Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 396, 2011 г.

С. А. Товмасян

ХАРАКТЕРИЗАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ РЕГРЕССИОННЫМИ СВОЙСТВАМИ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОРЯДКОВЫХ СТАТИСТИК

В 2007 году появилась статья [1], в которой главным объектом исследований стали характеризации t_2-распределения Стьюдента регрессионными свойствами упорядоченных случайных величин. Случайная величина X имеет t_ν-распределение Стьюдента (распределение Стьюдента с ν степенями свободы, $\nu = 1, 2, 3, \dots$), если ее плотность распределения имеет вид

$$f_\nu(x) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\pi\nu}}\Big(1 + \frac{x^2}{\nu}\Big)^{\frac{\nu+1}{2}}, \quad -\infty < x < \infty, \tag{1}$$

где $\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty x^{s-1}\exp(-x)\,dx$, $s > 0$, обозначает гамма-функцию.

Сформулируем один из результатов, полученный в работе [1]. Пусть независимые случайные величины X_1, X_2 и X_3 имеют одинаковую функцию распределения $F(x)$. Рассмотрим последовательные максимумы $M_1 = X_1$, $M_2 = \max\{X_1, X_2\}$ и $M_3 = \max\{X_1, X_2, X_3\}$. Было показано, что эквивалентными являются следующие два условия:

$$\mathbf{E}(M_1 + M_3 \,|\, M_2 = x) = 3x/2 + \alpha, \tag{2}$$

где α – некоторая константа, и

$$F(x) = F_2((x - 2\alpha)/\sigma), \quad \sigma > 0, \tag{3}$$

где F_2 – функция распределения t_2-распределения Стьюдента:

$$F_2(x) = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{x}{\sqrt{2 + x^2}}\Big), \quad -\infty < x < \infty. \tag{4}$$

Естественным желанием стало обобщить полученный результат на выборки большего объема. В 2008 году в работе [2] была доказана

Теорема 1. *Пусть $X_1, X_2, \dots, X_k, \dots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с конечным математическим ожиданием, функцией распределения $F(x)$ и плотностью распределения*

Ключевые слова: максимальные порядковые статистики, характеризация распределений.

$f(x)$. Пусть также $f(x) > 0$, если $\gamma < x < \delta$, где $\gamma = \inf\{x : F(x) > 0\}$ и $\delta = \sup\{x : F(x) < 1\}$. Тогда для любого фиксированного $k = 2, 3, \ldots$ из равенства

$$\mathbf{E}(M_{k-1} + M_{k+1} \,|\, M_k = x) = \Big(2 - \frac{1}{k}\Big)x + \alpha, \quad \gamma < x < \delta, \tag{5}$$

где α – некоторая константа, а $M_k = \max X_1, X_2, \ldots, X_k$ – последовательные максимумы, следует, что $\gamma = -\infty$, $\delta = +\infty$ и

$$G(x) = c \int\limits_{1/2}^{x} (1-u)^{(\frac{1}{k}-2)} u^{(1-k-\frac{1}{k})}\, du + d, \quad 0 < x < 1, \tag{6}$$

где $G(x) = F^{-1}(x)$ – функция обратная функции распределения F, $c > 0$ и d – некоторые константы.

В настоящей работе получим некоторый более общий тип характеризаций, основанных на регрессионных свойствах максимумов. Будем предполагать, что $X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с конечным математическим ожиданием, функцией распределения $F(x)$ и плотностью $f(x)$ и рассмотрим последовательные максимумы $M_k = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$. Сразу заметим, что от максимумов легко перейти к минимумам, сделав замену $Y = -X$, и получить аналогичные результаты. В дальнейшем будем вести доказательства для максимумов.

Будем использовать формулу, полученную в работе [2]:

$$\mathbf{E}(M_r \,|\, M_k = x) = x\, F^{r-k}(x) + (r-k) \int\limits_{F(x)}^{1} G(y)\, y^{r-k-1}\, dy, \quad r > k, \tag{7}$$

где $G(x) = F^{-1}(x)$ – функция обратная к $F(x)$.

Далее заметим, что при $r = k+1$ формула (7) примет такой вид:

$$\mathbf{E}(M_{k+1} \,|\, M_k = x) = x\, F(x) + \int\limits_{F(x)}^{1} G(y)\, dy. \tag{8}$$

Именно этим соотношением мы существенным образом воспользуемся в следующей части, в которой будет сформулирована и доказана характеризационная теорема.

Зададимся задачей найти те $h(x)$, для которых

$$\mathbf{E}(M_{k+1} \mid M_k = x) = h(x) \tag{9}$$

характеризует распределение $F(x)$. Начнем с простейшего случая, когда $h(x) = x + c, \gamma < x < \delta$, где $\gamma = \inf\{x : F(x) > 0\}$, $\delta = \sup\{x : F(x) < 1\}$, а c – некоторая положительная константа, т.е. рассмотрим равенство $\mathbf{E}(M_{k+1} \mid M_k = x) = x + c$.

Если воспользоваться соотношением (8), то получим:

$$x\,F(x) + \int\limits_{F(x)}^{1} G(y)\,dy = x + c. \tag{10}$$

После дифференцирования правой и левой части получаем, что $F(x)=1$, $\gamma < x < \delta$, то есть X имеет вырожденное распределение. К такому же результату приходим, если рассмотреть случай $h(x) = \alpha x + c$.

Подойдем с другой стороны. Посмотрим, чему равно условное математическое ожидание $\mathbf{E}(M_{k+1} \mid M_k = x)$ в простейшем случае, когда $F(x) = x$, $0 < x < 1$. Получаем, что

$$\mathbf{E}(M_{k+1} \mid M_k = x) = x^2 + \int\limits_{x}^{1} y\,dy = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}. \tag{11}$$

Более того, выясняется, что равенство (11) характеризует равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$.

Возникает проблема: если рассматривать более общие равенства (9), то какие функции $h(x)$ могут фигурировать в правой части этого равенства? Характеризации каких распределений можно получить при соответствующем выборе функций $h(x)$?

Легко получить необходимое для $h(x)$ условие:

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{E}(M_{k+1} \mid M_k = x) = h(x)$, *тогда* $F(x) = h'(x)$.

Доказательство леммы 1. Воспользуемся формулой (8), т.е. рассмотрим равенство

$$xF(x) + \int\limits_{F(x)}^{1} G(y)\,dy = h(x), \quad \text{где} \quad G(x) = F^{-1}(x).$$

Сделаем замену $z = F(x)$. Тогда соотношение перепишется в виде:

$$G(z)z + \int\limits_z^1 G(y)\,dy = h(G(z)).$$

Продифференцируем его по z и упростим:

$$z\,G'(z) = h'(G(z))\,G'(z).$$

Далее, либо $G'(z) = 0$ для каких-то z, либо $h'(G(z)) = z$ или, что то же самое, $h'(x) = F(x)$. То есть, $h(x)$ можно представить в виде:

$$h(x) = \int\limits_\gamma^x F(u)\,du + C,$$

где C – некоторая константа. Вид константы C можно найти из равенства $h(x) = xF(x) + \int\limits_x^\delta u\,dF(u)$. Устремляя x к γ сверху и учитывая, что, если существует $\mathbf{E}\,X$, то $\lim\limits_{x\to\gamma}\int\limits_\gamma^x F(u)\,du = 0$, $\lim\limits_{x\to\gamma}\int\limits_x^\delta F(u)\,du = \mathbf{E}\,X$, получаем, что $C = \mathbf{E}\,X$.

Таким образом, видим, что в качестве $h(x)$ можно брать функции вида:

$$h(x) = \int\limits_\gamma^x F(u)\,du + \int\limits_\gamma^\delta u\,dF(u).$$

□

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 2. *Пусть выполнено соотношение*

$$\mathbf{E}(M_{k+1}\,|\,M_k = x) = h(x),$$

где $h(x)$ имеет вид

$$h(x) = \int\limits_\gamma^x F(u)\,du + \int\limits_\gamma^\delta u\,dF(u).$$

Это возможно тогда и только тогда, когда $F(x) = h'(x)$.

Пример. Рассмотрим $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x > 0$, – функцию распределения экспоненциального закона. Тогда

$$h(x) = \int_0^x (1 - e^{-\lambda u})\, du + \int_0^\infty u\, d(1 - e^{-\lambda u})$$
$$= \Big(x + \frac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\Big) + \frac{1}{\lambda} = x + \frac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda x}.$$

Таким образом, соотношение $\mathbf{E}(M_{k+1} \,|\, M_k = x) = x + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}$ характеризует экспоненциальное распределение.

Литература

1. В. Б. Невзоров, *Экстремумы и t_2-распределение Стьюдента.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **351** (2007), 232–237.
2. Н. М. Марудова, В. Б. Невзоров, *Об одном семействе, содержащем t_2-распределение Стьюдента.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **361** (2008), 57–65.

Tovmasyan S. A. Characterization of distributions by regressional properties of maximal order statistics.

Characterizations of some distributions are given based on some regressional relations for order statistics.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
Санкт-Петербург 198504, Россия
E-mail: sergei_tovmasyan@mail.ru

Поступило 16 сентября 2011г.