Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 396, 2011 г.

С. С. Расова, Б. П. Харламов

О ДВИЖЕНИИ БРОУНОВСКИХ ЧАСТИЦ ВДОЛЬ ЗАДЕРЖИВАЮЩЕГО ЭКРАНА

1. Введение. В этой статье мы продолжаем исследование диффузионного процесса с отражением от границы его области значений. Интерес представляет отражение с замедлением, которое существенно влияет на тангенциальную составляющую многомерного процесса. Метод изучения применим к многомерному броуновскому процессу любой размерности. Однако все существенные черты взаимодействия координат процесса проявляются уже в двумерном случае.

Рассмотрим однородный во времени диффузионный случайный процесс $Z(t)$. Поместим в область значений процесса плоский отражающий экран. Пусть, например, процесс задан в двумерном пространстве двумя независимыми одномерными броуновскими процессами $Z(t) = (X(t), Y(t))$ $(t \geqslant 0)$, плоский экран задан уравнением $x = 0$ и начальная точка процесса имеет координаты $Y(0) = 0$ и $X(0) > 0$. Назовём $(X(t))$ и $(Y(t))$ – нормальной и тангенциальной (касательной) составляющими двумерного броуновского процесса относительно плоского экрана.

Если экран обладает свойством мгновенного зеркального отражения, то процесс $Y(t)$ не изменится от присутствия зеркала, а процесс $X(t)$ будет обычным одномерным процессом с мгновенным зеркальным отражением. Координаты процесса останутся независимыми.

Если экран обладает свойством замедленного отражения, то координаты станут зависимыми, так как замедление обоих одномерных процессов будет происходить одновременно. Замедление координаты $X(t)$ при отражении рассмотрено нами в двух предыдущих работах [1,2]. Наша очередная задача состоит в изучении тангенциального процесса $Y(t)$ при замедленном отражении первой координаты.

Некоторые результаты этой статьи были предложены для объяснения механизма замедления прохождения газа через капилляр, что

Ключевые слова: диффузионный, марковский, непрерывный полумарковский процесс, отражение, замедление, момент первого выхода, переходная функция, преобразование Лапласа.

Поддержано грантом НШ-4472.2010.1.

происходит в капиллярном газовом хроматографе при анализе смеси газов [4].

Предположим, что процесс $X(t)$ в области положительных значений или имеет ограниченный интервал значений с отражающей или недостижимой второй границей, или интервал его значений неограничен, но процесс на нем имеет отрицательный снос. Это предположение упростит нам систему обозначений, избавив от необходимости писать условие, что интегрирование рассматривается при конечных значениях рассматриваемых марковских моментов.

2. Одномерный диффузионный процесс с задержкой на границе отрезка. Для дальнейшего изложения нам понадобятся некоторые результаты статьи [1]. Обозначим $(\mathbf{P}_x)$ $(0 \leqslant x < r \leqslant \infty)$ согласованное семейство мер непрерывного полумарковского процесса $(X(t))$ со значениями на некотором замкнутом с одного конца отрезке. Предположим, что этот процесс является локально диффузионным марковским процессом на открытом интервале, получающемся из исходного путём удаления замкнутой границы. Нарушение марковости возможно только в этой граничной точке отрезка. Таким образом, процесс является марковским до момента первого достижения этой границы и в любой интервал времени схода с границы внутрь области.

Обозначим преобразованные по Лапласу распределения моментов первого выхода из интервала

$$g_{(c,d)}(\lambda, x) = \mathbf{E}_x(\exp(-\lambda\sigma_{(c,d)});\, x(\sigma_{(c,d)}) = c,\, \sigma_{[c,d)} < \infty),$$
$$h_{(c,d)}(\lambda, x) = \mathbf{E}_x(\exp(-\lambda\sigma_{(c,d)});\, x(\sigma_{(c,d)}) = d,\, \sigma_{[c,d)} < \infty),$$

где $c < x < d$, $\lambda \geqslant 0$, $\sigma_{(c,d)}$ – момент первого выхода из интервала (c, d). Для полузамкнутых интервалов вида $[0, y)$ введем специальное обозначение. Для них возможен выход только через открытую границу.

$$k_{[0,y)}(\lambda,\, x) = \mathbf{E}_x(\exp(-\lambda\sigma_{[0,y)});\, \sigma_{[0,y)} < \infty) \quad (0 \leqslant x < y),$$

Известно, что g и h как функции от x удовлетворяют на интервале (c, d) дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{2}\, f'' + B(x)\, f' - C(x)\lambda f = 0 \qquad (1)$$

при краевых условиях

$$g_{(c,d)}(\lambda, c) = h_{(c,d)}(\lambda, d) = 1, \quad g_{(c,d)}(\lambda, d) = h_{(c,d)}(\lambda, c) = 0.$$

Предположим, что коэффициенты $B(x)$ и $C(x)$ непрерывны и дифференцируемы внутри заданного интервала. Отсюда следует, что

$$g_{(0,y)}(\lambda, y-z) = -g'_{(0,y)}(\lambda, y)z + o(z),$$
$$h_{(0,y)}(\lambda, y-z) = 1 - h'_{(0,y)}(\lambda, y)z + o(z).$$

Согласно марковскому свойству относительно момента первого выхода из открытого множества, имеем

$$k_{[0,y)}(\lambda,\, x) = g_{(0,y)}(\lambda, x)\, k_{[0,y)}(\lambda,\, 0) + h_{[0,y)}(\lambda, x) \quad (0 < x < y), \tag{2}$$

и, следовательно, $k_{[0,y)}$ как функция от x удовлетворяет уравнению (1) с краевыми условиями, определяемыми функцией

$$K(\lambda, y) \equiv k_{[0,y)}(\lambda,\, 0) \quad (0 < y < r).$$

Пользуясь полумарковским свойством процесса, имеем

$$K(\lambda, y) = K(\lambda, y-z)(g_{(0,y)}(\lambda, y-z)K(\lambda, y) + h_{(0,y)}(\lambda, y-z)) \quad (y > z > 0), \tag{3}$$

откуда при $z \to 0$ получаем дифференциальное уравнение относительно K

$$K' + A_1(y)\, K - B_1(y)\, K^2 = 0 \quad (y > 0), \tag{4}$$

где

$$A_1(y) \equiv h'_{(0,y)}(\lambda, y), \quad B_1(y) \equiv -g'_{(0,y)}(\lambda, y).$$

В статье [1] доказывается, что $K(\lambda, 0+) = 1$ и существует частная производная функции $K(\lambda, y)$ по второму аргументу в точке 0, обозначаемая как $-L(\lambda)$, где $L(\lambda) \geqslant 0$ при $\lambda \geqslant 0$, которая служит произвольной постоянной решения. При этом

$$K(\lambda, y) = \frac{h'_{(0,y)}(\lambda, 0)}{L(\lambda) - g'_{(0,y)}(\lambda, 0)}. \tag{5}$$

Согласно нашим обозначениям, $K(\lambda,\, y) = \mathbf{P}_0(e^{-\lambda\sigma_{[0,y)}})$ – преобразование Лапласа от времени первого выхода из интервала $[0, y)$ траектории, начинающейся из точки 0, что налагает определённые ограничения на функцию $L(\lambda)$.

В работе [1] доказывается положительность меры времени пребывания одномерного диффузионного процесса на границе области при условии, что $L(0) = 0$ и $L'(0) > 0$. В работе [2] доказывается, что процесс с положительной мерой времени пребывания на границе может быть марковским и, следовательно, не содержать интервалов постоянства. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $L(\lambda)$ линейно возрастала по λ. Для случая мгновенного отражения функция $L(\lambda)$ тождественно равна нулю (как частный случай линейности).

3. Замедление тангенциальной составляющей процесса. Мы построим согласованное семейство мер двумерного непрерывного полумарковского процесса $Z(t) \equiv (X(t), Y(t))$, исходя из двух независимых согласованных семейств мер одномерных непрерывных полумарковских процессов: $(\mathbf{P}_x)$ $(x \in [0, r))$ и $(\mathbf{Q}_y)$ $(y \in \mathbb{R})$ однородных во времени, где меры определены на пространстве $\mathcal{C}$ непрерывных функций $\xi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

Предположим, что процесс $X(t)$ является локально марковским процессом с замедленным отражением, описанном в предыдущем разделе. Наша цель состоит в построении условного распределения для второй компоненты двумерного процесса при одновременном замедлении обеих компонент. Для этого мы построим последовательность распределений, слабо сходящихся к пределу, который совпадает с полумарковской переходной функцией некоторого условного полумарковского процесса, каким является тангенциальная составляющая двумерного процесса. Локальные характеристики предельного процесса во внутренних точках области значений совпадают с локальными характеристиками системы двух независимых координатных процессов, а замедление двумерного процесса при отражении совпадает с замедлением при отражении одного независимого одномерного процесса $X(t)$.

Будем использовать обозначения: $\sigma^X_{\Delta_1}$, $\sigma^Y_{\Delta_2}$ – моменты первого выхода соответственно процессов $X(t)$ и $Y(t)$ из открытых множеств, принадлежащих областям их значений. Верхние индексы у этих обозначений мы будем опускать, если ясно, о каком процессе идёт речь. Далее для любого $\varepsilon \in (0, r)$ определим

$$\gamma_0 = \sigma^X_{(0,\infty)}, \quad \alpha = \sigma^X_{[0,\varepsilon)}, \quad \beta = \sigma^X_{(0,\infty)},$$

$$\gamma_n = \gamma_{n-1} \dot{+} \alpha \dot{+} \beta \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где для любых марковских моментов τ_1 и τ_2 $\tau_1 \dot{+} \tau_2 = \infty$, если $\tau_1 = \infty$, и $\tau_1 \dot{+} \tau_2 = \tau_1 + \tau_2 \circ \theta_{\tau_1}$, если $\tau_1 < \infty$. Здесь θ_t – оператор сдвига на соответствующем пространстве выборочных функций. Пусть также $b_0 = \gamma_0$,

$$a_n = \gamma_{n-1} \dot{+} \alpha - \gamma_{n-1}, \quad b_n = \gamma_{n-1} \dot{+} \alpha \dot{+} \beta - \gamma_{n-1} \dot{+} \alpha \quad (n \geqslant 1),$$

$$N_\varepsilon(t) = \#\left\{ n \geqslant 1 : \sum_{k=0}^{n-1} b_k \leqslant t \right\}.$$

На множестве $\mathcal{C}$ непрерывных функций мы определим отображение замены времени, которое для непрерывного полумарковского процесса достаточно задать для любых моментов первого выхода из открытых интервалов $\Delta \subset \mathbb{R}$. Определим для некоторого открытого множества Δ замедленный момент первого выхода

$$\sigma_\Delta^{Y,\varepsilon} = \sigma_\Delta^Y + \sum_{k=1}^{N_\varepsilon(\sigma_\Delta^Y)} a_k.$$

Рассмотрим функционал

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, \mathbf{E}_x^X \exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{N_\varepsilon(t)} a_k\right) dF_\Delta^Y(t, \phi \,|\, y), \tag{6}$$

где ϕ – любая функция,

$$F_\Delta^Y(t, \phi \,|\, y) = \mathbf{E}_y^Y(\phi(Y(\sigma_\Delta));\, \sigma_\Delta \leqslant t),$$

$\mathbf{E}_y^Y$ и $\mathbf{E}_x^X$ – интегралы по мерам $\mathbf{Q}_y$ и $\mathbf{P}_x$ соответственно.

Теорема 1. *Пусть $\mathbf{P}_0(\alpha = \infty) = 0$ и для любого $x > 0$ $\mathbf{P}_x(\sigma_{(0,r)} = \infty) = 0$ и кроме того $\mathbf{P}_x(\sigma_{(0,r)} < \infty,\, X(\sigma_{(0,r)}) = r) = 0$. Тогда при любом $x \in [0, r)$ и $y \in \mathbb{R}$ последовательность функционалов* (6) *сходится при $\varepsilon \to 0$ к функционалу*

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, \mathbf{E}_x \exp(-L(\lambda)V(t))\, dF_\Delta^Y(t, \phi \,|\, y), \tag{7}$$

где $V(t)$ – обращённый процесс с независимыми положительными приращениями. Процесс с независимыми положительными приращениями $T_0(t)$, порождающий $V(t)$, имеет преобразование Лапласа

$$\mathbf{E}_x e^{-\lambda T_0(y)} = g_{(0,r)}(\lambda, x)\, e^{y g'_{(0,r)}(\lambda, 0)} \quad (y \geqslant 0).$$

Зависящий от X функционал

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, \exp(-L(\lambda)V(t))\, dF_\Delta^Y(t, \phi \,|\, y)$$

является полумарковской переходной производящей функцией условного непрерывного полумарковского процесса, каким является тангенциальная составляющая процесса $Z(t)$.

Доказательство. Рассмотрим неубывающий процесс $V_\varepsilon(t) = \varepsilon N_\varepsilon(t)$. Его обращённый процесс

$$T_\varepsilon(y) \equiv \inf\{s \geqslant 0 : V_\varepsilon(s) \geqslant y\}$$

относительно меры $\mathbf{P}_x$ является процессом с независимыми приращениями, так как построен из сумм независимых случайных величин a_k, заданных на решетке с шагом ε. При этом при любом $\lambda > 0$ и x

$$\mathbf{E}_x \exp(-\lambda T_\varepsilon(y)) = \mathbf{E}_x \exp\biggl(-\lambda \sum_{k=0}^{[y/\varepsilon]} b_k\biggr) = \prod_{k=0}^{[y/\varepsilon]} \mathbf{E}_x e^{-\lambda b_k}$$

$$= \mathbf{E}_x e^{-\lambda b_0} \left(\mathbf{E}_\varepsilon e^{-\lambda\beta}\right)^{[y/\varepsilon]} = g_{(0,r)}(\lambda, x)(1 + g'_{(0,r)}(\lambda, 0)\varepsilon + o(\varepsilon))^{[y/\varepsilon]}$$

$$\to g_{(0,r)}(\lambda, x)\, e^{y g'_{(0,r)}(\lambda,0)} \quad (\varepsilon \to 0),$$

и, следовательно, слабый предел $T_0(y)$ процесса $T_\varepsilon(y)$ существует и его преобразование Лапласа может быть выражено в терминах процесса $X(t)$. Отсюда вытекает слабая сходимость к пределу процесса $V_\varepsilon(t)$. Обозначим этот предел $V(t)$. Очевидно, что процесс $T_0(y)$ является процессом с независимыми приращениями. Покажем, что приращения процесса $T_0(y)$ положительны с вероятностью 1, если граница r недостижима, как в примерах 1 и 2, приведённых ниже. Действительно, в этом случае $g_{(0,r)}(0, x) = \mathbf{P}_x(\sigma_{(0,r)} < \infty) = 1$, откуда следует $g'_{(0,r)}(0, x) = 0$, и следовательно, для любого $h > 0$ функция распределения приращения $T_0(t + h) - T_0(t)$ не имеет скачка в нуле. Тем самым доказано, что обращённый процесс $V(t) = \inf T_0^{-1}[t, \infty)$ непрерывен. □

Рассмотрим теперь формулу (6).

Лемма 1. *Для любого $t > 0$ справедлива формула*

$$\mathbf{E}_x \exp\biggl(-\lambda \sum_{k=1}^{N_\varepsilon(t)} a_k\biggr) = \mathbf{E}_x \left(\mathbf{E}_0 e^{-\lambda\alpha}\right)^{N_\varepsilon(t)}. \tag{8}$$

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{E}_x \exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{N_\varepsilon(t)} a_k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_x \left(\exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k\right);\, N_\varepsilon(t) = n\right)$$

$$= \mathbf{P}_x(N_\varepsilon(t) = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_x \exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k;\, \sum_{k=0}^{n-1} b_k \leqslant t < \sum_{k=0}^{n} b_k\right)$$

$$= \mathbf{P}_x(N_\varepsilon(t) = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathbf{E}_x \left(\exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k\right);\, \sum_{k=0}^{n-1} b_k \leqslant t\right)\right.$$

$$\left. - \mathbf{E}_x \left(\exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k\right);\, \sum_{k=0}^{n} b_k \leqslant t\right)\right).$$

Далее при $n \geqslant 1$, так как a_k, b_k измеримы относительно $\mathcal{F}_{\gamma_k}$, имеем

$$\mathbf{E}_x \left(\exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k\right);\, \sum_{k=0}^{n-1} b_k \leqslant t\right)$$

$$= \mathbf{E}_x \left(\exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot (e^{-\lambda\alpha} \circ \theta_{\gamma_{n-1}})\right);\, \sum_{k=0}^{n-1} b_k \leqslant t\right)$$

$$= \mathbf{E}_0 e^{-\lambda\alpha}\, \mathbf{E}_x \left(\exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{n-1} a_k\right);\, \sum_{k=0}^{n-1} b_k \leqslant t\right).$$

С другой стороны,

$$\mathbf{E}_x \left(\exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k\right);\, \sum_{k=0}^{n} b_k \leqslant t\right)$$

$$= \mathbf{E}_x \left(\exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{n-1} a_k\right) \cdot (e^{-\lambda\alpha} \circ \theta_{\gamma_{n-1}});\, \sum_{k=0}^{n-1} b_k + (\beta \circ \theta_\alpha \circ \theta_{\gamma_{n-1}}) \leqslant t\right)$$

$$= \int_0^t \mathbf{E}_x \left(\exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{n-1} a_k\right) \cdot \mathbf{E}_0(e^{-\lambda\alpha};\, \beta \circ \theta_\alpha \leqslant t - s);\, \sum_{k=0}^{n-1} b_k \in ds\right)$$

$$= \mathbf{E}_0 e^{-\lambda\alpha} \int_0^t \mathbf{P}_\varepsilon(\beta \leqslant t - s)\, \mathbf{E}_x \left(\exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{n-1} a_k\right);\, \sum_{k=0}^{n-1} b_k \in ds\right)$$

$$= \mathbf{E}_0 e^{-\lambda\alpha} \int_0^t \mathbf{E}_x \left(\exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{n-1} a_k \right);\, \sum_{k=0}^{n-1} b_k \leqslant t - s \right) \mathbf{P}_\varepsilon(\beta \in ds),$$

откуда следует, что

$$\mathbf{E}_x \left(\exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k \right);\, \sum_{k=0}^{n} b_k \leqslant t \right) = (\mathbf{E}_0 e^{-\lambda\alpha})^n \cdot (G^{(n)} * G_0)(t), \qquad (9)$$

где $G_0(t) \equiv \mathbf{P}_x(\gamma_0 \leqslant t)$, $G(t) \equiv \mathbf{P}_\varepsilon(\beta \leqslant t)$. Следовательно,

$$\mathbf{E}_x \left(\exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k \right);\, N_\varepsilon(t) = n \right)$$

$$= (\mathbf{E}_0 e^{-\lambda\alpha})^n \cdot ((G^{(n-1)} * G_0)(t) - (G^{(n)} * G_0)(t)).$$

Положив $\lambda = 0$, убеждаемся, что второй множитель этого произведения равен вероятности $\mathbf{P}_x(N_\varepsilon(t) = n)$. □

Продолжим доказательство теоремы 1. Из предыдущего раздела нам известно, что при $\varepsilon \to 0$

$$\mathbf{E}_0^X \exp(-\lambda\alpha) \equiv K(\lambda,\, \varepsilon) = 1 - L(\lambda)\varepsilon + o(\varepsilon),$$

$$\mathbf{E}_0^X \exp(-\lambda\beta) = g_{(0,r)}(\lambda, \varepsilon) = 1 + g'_{(0,r)}(\lambda, 0)\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Используя теорему о мажорируемой сходимости, мы переходим к пределу под знаком интеграла в формуле (8) и получаем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{E}_x^X (\mathbf{E}_0^X e^{-\lambda\alpha})^{N_\varepsilon(t)} = \mathbf{E}_x^X \lim_{\varepsilon \to 0} (\mathbf{E}_0^X e^{-\lambda\alpha})^{N_\varepsilon(t)}$$

$$\mathbf{E}_x^X \lim_{\varepsilon \to 0} (1 - L(\lambda)\varepsilon + o(\varepsilon))^{V_\varepsilon(t)/\varepsilon} = \mathbf{E}_x^X \exp(-L(\lambda)\, V(t)).$$

Предел функционала (6) теперь может быть записан в виде

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbf{E}_x^X \exp(-L(\lambda)\, V(t))\, dF_\Delta^Y(t, \phi \,|\, y)$$

$$= \mathbf{E}_y^Y \mathbf{E}_x^X \exp(-\lambda\sigma_\Delta^Y - L(\lambda)\, V(\sigma_\Delta^Y))\, \phi(Y(\sigma_\Delta^Y))$$

$$= \mathbf{E}_x^X \left[\mathbf{E}_y^Y \exp(-\lambda\sigma_\Delta^Y - L(\lambda)\, V(\sigma_\Delta^Y))\, \phi(Y(\sigma_\Delta^Y)) \right],$$

где Δ – интервал из множества значений процесса $Y(t)$. Покажем, что выражение в квадратных скобках можно рассматривать как условную полумарковскую переходную функцию $\widetilde{f}_\Delta^Y(\lambda,\, \phi \,|\, y, X)$ некоторого условного непрерывного полумарковского процесса (условные относительно процесса $X(t)$). Для этого достаточно показать, что для любых открытых интервалов $\Delta_1 \subset \Delta_2$ из множества значений $Y(t)$ при $y \in \Delta_1$ выполняется соотношение

$$\widetilde{f}^Y_{\Delta_2}(\lambda, \phi \,|\, y, X) = \widetilde{f}^Y_{\Delta_2}(\lambda, \widetilde{f}^Y_{\Delta_2}(\lambda, \phi \,|\, \cdot, X) \,|\, y, X). \tag{10}$$

Хорошо известно, что $\sigma_{\Delta_2} = \sigma_{\Delta_1} + \sigma_{\Delta_2} \circ \theta_{\sigma_{\Delta_1}}$ и $Y(\sigma_{\Delta_2}) = Y(\sigma_{\Delta_2}) \circ \theta_{\Delta_1}$. Кроме того, функция $V(t)$ является аддитивным случайным процессом на множестве точек её изменения, какими, очевидно, являются точки σ_{Δ_1}. Это значит, что

$$V(\sigma_{\Delta_2}) = V(\sigma_{\Delta_1}) + V(\sigma_{\Delta_2}) \circ \theta_{\sigma_{\Delta_1}}.$$

Имеем

$$\begin{gathered}
\mathbf{E}^Y_y \exp(-\lambda\sigma_{\Delta_2} - L(\lambda)\, V(\sigma_{\Delta_2}))\, \phi(Y(\sigma_{\Delta_2})) \\
= \mathbf{E}^Y_y \exp(-\lambda\sigma_{\Delta_1} - L(\lambda)\, V(\sigma_{\Delta_1})) \\
\times[(\exp(-\lambda\sigma_{\Delta_2} - L(\lambda)\, V(\sigma_{\Delta_2}))\phi(Y(\sigma_{\Delta_2}))) \circ \theta_{\sigma_{\Delta_1}}] \\
= \mathbf{E}^Y_y \,\Big(\exp(-\lambda\sigma_{\Delta_1} - L(\lambda)\, V(\sigma_{\Delta_1})) \\
\times\, \mathbf{E}^Y_{Y(\sigma_{\Delta_1})} \exp(-\lambda\sigma_{\Delta_2} - L(\lambda)\, V(\sigma_{\Delta_2}))\phi(Y(\sigma_{\Delta_2}))\Big) \\
= \mathbf{E}^Y_c \exp(-\lambda\sigma_{\Delta_2} - L(\lambda)\, V(\sigma_{\Delta_2}))\phi(Y(\sigma_{\Delta_2}))\times \\
\times\mathbf{E}^Y_y \,(\exp(-\lambda\sigma_{\Delta_1} - L(\lambda)\, V(\sigma_{\Delta_1});\, Y(\sigma_{\Delta_2}) = c) \\
+\mathbf{E}^Y_d \exp(-\lambda\sigma_{\Delta_2} - L(\lambda)\, V(\sigma_{\Delta_2}))\phi(Y(\sigma_{\Delta_2})) \\
\times\mathbf{E}^Y_y \,(\exp(-\lambda\sigma_{\Delta_1} - L(\lambda)\, V(\sigma_{\Delta_1});\, Y(\sigma_{\Delta_2}) = d)\,,
\end{gathered}$$

что эквивалентно формуле (10). □

4. Маргинальное распределение тангенциальной составляющей процесса. Из доказанной теоремы следует, что функционал из утверждения теоремы 1 определяет маргинальное распределение точки первого выхода из интервала тангенциальной составляющей двумерного процесса. Именно это распределение представляет основной интерес в приложениях (см. [4]).

В этом разделе мы далее не будем ставить верхний индекс X. При вычислении маргинального распределения основную трудность вносит функция $f(t) \equiv \mathbf{E}_0 \exp(-L(\lambda)\, V(t))$. Для получения явного вида этой функции применим преобразование Лапласа по аргументу t. Имеем

$$F(p) \equiv \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^\infty e^{-pt}\mathbf{E}_0 \exp(-L(\lambda)\,\varepsilon N_\varepsilon(t))\,dt.$$

Далее

$$\mathbf{E}_0 \exp(-L(\lambda)\,\varepsilon N_\varepsilon(t)) = \sum_{n=0}^\infty \exp(-L(\lambda)\,\varepsilon\, n)\mathbf{P}_0(N_\varepsilon(t) = n)$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \exp(-L(\lambda)\,\varepsilon\, n)(F_\beta^{(n)}(t) - F_\beta^{(n+1)}(t)),$$

где $F_\beta^{(n)}(t)$ – n-кратная свёртка функций распределения случайной величины β. Применяя к этой сумме преобразование Лапласа, получаем

$$\frac{1}{p}\sum_{n=0}^\infty \exp(-L(\lambda)\,\varepsilon\, n)(\widehat{F}_\beta^n(p) - \widehat{F}_\beta^{n+1}(p))$$

$$= \frac{1-\widehat{F}_\beta(p)}{p\,(1-\widehat{F}_\beta(p)\,\exp(-L(\lambda)\,\varepsilon))},$$

где $\widehat{F}_\beta(p)$ – преобразование Лапласа плотности распределения величины β. Замечая, что $\widehat{F}_\beta(p) = g_{(0,r)}(p,\varepsilon)$ и что существует производная этой функции в нуле, получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1-\widehat{F}_\beta(p)}{p\,(1-\widehat{F}_\beta(p)\,\exp(-L(\lambda)\,\varepsilon))} = \frac{-g'_{(0,R)}(p,0)}{p\,(-g'_{(0,R)}(p,0)+L(\lambda))}.$$

Ниже приведены примеры обращения этого преобразования Лапласа по аргументу p.

В большинстве практических случаев основной интерес представляет математическое ожидания времени первого выхода. Типичный пример такого применения рассматриваемой модели – это хроматография, где основную информацию несёт именно математическое ожидание момента первого выхода компоненты анализируемой смеси.

Из формулы (7) мы получаем соотношение для математических ожиданий случайной величины $\tau_u \equiv \tau + \sum_{k=1}^{N_\varepsilon(\tau)} a_k$, а именно

$$\mathbf{E}_0\tau_u = \mathbf{E}_0\tau + L'(0)\int_0^\infty \mathbf{E}_0 V(t)\,dF_\tau(t).$$

Обозначим $f_1(t) = \mathbf{E}_0 V(t)$. Имеем

$$F_1(p) \equiv \int_0^\infty e^{-pt} f_1(t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty e^{-pt}\varepsilon\,\mathbf{E}_0 N_\varepsilon(t)\,dt$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{p}\sum_{n=1}^\infty n(\widehat{F}_\beta^n(p) - \widehat{F}_\beta^{n+1}(p)) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon\widehat{F}_\beta(p)}{p\,(1-\widehat{F}_\beta(p))}.$$

Замечая, что $\widehat{F}_\varepsilon(p) = g_{(0,r)}(p,\varepsilon) = 1 + g'_{(0,r)}(p,0)\varepsilon + o(\varepsilon)$, получаем формулу

$$F_1(p) = \frac{1}{p\,(-g'_{(0,r)}(p,0))}. \tag{11}$$

Пример 1. Рассматривается двумерный процесс $(X(t), Y(t))$. Процесс $X(t)$ – это одномерный броуновский процесс с отражением. Процесс имеет значения в интервале $[0,\infty)$, $B(x) = -A < 0$, $C(x) = 1$. Решения уравнения (1) имеют вид

$$g_{(c,d)}(\lambda, x) = e^{(x-c)A}\,\frac{\operatorname{sh}(d-x)r_1}{\operatorname{sh}(d-c)r_1}, \tag{12}$$

$$h_{(c,d)}(\lambda, x) = e^{-(d-x)A}\,\frac{\operatorname{sh}(x-c)r_1}{\operatorname{sh}(d-c)r_1}, \tag{13}$$

где $r_1 = \sqrt{A^2+2\lambda}$. Отсюда по формуле (5) получаем

$$K(\lambda, y) = \frac{r_1\,e^{-yA}}{(L(\lambda)-A)\operatorname{sh} yr_1 + r_1\,\operatorname{ch} yr_1}. \tag{14}$$

Для двумерного распределения имеем

$$\mathbf{E}_0(\exp(-\lambda\alpha)) = K(\lambda,\,\varepsilon),$$

$$\mathbf{E}_0(\exp(-\lambda\beta)) = e^{-\varepsilon(r_1-A)},$$

$$\mathbf{E}_0\exp(-\lambda T_0(y)) = \exp(-y(\sqrt{A^2+2\lambda}-A)).$$

Используя эти выражения, получаем формулу

$$F(p) = \frac{\sqrt{A^2+2p}-A}{p\,(\sqrt{A^2+2p}-A+L(\lambda))}.$$

Применим к этой функции формулу Меллина, согласно которой

$$f(t) \equiv \mathbf{E}_0 \exp(-L(\lambda)\,V(t)) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}\,\frac{\sqrt{A^2+2p}-A}{p\,(\sqrt{A^2+2p}-A+L(\lambda))}\,dp.$$

Заменяя $A^2+2p = p_1$, мы приводим этот интеграл к виду $f(t) = e^{-A^2t/2}f_0(t)$, где

$$\begin{aligned} f_0(t) &\equiv \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt/2}F_0(p)\,dp \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt/2}\,\frac{dp}{(\sqrt{p}+A)(\sqrt{p}-A+L(\lambda))}. \end{aligned}$$

Вычисление этого интеграла достаточно просто. Оно сводится к нахождению интеграла от значения функции по границам разреза комплексной плоскости вдоль вещественной оси от $-\infty$ до нуля и, кроме того, из вычета в особой точке $p = (A-L(\lambda))^2$ в том случае, если $A > L(\lambda)$ (в противном случае этот член отсутствует). Имеем в этом случае первое слагаемое

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{-\infty}^{0} e^{xt}\,\frac{1}{(i\sqrt{-x}+A)(i\sqrt{-x}-A+L(\lambda))}\,dx \right.\\ &\left.\quad-\int\limits_{-\infty}^{0} e^{xt}\,\frac{1}{(-i\sqrt{-x}+A)(-i\sqrt{-x}-A+L(\lambda))}\,dx\right)\\ &= -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{0}^{\infty} e^{-xt}\,\frac{1}{(i\sqrt{x}+A)(i\sqrt{x}-A+L(\lambda))}\,dx \right.\\ &\left.\quad-\int\limits_{0}^{\infty} e^{-xt}\,\frac{1}{(-i\sqrt{x}+A)(-i\sqrt{x}-A+L(\lambda))}\,dx\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-xt} \frac{L(\lambda)\sqrt{x}}{(x+A^2)(x+(A-L(\lambda))^2)}\, dx.$$

Вычисляя вычет стандартным образом при $A > L(\lambda)$, получаем

$$\operatorname{Res}\,(e^{pt/2}F_0(p),\,(A-L(\lambda))^2) = e^{(A-L(\lambda))^2 t/2}\,\frac{2(A-L(\lambda))}{2A-L(\lambda)}.$$

Отсюда получаем

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-(x+A^2)t/2}\,L(\lambda)\sqrt{x}}{(x+A^2)(x+(A-L(\lambda))^2)}\, dx$$

$$+\frac{2e^{-L(\lambda)(2A-L(\lambda))^2 t/2}\,(A-L(\lambda))}{2A-L(\lambda)}\, I_{A>L(\lambda)}. \tag{15}$$

Это представление функции $f(t)$ удобно для дальнейшего интегрирования по t. Для полноты картины мы приведём значение интеграла в явном виде.

Разбивая дробь в интегральном представлении $f_0(t)$ на две простые дроби, мы получаем два интеграла вида

$$\int_0^\infty e^{-xt}\,\frac{\sqrt{x}}{x+a^2}\, dx \quad (a \neq 0).$$

Сделаем замену переменных и представим одну часть интеграла в виде отдельной функции:

$$\int_0^\infty e^{-y^2 t}\,\frac{2y^2}{y^2+a^2}\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} - 2a^2 G(t),$$

где

$$G(t) \equiv \int_0^\infty \frac{e^{-y^2 t}}{y^2+a^2}\, dy.$$

Дифференцируя этот интеграл по параметру t, получаем дифференциальное уравнение

$$G' - a^2 G + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} = 0, \quad G(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}.$$

Решение этого уравнения

$$G(t) = e^{a^2 t}\frac{\pi}{2a}\ \mathrm{erfc}\ (a\sqrt{t}),$$

где

$$\mathrm{erfc}\ (x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_x^\infty e^{-u^2}\,du.$$

Учитывая принятые обозначения, окончательно получаем

$$f(t) = \frac{1}{2A - L(\lambda)}\Big(A\ \mathrm{erfc}\ (A\sqrt{t/2})$$

$$-e^{-L(\lambda)(2A-L(\lambda))t/2}|A - L(\lambda)|\ \mathrm{erfc}\ (|A - L(\lambda)|\sqrt{t/2})$$

$$+2e^{-L(\lambda)(2A-L(\lambda))t/2}\,(A - L(\lambda))\,I_{A>L(\lambda)}\Big). \tag{16}$$

Используя формулу (15), мы получаем формулу, связывающую две переходные производящие функции исходного и преобразованного полумарковских процессов

$$\widehat{F}_{\tau_u}(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(x + A^2)(x + (A - L(\lambda)))}\,\widehat{F}_\tau(\lambda + (x + A^2)/2)\,dx$$

$$+\frac{2(A - L(\lambda))}{2A - L(\lambda))}\,\widehat{F}_\tau(\lambda + L(\lambda)(2A - L(\lambda))/2)\,I_{A>L(\lambda)}. \tag{17}$$

Для вычисления математического ожидания $f_1(t) \equiv \mathbf{E}_0 V(t)$ в примере 1 имеем

$$F_1(p) \equiv \int\limits_0^\infty e^{-pt} f_1(t)\,dt = \frac{1}{p\,(\sqrt{A^2 + 2p} - A)}.$$

Отсюда

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}\frac{dp}{p\,(\sqrt{A^2 + 2p} - A)}$$

$$= e^{-tA^2/2}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt/2}\frac{dp}{(p - A^2)(\sqrt{p} - A)}.$$

Нахождение интеграла сводится к вычислению вычета в точке $p = A^2$ и интегрированию по краям разреза комплексной плоскости по действительной оси от $-\infty$ до нуля. В результате получаем

$$f_1(t) = t + \frac{1}{2A} - \frac{2}{\pi}\, e^{-tA^2/2} \int\limits_0^\infty e^{-ty^2/2} \frac{y^2\, dy}{(y^2 + A^2)^2}.$$

Применяя метод интегрирования путём сведения к дифференциальному уравнению аналогичный предыдущему случаю и совершая некоторые преобразования, получаем

$$f_1(t) = (1+A/2)\, t - \frac{At}{\sqrt{\pi}}\, \mathrm{erf}\,(A\sqrt{t/2}) + \frac{2}{A\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{A\sqrt{t/2}} (1+u^2)\, e^{-u^2}\, du. \quad (18)$$

Дальнейшие преобразования можно произвести, зная аналитический вид функции распределения F_τ.

Пример 2. Рассматривается двумерный процесс $(X(t), Y(t))$. Процесс $X(t)$ – это одномерный бесселевский процесс с отражением. Процесс принимает значения из интервала $[0, R)$. Коэффициенты уравнения (1): $B(x) = -1/(R-x)$, $C(x) = 1$. Для данного процесса граница R интервала является недостижимой. На открытых интервалах решения уравнения (1) имеют вид

$$g_{(c,d)}(\lambda, x) = \frac{(R-c)\,\mathrm{sh}(d-x)\sqrt{2\lambda}}{(R-x)\,\mathrm{sh}(d-c)\sqrt{2\lambda}}, \quad (19)$$

$$h_{(c,d)}(\lambda, x) = \frac{(R-d)\,\mathrm{sh}(x-c)\sqrt{2\lambda}}{(R-x)\,\mathrm{sh}(d-c)\sqrt{2\lambda}}. \quad (20)$$

Этот пример имеет отношение к модели капиллярной хроматографии, где R – радиус капиллярной трубки, $X(t)$ – компонента двумерного броуновского процесса, представляющая радиальную составляющую, а именно $R - X(t)$ равно расстоянию от оси капилляра до броуновской частицы. Компонента $Y(t)$ представляет осевое перемещение броуновской частицы.

Имеем для двумерного процесса

$$\mathbf{E}_0(\exp(-\lambda\alpha)) = K(\lambda, \varepsilon) = \frac{(R-\varepsilon)\sqrt{2\lambda}}{R\sqrt{2\lambda}\,\mathrm{ch}\,\varepsilon\sqrt{2\lambda} - (1 - L(\lambda)R)\,\mathrm{sh}\,\varepsilon\sqrt{2\lambda}} \quad (21)$$

$$\mathbf{E}_0(\exp(-\lambda\beta)) = 1 - \left(\frac{\sqrt{2\lambda}\,\operatorname{ch} R\sqrt{2\lambda}}{\operatorname{sh} R\sqrt{2\lambda}} - \frac{1}{R}\right)\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Для функции $f(t) \equiv \mathbf{E}_0 \exp(-L(\lambda)V(t))$ определяем преобразование Лапласа по аргументу t

$$F(p) \equiv \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt = \frac{R\sqrt{2p}\,\operatorname{ch} R\sqrt{2p} - \operatorname{sh} R\sqrt{2p}}{p\,(R\sqrt{2p}\,\operatorname{ch} R\sqrt{2p} - G\operatorname{sh} R\sqrt{2p})},$$

где $G = 1 - L(\lambda)R$. Применим к этой функции формулу Меллина, согласно которой

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}\frac{(R\sqrt{2p}\,\operatorname{ch} R\sqrt{2p} - \operatorname{sh} R\sqrt{2p})\,dp}{p\,(R\sqrt{2p}\,\operatorname{ch} R\sqrt{2p} - G\operatorname{sh} R\sqrt{2p})}.$$

Обозначим $R\sqrt{2p} = z = x + iy$. Учитывая изменения аргумента в представлении $p = \varrho e^{i\phi}$, получаем $z = R\sqrt{2\varrho}\,e^{i\phi/2}$, откуда при $-\pi \leqslant \phi \leqslant \pi$ следует, что $x \geqslant 0$. Найдём корни уравнения

$$g(z) \equiv z\operatorname{ch} z - G\operatorname{sh} z = 0,$$

которое перепишем в виде

$$(x+iy)(\operatorname{ch} x\cos y + i\operatorname{sh} x\sin y) - G(\operatorname{sh} x\cos y + i\operatorname{ch} x\sin y) = 0.$$

Отсюда получаем систему из двух уравнений

$$x\operatorname{ch} x\cos y - y\operatorname{sh} x\sin y - G\operatorname{sh} x\cos y = 0, \tag{22}$$

$$y\operatorname{ch} x\cos y + x\operatorname{sh} x\sin y - G\operatorname{ch} x\sin y = 0. \tag{23}$$

Нетрудно угадать семейство решений этого уравнения при $x = 0$. При этом первое уравнение превращается в тождество, а второе даёт уравнение

$$y\cos y = G\sin y.$$

При $G = 0$ уравнение имеет ненулевые корни вида $y_k = \pi/2 + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. При $G \neq 0$ это уравнение, иначе представимое как

$$y = G\operatorname{tg} y, \tag{24}$$

имеет бесконечное число корней, которые мы обозначим как (y_k) $(-\infty < k < \infty)$, которые для любого G и k могут быть вычислены. Нам нужно доказать, что других корней у системы уравнений (22) и (23) нет.

Лемма 2. *При $x \geqslant 0$ система уравнений* (22), (23) *не содержит решений при $x > 0$.*

Доказательство. Предположим, что существует корень (x, y) при $x > 0$. Если $\cos y = 0$, то $\sin y \neq 0$, $y \neq 0$ и из уравнения (22) следует $\operatorname{sh} x = 0$, $x = 0$, что противоречит допущению. Таким образом, $\cos y \neq 0$. Если $\sin y = 0$, то из уравнения (23) получаем $y = 0$ и из (22) получаем уравнение $x \operatorname{ch} x \cos y = G \operatorname{sh} x \cos y$, откуда (т. к. $\cos y \neq 0$) $x = G \operatorname{th} x$. Но при $G \leqslant 1$ это уравнение имеет только один корень $x = 0$. Следовательно, $\sin y \neq 0$, $y \neq 0$. Разделив первое уравнение на $\operatorname{sh} x \cos y$ и второе на $\operatorname{ch} x \sin y$, получаем два уравнения

$$x \frac{\operatorname{ch} x}{\sin y} - y \frac{\sin y}{\cos y} = G, \quad y \frac{\cos y}{\sin y} + x \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = G,$$

откуда получаем предполагаемое тождество

$$\frac{x}{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x} = \frac{y}{\sin y \cos y},$$

которое можно переписать в виде

$$\frac{\operatorname{sh} 2x}{x} = \frac{\sin 2y}{y}.$$

Но при $t > 0$ области значений функций

$$g_1(t) = \frac{\operatorname{sh} 2t}{t}, \quad g_2(t) = \frac{\sin 2t}{t}$$

не пересекаются. Следовательно, наше предположение приводит к противоречию. □

Итак, у функции $F(p)$ имеются особые точки $p = 0$ и $p_k = -y_k^2/(2R^2)$, где y_k принадлежит множеству решений уравнения (24). Нетрудно убедиться, что $p = 0$ – устранимая особая точка, а ненулевые особые точки имеют порядок единица. Стандартным способом получаем

$$\operatorname{Res}\left(e^{pt}F(p), p_k\right) = e^{-ty^k/(2R^2)} \frac{2(y_k \cos y_k - \sin y_k)}{y_k((1-G)\cos y_k - y_k \sin y_k)} = \\ = e^{-ty^k/(2R^2)} \frac{2(1-G)}{y_k^2 - (1-G)G},$$

откуда

$$f(t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-ty^k/(2R^2)} \frac{2(1-G)}{y_k^2 - (1-G)G}. \tag{25}$$

Таблица 1

G	0.5	0.7	0.9	1	1.5	2	10
y_1	1.1658	0.9203	0.5399	0	0	0	0
y_2	4.6042	4.5601	4.5156	4.4934	4.3825	4.2748	3.4761
y_3	7.7899	7.7640	7.7381	7.7251	7.6607	7.5966	6.8862
y_4	10.9499	10.9316	10.9133	10.9041	10.8582	10.8126	10.2211
y_5	14.1016	14.0875	14.0733	14.0662	14.0306	13.9952	13.4996
y_6	17.2498	17.2382	17.2266	17.2207	17.1917	17.1627	16.7403
y_7	20.3958	20.3860	20.3762	20.3712	20.3467	20.3222	19.9558
y_8	23.5407	23.5322	23.5236	23.5194	23.4981	23.4770	23.1542
y_9	26.6847	26.6772	26.6697	26.6660	26.6473	26.6285	26.3407
y_{10}	29.8283	29.8216	29.8149	29.8115	29.7947	29.7780	29.5184

Численные значения некоторых корней y_k показаны в Таблице 1.

Используя формулу (25), мы получаем формулу, связывающую две переходные производящие функции исходного и преобразованного полумарковских процессов

$$\widehat{F}_{\tau_u}(\lambda) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(1-G)}{y_k^2 - (1-G)G}\, \widehat{F}_{\tau}(\lambda + y^k/(2R^2)), \tag{26}$$

где $G = 1 - RL(\lambda)$.

Обозначая $f_1(t) = \mathbf{E}_0 V(t)$. Имеем

$$F_1(p) \equiv \int_0^\infty e^{-pt} f_1(t)\, dt = \frac{R \operatorname{sh} R\sqrt{2p}}{p\,(R\sqrt{2p}\, \operatorname{ch} R\sqrt{2p} - \operatorname{sh} R\sqrt{2p})}.$$

Имеем

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p)\, dp.$$

Подынтегральное выражение имеет полюс второго порядка $p = 0$. Вычисляя стандартным образом вычет в этой точке, получаем

$$\operatorname{Res}\,(e^{pt}F_1(p),\, 0) = \lim_{p\to 0} \frac{\partial}{\partial p} \frac{e^{pt} pR \operatorname{sh} R\sqrt{2p}}{(R\sqrt{2p}\, \operatorname{ch} R\sqrt{2p} - \operatorname{sh} R\sqrt{2p})} = \frac{3\,t}{2R} + \frac{13\,R}{80}.$$

Кроме того, это выражение имеет множество полюсов первого порядка вида

$$p_k = -\frac{y_k^2}{2R^2}, \text{ где } \ y_k = \operatorname{tg} y_k.$$

Вычеты в этих точках равны

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\,(e^{pt}F_1(p),\, p_k) &= \lim_{p\to p_k} \frac{e^{pt} R \operatorname{sh} R\sqrt{2p}\,(p-p_k)}{p\,(R\sqrt{2p}\,\operatorname{ch} R\sqrt{2p} - \operatorname{sh} R\sqrt{2p})} \\ &= -\frac{2R}{y_k^2}\, e^{-ty_k^2/(2R^2)}.\end{aligned}$$

Замечая, что интеграл по границам разреза комплексной плоскости равен нулю, получаем

$$f_1(t) = \frac{3\,t}{2R} + \frac{13\,R}{80} - 2R\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{y_k^2}\, e^{-ty_k^2/(2R^2)}.$$

Отсюда

$$\mathbf{E}_0\tau_u = (1+3/(2R))\mathbf{E}_0\tau + \frac{13\,R}{80} - 2R\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{y_k^2}\,\widehat{F}_\tau(y_k^2/(2R^2)).$$

Одно из следствий этой формулы состоит в том, что среднее τ_u растёт при $R \to 0$. Это свойство не удивительно с точки зрения капиллярной хроматографии, где R интерпретируется как радиус капилляра, по которому проходит газ. Неожиданной является "потеря чувствительности" к исследуемому газу в рамках данной модели, что видно при рассмотрении нормированного времени $\widetilde{\tau}_u = R\tau_u$ при условии $R \to 0$. При этом

$$\mathbf{E}_0\widetilde{\tau}_u \to \frac{3}{2}\,\mathbf{E}_0\tau.$$

Литература

1. Б. П. Харламов, *Диффузионный процесс с задержкой на краях отрезка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **351** (2007), 284–297.
2. Б. П. Харламов, *О марковском диффузионном процессе с замедленным отражением на границе отрезка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **368** (2009), 231–255.
3. B. P. Harlamov, *Continuous semi-Markov processes.* ISTE & Wiley, London, 2008.
4. B. P. Harlamov, *Stochastic model of gas capillary chromatography.* — In: Communication in Statistics, Theory, and Methods (в редакции, LSSP 625782).

Rasova S. S., Harlamov B. P. On movement of Brownian particles along a delaying screen.

A two-dimensional Markov diffusion process on the open half-plane as the range of values is considered. With respect to the boundary of the half-plane the process is represented by the normal and tangential components, which are locally independent at any point of the open half-plane. The range of values is extended on the boundary by some rule representing reflection with delaying. Due to this reflection the components of the process become dependent. The tangential component obtains delay as well. The relation between distributions of the initial independent and delayed dependent components is derived in terms of their Laplace images.

Институт проблем машиноведения РАН,
Большой пр. ВО, д. 61,
199178 Санкт-Петербург, Россия

Поступило 20 сентября 2011 г.

E-mail: s.rasova@gmail.com, b.p.harlamov@gmail.com