lambda) \leqslant y_t\big)\, dV_t(\lambda) + \int\limits_{\varepsilon_t f(t)}^{\infty} \mathbf{P}\big(M(\lambda) \leqslant y_t\big)\, dV_t(\lambda) \\ &\leqslant F_t(\varepsilon_t) + \mathbf{P}\big(M(\varepsilon_t f(t)) \leqslant y_t\big) \\ &= e^{-\varepsilon_t f(t)\zeta(y_t)} + \mathbf{P}\big(M(\varepsilon_t f(t)) \leqslant y_t\big) \leqslant 2e^{-(1-\delta)\varepsilon_t f(t)\zeta(y_t)} \end{aligned}$$

для всех достаточно больших t. Отсюда вытекает оценка сверху в (7).

Возьмем $\tau > 0$. Для всех достаточно больших t выполняется неравенство $\lambda_t \leqslant \tau\varepsilon_t f(t)$. Поэтому

$$P_t \geqslant \int\limits_{\lambda_t}^{\tau\varepsilon_t f(t)} \mathbf{P}\big(M(\lambda) \leqslant y_t\big)\, dV_t(\lambda) \geqslant \mathbf{P}\big(M(\tau\varepsilon_t f(t)) \leqslant y_t\big)\, F_t(\tau\varepsilon_t)$$
$$= e^{-\tau\varepsilon_t f(t)\zeta(y_t)(1+o(1))}\, F_t(\tau\varepsilon_t) = e^{-(1+\tau)\varepsilon_t f(t)\zeta(y_t)(1+o(1))}.$$

Отсюда следует оценка снизу в (7). □

Доказательство теоремы 5. Как и в доказательстве теоремы 3 нам достаточно доказать оценку снизу.

Возьмем $\tau > 0$. Так же, как в доказательстве теоремы 4 мы получим

$$P_t \geqslant e^{-\tau\varepsilon_t f(t)\zeta(y_t)(1+o(1))}\, F_t(\tau\varepsilon_t) = e^{-(\tau^p+\tau)\varepsilon_t f(t)\zeta(y_t)(1+o(1))}$$

при $t \to \infty$. Отсюда следует оценка снизу. □

Доказательство замечания 1. Положим $b_t = f(t)\zeta(y_t)$. Из вида функции $\zeta(t)$ и условий $y_t = o(B(f(t)))$ и $tB^{-\gamma}(t)L(B(t)) \to d$ при $t \to \infty$ следует, что $b_t \to \infty$ при $t \to \infty$. Действуя так же, как в доказательстве теоремы 3 на с. 172–173 в [7], мы получим, что $\varepsilon_t \to 0$, $F_t(\varepsilon_t) \to 0$ и $y_t = o(B(\varepsilon_t f(t)))$ при $t \to \infty$. Детали мы опускаем. □

Теоремы 6 и 7 следуют из теоремы A, теорем 1–5 и замечания 1. Теорема 8 следует из теоремы B, теорем 1–5 и замечания 1.

Литература

1. А. А. Могульский, *Малые уклонения в пространстве траекторий.* — Теория вероятн. и ее примен. **19**, No. 4 (1974), 726–736.
2. А. А. Боровков, А. А. Могульский, *О вероятностях малых уклонений для случайных процессов.* — Труды Инст. матем. СОАН СССР **13** (1989), 147–168.
3. M. Ledoux, *Isoperimetry and Gaussian analysis. Lectures on Probability Theory and Statistics.* — Lect. Notes Math., **1648**, Springer-Verlag, Berlin (1996), 165–294.
4. W. V. Li, Q.-M. Shao, *Gaussian processes: inequalities, small ball probabilities and applications.* — In: C. R. Rao, D. Shanbhag (Eds.), Stochastic Processes: Theory and Methods, Handbook of Statistics, Vol. 19, North-Holland, Amsterdam (2001), 533–597.
5. M. A. Lifshits, *Asymptotic behavior of small ball probabilities.* — In: B. Grigelionis (Ed.), Proceedings of the Seventh Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics, VSP/TEV. Vilnius (1999), 453–468.
6. M. A. Lifshits, *Bibliography of small deviation probabilities* (2010); `http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/smalldev/biblio.pdf`

7. А. Н. Фролов, *О вероятностях малых уклонений обобщенных процессов Кокса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **339** (2006), 163–175.
8. А. И. Мартикайнен, А. Н. Фролов, Й. Штайнебах, *О вероятностях малых уклонений обобщенных процессов восстановления.* — Теория вероятн. и ее примен. **52**, No. 2 (2007), 366–375.
9. F. Aurzada, M. Lifshits, *On the small deviation problem for some iterated processes.* — Electr. J. Probab. **14** (2009), 1992–2010.
10. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* Т. 2. Мир, М., 1967.

Frolov A. N. Limit theorems for small deviation probabilities of some iterated stochastic processes.

We derive logarithmic asymptotics for probabilities of small deviations for some iterated processes. We show that under appropriate conditions, these asymptotics are the same as those of the processes which generate the iterated processes. When these conditions do not hold, the asymptotics of small deviations for iterated processes are quite different. We apply our results to the iterated processes generated by the compound Cox processes and the compound renewal processes.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: Andrei.Frolov@pobox.spbu.ru

Поступило 16 сентября 2011г.