Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 396, 2011 г.

Л. В. Розовский

ВЕРОЯТНОСТИ МАЛЫХ УКЛОНЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОТОРЫХ ИМЕЕТ СТЕПЕННОЕ УБЫВАНИЕ В НУЛЕ

§1. Введение и результаты

Рассмотрим независимые копии $\{X_i\}_{i\geqslant 1}$ положительной случайной величины X с распределением V.

Относительно распределения V нами будет предполагаться, что $\operatorname{ess\,inf} V = 0$ и существуют постоянные $b \in (0,1)$, $c_1, c_2 > 1$ и $r_0 > 0$ такие, что при каждом r, $0 < r \leqslant r_0$,

$$c_1\, V(br) \leqslant V(r) \leqslant c_2\, V(br). \tag{1.1}$$

Данное условие является заметным ослаблением предположения о том, что распределение V правильно меняется в нуле.

Обозначим $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n \geqslant 1$. Кроме того, при $h \geqslant 0$ положим

$$L(h) = \mathbf{E}e^{-hX}, \quad m(h) = -\big(\log L(h)\big)', \quad \sigma^2(h) = \big(\log L(h)\big)''. \tag{1.2}$$

Теорема 3 из работы [1] содержит следующий результат.

Теорема 1. *Пусть распределение V абсолютно непрерывно на всей оси с плотностью $p(x)$, такой, что при некотором целом $m \geqslant 1$*

$$\sup_x p^{*m}(x) < \infty \tag{1.3}$$

(*здесь и далее, знак $*$ обозначает операцию свертки*).

Если при некоторой постоянной $C > 0$

$$p(x) \leqslant C\, V(x)/x, \quad 0 < x \leqslant x_0, \tag{1.4}$$

Ключевые слова: суммы независимых случайных величин, плотность распределения, малые уклонения, правильно меняющиеся функции.

Работа поддержана грантом НШ 4472.2010.1 и грантом РФФИ 10-01-00242.

то

$$p^{*n}(x) = \frac{1}{\sigma(h)\sqrt{2\pi n}}\, L^n(h) e^{hx} \left(1 + \sum_{j=1}^{s-1} a_j(h)\, n^{-j} + O\left(n^{-s}\right)\right), \qquad (1.5)$$
$$n \to \infty,$$

равномерно по всем $0 < x \leqslant \mu\, n$, *где постоянная* $\mu < \mathbf{E}X \leqslant \infty$, *функция* $h = h(x/n)$ *является единственным решением уравнения*

$$m(h) = \frac{x}{n}. \qquad (1.6)$$

Здесь произвольное фиксированное целое $s \geqslant 1$, *функции* $a_j(h)$, *имеющие явные представления (см. [2, замечание 2]), равномерно ограничены по* $x : 0 < x \leqslant \mu\, n$.

Следует сказать, что в зоне $a\, n < x \leqslant \mu\, n$ при любом положительном a соотношение (1.5) остается справедливым без предположения (1.4).

Заметим также, что условие (1.4) равносильно тому, что функция $V(x)/x^\beta$ при некотором положительном β убывает в нуле, откуда, в частности, следует левое неравенство в (1.1); кроме того (см. [1, (1.8)]),

$$c_1\, u^\beta \geqslant V(u\, r)/V(r) \geqslant u^\alpha / c_2, \quad u \leqslant 1,\ r \leqslant r_0. \qquad (1.7)$$

В настоящей работе будет показано, что представление, аналогичное (1.5), имеет место, если V абсолютно непрерывно лишь в некоторой окрестности нуля. Приведем результаты.

Теорема 2. *Пусть распределение* $V(x)$ *абсолютно непрерывно при* $0 < x \leqslant x_0$ *с плотностью* $p(x)$, *удовлетворяющей условию* (1.4). *Тогда распределение суммы* S_n *абсолютно непрерывно в области* $0 < x \leqslant x_0\, n$ *с плотностью* $f_n(x)$, *такой, что при любом целом* $s \geqslant 1$ *и любых фиксированных положительных* h_0 *и* $a < x_0$

$$f_n(x) = \frac{1}{\sigma(h)\sqrt{n}}\, L^n(h)\, e^{h\,x} \left(\phi(\beta) + \sum_{\nu=1}^{s-1} q_{\nu h}(\beta)\, n^{-\nu/2} + O\left(n^{-s/2}\right)\right),\ n \to \infty,$$

равномерно по $0 < x \leqslant a\, n$ *и* $h \geqslant h_0$. *Здесь* $\beta = (x - n\, m(h))/\sigma(h)\sqrt{n}$, $\phi(\cdot)$ – *плотность стандартного нормального распределения,* $q_{\nu h}(y)$ – *некоторые функции, равномерно ограниченные по* $y \in R$ *и* $h \geqslant h_0$.

Явные формулы для функций $q_{\nu h}(y)$ можно найти в [3, гл. VI, формула (1.10)]. Так,

$$q_{1h}(y) = -\big(\phi(y)\big)''' \, \frac{\big(\log L(h)\big)'''}{6\left(\big(\log L(h)\big)''\right)^{3/2}}.$$

Кроме того, при нечетных ν функции $q_{\nu h}(0)$ обращаются в нуль, а при четных ν – совпадают с $a_{\nu/2}(h)/\sqrt{2\pi}$.

Следствие 1. *В условиях теоремы* 2

$$f_n(x) = \frac{1}{\sigma(h)\sqrt{2\pi n}} \, L^n(h) e^{hx} \left(1 + \sum_{j=1}^{s-1} a_j(h)\, n^{-j} + O\left(n^{-s}\right)\right), \; n \to \infty,$$

равномерно по всем $0 < x \leqslant \mu\, n$, *где постоянная* $\mu < \min\left(x_0, \mathbf{E}X\right)$, *функция* h *– решение уравнения* (1.6).

Из следствия 1 при $0 < x \leqslant a\, n$ и некотором a вытекает (1.5). С другой стороны, теорема 2 позволяет для нахождении соответствующих асимптотик использовать приближенное решение уравнения (1.6), что удобнее при практических вычислениях.

Приведем еще одно следствие теоремы 2.

Следствие 2. *В условиях и обозначениях теоремы* 2

$$f_n(x) = \frac{1}{\sigma(h)\sqrt{n}} \, L^n(h)\, e^{h\,x} \left(\phi(\beta) + O\left(|\phi'''(\beta)|/\sqrt{n} + 1/n\right)\right), \qquad n \to \infty. \tag{1.8}$$

Следующий далее результат несложно получить, интегрируя равенство (1.8) в соответствующих пределах.

Следствие 3. *В условиях и обозначениях теоремы* 2

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(x - y < S_n \leqslant x) &= L^n(h)\, e^{h\,x} \, \frac{1 - e^{-h\,y}}{h\sigma(h)\sqrt{2\pi n}} \\ &\times \left(e^{-\beta^2/2} + O\left(|\beta|\,(1+\beta^2)\, e^{-\beta^2/2}/\sqrt{n} + 1/n\right)\right), \; n \to \infty, \end{aligned}$$

равномерно по $0 < x \leqslant a\, n$, $0 < y < x$ *и* $h \geqslant h_0$.

§2. Доказательство теоремы 2

Утверждение о том, что распределение суммы S_n при $0 < x \leqslant n\,x_0$ абсолютно непрерывно, является очевидным следствием условия (1.4).

Пусть случайная величина $X(h)$, $0 \leqslant h < \infty$, имеет распределение $F_h(dx) = e^{-hx}\,V(dx)/L(h)$. Обозначим через $X_j(h)$, $j \geqslant 1$, независимые копии случайной величины $X(h)$. Положим $S_n(h) = X_1(h) + \cdots X_n(h)$.

Известно (см. [3, гл. VIII, (2.11)]), что

$$\mathbf{P}(S_n < x) = L^n(h) \int_0^x e^{hy} d\mathbf{P}(S_n(h) < y), \quad x > 0,\ h \geqslant 0. \tag{2.1}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} G(y) &= \mathbf{P}(X(h) < y | X(h) \leqslant x_0), \quad p = p(h) = \mathbf{P}(X(h) \leqslant x_0), \\ H(y) &= \mathbf{P}(X(h) < y | X(h) > x_0), \quad q = q(h) = 1 - p. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Тогда $F_h(y) = p\,G(y) + q\,H(y)$ и, кроме того, при целом $m \geqslant 1$ и $y \leqslant (n - 2m + 1)\,x_0$

$$\mathbf{P}(S_n(h) < y) = \sum_{k=2m}^{n} C_n^k\, p^k\, q^{n-k}\, U_{n,k}(y), \tag{2.3}$$

где $U_{n,k}(y) = G^{*k} * H^{*(n-k)}(y)$.

Из (2.1)–(2.3) следует, что плотность $f_n(\cdot)$ (см. теорему 2) имеет представление

$$f_n(x) = L^n(h)\, e^{h\,x}\, f_{h,n}(x), \quad x \leqslant (n - 2m + 1)\,x_0, \quad h > 0, \tag{2.4}$$

где

$$f_{h,n}(x) = \sum_{k=2m}^{n} C_n^k\, p^k\, q^{n-k}\, u_{n,k}(y),\ x \leqslant (n - 2m + 1)\,x_0, \tag{2.5}$$

$u_{n,k}(x)$ – плотность распределения $U_{n,k}(x)$.

По формуле обращения для плотностей найдем

$$2\pi\, f_{h,n}(y) = \int^{\infty} e^{-ity}\, \widehat{f}_{h,n}(t)\, dt,$$

где

$$\widehat{f}_{h,n}(t) = \sum_{k\geqslant 2m}^{n} C_n^k\, p^k\, q^{n-k}\, \widehat{G}^{\,k}(t)\, \widehat{H}^{\,n-k}(t)$$

$$= f_h^n(t) - \sum_{k=0}^{2m-1} C_n^k\, p^k\, q^{n-k}\, \widehat{G}^{\,k}(t)\, \widehat{H}^{\,n-k}(t),$$

а $f_h(t)$, $\widehat{G}(t)$ и $\widehat{H}(t)$ – характеристические функции случайных величин с распределениями F_h, G и H, соответственно.

Отсюда, при некоторой положительной постоянной c_*, выбором которой распорядимся позже,

$$2\pi\, f_{h,n}(y) = \int\limits_{|t|\leqslant c_*\, h} e^{-ity}\,\Big(f_h^n(t) - \sum_{k=0}^{2m-1} C_n^k\, p^k\, q^{n-k}\, \widehat{G}^{\,k}(t)\, \widehat{H}^{\,n-k}(t)\Big)\, dt$$

$$+ \sum_{k\geqslant 2m}^{n} C_n^k\, p^k\, q^{n-k} \int\limits_{|t|>c_*\, h} e^{-ity}\, \widehat{G}^{\,k}(t)\, \widehat{H}^{\,n-k}(t)\, dt = I_1 + I_2. \tag{2.6}$$

Имеем,

$$|I_2| \leqslant p^{2m} \sum_{k=2m}^{n} C_n^k\, q^{n-k}\, (p \sup_{|t|>c_*\, h} |\widehat{G}(t)|)^{k-2m} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{G}(t)|^{2m}\, dt; \tag{2.7}$$

$$I_1 = \int\limits_{|t|\leqslant c_*\, h} e^{-ity} f_h^n(t)\, dt + 2c_*\,\theta\, h \sum_{k=0}^{2m-1} C_n^k\, p^k\, q^{n-k}, \quad |\theta| \leqslant 1. \tag{2.8}$$

При этом

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{G}(t)|^{2m}\, dt = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_m^2(y)\, dy \leqslant 2\pi\, \sup_y g_m(y), \tag{2.9}$$

где $g_m(y)$ – плотность распределения $G^{*m}(y)$ (см. (2.2)).

Плотность $g_m(y)$ равна нулю при $y > m\, x_0$ и, аналогично (2.4),

$$g_m(y) = e^{-h\, y}\, \bar{p}^{\,*m}(y)/\bar{L}^m(h), \quad y \leqslant m\, x_0,\ h > 0, \tag{2.10}$$

где $\bar{p}(y) = p(y)\, \mathrm{I}[0 < y \leqslant x_0]$, $\bar{L}(h) = \int\limits_0^{\infty} e^{-h\, y}\, \bar{p}(y)\, dy$.

Обозначим для удобства $\bar{p}^{*m}(y)$ через $p_m(y)$ и покажем, что из условия (1.4) вытекает оценка

$$p_m(y) \leqslant C_m\, V^m(y)/y, \quad 0 < y \leqslant m\, x_0, \tag{2.11}$$

в которой постоянная C_m не зависит от y. Доказательство проведем индукцией по m, взяв за базу (1.4). Имеем,

$$p_{m+1}(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{p}(y-u)p_m(u)\,du = \int\limits_{\max(0,y-x_0)}^{\min(y,m\,x_0)} p(y-u)p_m(u)\,du. \tag{2.12}$$

Рассмотрим критический случай $0 < y \leqslant x_0$ (если $x_0 < y \leqslant m\,x_0$ или $m\,x_0 < y \leqslant (m+1)\,x_0$, рассуждения только упрощаются). Тогда

$$p_{m+1}(y) = \Bigl(\int\limits_0^{y/2} + \int\limits_{y/2}^{y}\Bigr) p(y-u)p_m(u)\,du = I_1 + I_2, \tag{2.13}$$

причем по индукционному предположению

$$I_1 \leqslant C_m\, 2\, V^m(y)/y \int\limits_{y/2}^{y} p(y-u)\,du \leqslant 2\, C_m\, V^{m+1}(y)/y. \tag{2.14}$$

Аналогично, принимая во внимание соотношение (1.7),

$$\begin{aligned} I_2 &\leqslant 2\, C\, V(y)/y \int\limits_0^{y/2} p_m(u)\,du; \\ \int\limits_0^{y/2} p_m(u)\,du &\leqslant C_m\, V^m(y) \int\limits_0^{y/2} \bigl(V(u)/V(y)\bigr)^m\,du/u \\ &= C_m\, V^m(y) \int\limits_0^{1/2} \bigl(V(sy)/V(y)\bigr)^m\,ds/s \leqslant C_m\, V^m(y)\,A, \end{aligned}$$

где постоянная A не зависит от y.

Отсюда и из (2.13), (2.14) следует индукционный переход, и оценка (2.11) доказана.

Теперь с помощью (2.10), (2.11) и (1.7), взяв $m \geqslant 1/\beta$, несложно получить оценку

$$\sup_y g_m(y) \leqslant A\,h, \quad h \geqslant h_0 > 0, \tag{2.15}$$

с некоторой постоянной A, не зависящей от h.

Пусть случайная величина $Y(h)$ имеет распределение G (см. (2.2)). Из [1, лемма 1] вытекает, что $c \leqslant h^2 \mathbf{Var} Y(h) \leqslant C,\ h \geqslant h_0$, где положительные постоянные c, C не зависят от h. Отсюда, из (2.15) и [3, гл. I, п. 5, 22] (см. также [2, лемма 1 и ниже]) следует, что при любом $h \geqslant h_0$ и некотором положительном η

$$\sup_{|t| \geqslant c_*\,h} |\widehat{G}(t)|^m \leqslant e^{-m\,\eta}. \tag{2.16}$$

Согласно (2.7), (2.9), (2.15) и (2.16),

$$|I_2| \leqslant A\,h\,e^{m\,\eta} \sum_{k=2m}^{n} C_n^k\,q^{n-k}\,(p\,e^{-\eta})^k \leqslant A\,h\,e^{m\,\eta}(q + p\,e^{-\eta})^n \leqslant A\,h\,e^{-\varepsilon\,n}, \tag{2.17}$$

где положительные постоянные A и ε, не зависят от n и $h \geqslant h_0$.

Теперь займемся соотношением (2.8). Положим (см. обозначения в начале п.2),

$$\widehat{f}_h(t) = \mathbf{E} \exp\left(it\ \frac{S_n(h) - n\ m(h)}{\sigma(h)\sqrt{n}}\right),\ \beta(u) = \frac{u - n\ m(h)}{\sigma(h)\sqrt{n}}. \tag{2.18}$$

Воспользовавшись леммой 1 из [1] и рассуждениями из [2, (3.9)], для любого целого $s \geqslant 3$ получим при всех $h \geqslant h_0$

$$\int\limits_{|t| \leqslant c_*\,h} e^{-ity}\, f_h^n(t)\,dt = \frac{1}{\sigma(h)\sqrt{n}} \int\limits_{|t| \leqslant c_*\,h\,\sigma(h)\sqrt{n}} e^{-it\,\beta(y)}\,\widehat{f}_h(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\sigma(h)\sqrt{n}} \int\limits_{|t| \leqslant c_*\,h\,\sigma(h)\sqrt{n}} e^{-it\,\beta(y)} \big(\widehat{f}_h(t) - e^{-t^2/2}\,(1 + \sum_{\nu=1}^{s-3} P_{\nu h}(it)\,n^{-\nu/2})\big)\,dt$$

$$+ \frac{2\pi}{\sigma(h)\sqrt{n}}\,\big(\phi(\beta(y)) + \sum_{\nu=1}^{s-3} q_{\nu h}(\beta(y))\,n^{-\nu/2}\big) + \theta\,h\,e^{-\varepsilon\,n}, \tag{2.19}$$

где $|\theta| \leqslant A$, постоянные $A, \varepsilon > 0$ не зависят от n и h,

$$q_{\nu h}(y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-it\,y}\, e^{-t^2/2}\, P_{\nu h}(it)\, dt.$$

Имея в виду (см. [3, гл. VI, лемма 4]), что

$$\begin{aligned} &\bigl|\widehat{f}_h(t) - e^{-t^2/2}\,(1 + \sum_{\nu=1}^{s-3} P_{\nu h}(it)\, n^{-\nu/2})\bigr| \\ &\leqslant c(s)\, \mu_s\, n^{-(s-2)/2})\,(|t|^s + |t|^{3(s-1)})\, e^{-t^2/12} \end{aligned} \tag{2.20}$$

в интервале $|t| < \mu_s^{-1/(s-2)}\sqrt{n}$, где

$$\mu_s = \mathbf{E}|X(h) - \mathbf{E}X(h)|^s/\sigma^s(h),$$

и снова применяя лемму 1 из [1], получим с некоторыми постоянными c_* и A

$$\mu_s^{-1/(s-2)} \geqslant c_*\, h\, \sigma(h), \quad \mu_s \leqslant A, \; h \geqslant h_0. \tag{2.21}$$

Из соотношений (2.6), (2.8), (2.17) и (2.19)–(2.21) (напоминаем, что $c \leqslant h^2 \mathbf{Var} X(h) \leqslant C, \; h \geqslant h_0$) следует

$$f_{h,n}(y) = \frac{1}{\sigma(h)\sqrt{n}}\,\bigl(\phi(\beta(y)) + \sum_{\nu=1}^{s-3} q_{\nu h}(\beta(y))\, n^{-\nu/2} + O\,(n^{-(s-2)/2})\bigr), \quad n \to \infty, \tag{2.22}$$

равномерно по $y \leqslant (n - 2m + 1)\, x_0$ и $h \geqslant h_0$.

Теорема 2 следует из (2.4) и (2.22).

Литература

1. Л. В. Розовский, *Вероятности малых уклонений для одного класса распределений со степенным убыванием в нуле.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **328** (2005), 182–190.
2. Л. В. Розовский, *О сверхбольших уклонениях суммы независимых случайных величин с общим абсолютно непрерывным распределением, удовлетворяющим условию Крамера.* — Теория вероятн. и ее примен. **48**, No. 1 (2003), 78–103.
3. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин.* Наука, М. (1972), 416 с.

Rozovsky L. V. Small deviation probabilities for sums of independent positive random variables, whose density has a power decay at zero.

In the note small deviation probabilities of sum of i.i.d. positive random variables are studied, whose density has a power decay at zero.

Химико-фармацевтическая Академия,
ул. проф. Попова 14,
197376, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: L_Rozovsky@mail.ru

Поступило 25 октября 2011 г.