Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 396, 2011 г.

В. В. Петров

ОДНА ТЕОРЕМА ОБ УСИЛЕННОМ ЗАКОНЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В настоящей заметке приведено доказательство одного нового результата о применимости усиленного закона больших чисел к последовательности неотрицательных случайных величин.

Как показано в [1], если $\{X_n\}$ – последовательность неотрицательных случайных величин с конечными дисперсиями, удовлетворяющая условиям $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Var} S_n/n^3 < \infty$ и $\mathbf{E}(S_n - S_m) \leqslant C(n-m)$ для всех достаточно больших $n-m$, где $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ и C – постоянная, то $(S_n - \mathbf{E}\, S_n)/n \to 0$ п.н. Отсюда следует одна теорема из [2].

Следующее предложение представляет собой обобщение этих результатов.

Теорема. *Пусть* $X_1, X_2, \dots$ *– последовательность неотрицательных случайных величин с конечными моментами порядка* $p \geqslant 1$*, и пусть выполнены условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E} \mid S_n - \mathbf{E}\, S_n \mid^p /n^{pq+1} < \infty, \tag{1}$$

$$\mathbf{E}(S_n - S_m) \leqslant C(n-m)^q \tag{2}$$

при некотором $q \geqslant 1$ *и всех достаточно больших* $n-m$*, где* C *– постоянная. Тогда*

$$(S_n - \mathbf{E}\, S_n)/n^q \to 0 \quad \textit{п.н.} \tag{3}$$

Из этой теоремы следует сформулированный выше результат работы [1] при $p = 2$ и $q = 1$.

Ключевые слова: усиленный закон больших чисел, последовательности неотрицательных случайных величин.

Работа поддержана грантами РФФИ 10-01-00314 и НШ 4472.2010.1.

Доказательство. В силу условия (1) и леммы Дворецкого [3], формулировку которой можно найти также в [1], существует строго возрастающая последовательность целых чисел $\{n_k\}$, такая, что

$$n_{k+1}/n_k \to 1 \quad (k \to \infty), \tag{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}\big|S_{n_k} - \mathbf{E}\,S_{n_k}\big|^p / n_k^{pq} < \infty. \tag{5}$$

По неравенству Чебышева получаем

$$\mathbf{P}\big(\big|S_{n_k} - \mathbf{E}\,S_{n_k}\big| \geqslant \varepsilon n_k^q\big) \leqslant (\varepsilon n_k^q)^{-p}\mathbf{E}\big|S_{n_k} - \mathbf{E}\,S_{n_k}\big|^p$$

для любого $\varepsilon > 0$. Применение леммы Бореля–Кантелли с использованием (5) приводит к равенству

$$\mathbf{P}\big(\big|S_{n_k} - \mathbf{E}\,S_{n_k}\big| \geqslant \varepsilon n_k^q \ \text{ б.ч.}\big) = 0$$

для любого $\varepsilon > 0$. Поэтому

$$\lim_{k\to\infty} \big(S_{n_k} - \mathbf{E}\,S_{n_k}\big)/n_k^q = 0 \ \text{ п.н.} \tag{6}$$

Если $n_k \leqslant n < n_{k+1}$, то с учетом неотрицательности случайных величин из исходной последовательности приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} &\frac{S_{n_k} - \mathbf{E}\,S_{n_k}}{n_k^q} \cdot \frac{n_k^q}{n_{k+1}^q} - \frac{\mathbf{E}\,S_{n_{k+1}} - \mathbf{E}\,S_{n_k}}{n_{k+1}^q} \\ &\leqslant \frac{S_n - \mathbf{E}\,S_n}{n^q} \leqslant \frac{S_{n_{k+1}} - \mathbf{E}\,S_{n_{k+1}}}{n_{k+1}^q} \cdot \frac{n_{k+1}^q}{n_k^q} + \frac{\mathbf{E}\,S_{n_{k+1}} - \mathbf{E}\,S_{n_k}}{n_k^q}. \end{aligned} \tag{7}$$

В силу (6) и (4), первые слагаемые в левой и правой частях (7) сходятся к нулю при $k \to \infty$ почти наверное. Такое же утверждение справедливо и для вторых слагаемых вследствие (2) и (4). Поэтому

$$\max_{n_k \leqslant n < n_{k+1}} \mid S_n - \mathbf{E}\,S_n \mid /n^q \to 0 \ \text{ п.н.}$$

при $k \to \infty$. Отсюда и из (6) следует соотношение (3). Теорема доказана. □

Литература

1. В. В. Петров, *К усиленному закону больших чисел для последовательности неотрицательных случайных величин.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **384** (2010), 182–184.
2. В. В. Петров, *Об усиленном законе больших чисел для последовательности неотрицательных случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен. **53** (2008), 379–382.

3. A. Dvoretzky, *On the strong stability of a sequence of events.* — Ann. Math. Statist. **20** (1949), 296–299.

Petrov V. V. A theorem on the strong law of large numbers for a sequence of nonnegative random variables.

New sufficient conditions are found for the applicability of the strong law of large numbers to a sequence of dependent nonnegative random variables.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: petrov2v@mail.ru

Поступило 25 сентября 2011г.