Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 396, 2011 г.

**И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев**

# ВЕРОЯТНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

## 1. Введение

В настоящей работе строится аналог вероятностного представления решений задачи Коши для ряда эволюционных уравнений. Пусть $w(t),\ t \in [0,T]$ – стандартный винеровский процесс. Хорошо известно, что для каждого $\sigma > 0$ одномерные распределения процесса $\sigma w(t)$ абсолютно непрерывны и имеют плотности $\rho_t(x)$, где

$$\rho_t(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}}, \tag{1}$$

причем функция $\rho_t(x)$ является фундаментальным решением уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2}$$

что означает, что для широкого класса функций $\varphi$ функция

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x+y)\rho_t(y)dy \tag{3}$$

является решением задачи Коши уравнения (2) с начальным условием $u(0,x) = \varphi(x)$. Последнее выражение может быть переписано как

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x+y)\rho_t(y)dy = \mathbf{E}\,\varphi(x+\sigma w(t)). \tag{4}$$

---

*Ключевые слова*: случайные процессы, эволюционные уравнения, предельные теоремы, формула Фейнмана–Каца.

Работа первого автора выполнена при поддержке грантов РФФИ-ННИО 09-01-91331-а и НШ-4472.2010.1. Работа второго автора выполнена при поддержке грантов DFG 436 RUS 113/823, НШ-4472.2010.1 и НШ-5931.2010.1. Работа третьего автора выполнена при поддержке грантов НШ-5931.2010.1, РФФИ 09-01-00515-а и РФФИ 11-01-90402-укр-ф-а.

Аналогичное вероятностное представление справедливо и в случае, когда рассматривается уравнение теплопроводности, содержащее потенциал. Именно, в силу формулы Фейнмана–Каца [2, 5, 7], функция

$$u(t,x) = \mathbf{E}\left[\varphi(x+\sigma(w(T)-w(t)))\exp\left(\int\limits_t^T f(x+\sigma(w(u)-w(t)))du\right)\right] \quad (5)$$

является решением задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x)u = 0, \quad u(T,x) = \varphi(x). \quad (6)$$

Мы в настоящей работе рассматриваем случай, когда $\sigma$ является комплексным числом. В данном случае функция (1) также являются фундаментальным решением уравнения (2), но для каждого $t > 0$ функция $\rho_t$ комплекснозначна и уже не является плотностью вероятностного распределения и, соответственно, не является распределением случайной величины.

Посмотрим сначала, как меняется вид функции $\rho_t$ в зависимости от значения параметра $\sigma$. Прежде всего заметим, что в силу однородности, достаточно рассмотреть случай $|\sigma| = 1$. Кроме того, так как в уравнение входит только $\sigma^2$, мы ограничимся случаем $\mathrm{Re}\ \sigma \geqslant 0$.

Итак, случаю $\arg\sigma = 0$ соответствует гауссовская плотность, в случае $|\arg\sigma| < \frac{\pi}{4}$ функция $\rho_t$ комплекснозначна и сверхэкспоненциально убывает, а $\int\limits_{\mathbb{R}} \rho_t(x)dx = 1$ для любого $t > 0$. Случай $|\arg\sigma| = \frac{\pi}{4}$ соответствует уравнению Шредингера, при этом $|\rho_t| \equiv 1$, при всех $t > 0$, а интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}} \rho_t(x)dx$ равен единице, но определен только как несобственный. Наконец, в случае $|\arg\sigma| > \frac{\pi}{4}$ функции $|\rho_t|$, быстро возрастают, и соответственно, неинтегрируемы, крайний случай $|\arg\sigma| = \frac{\pi}{2}$ соответствует обратному уравнению теплопроводности.

Для того, чтобы придать смысл выражениям (4) и (5) для комплексных $\sigma$, можно рассмотреть аналитические продолжения этих выражений. Для уравнения Шредингера ($|\arg\sigma| = \frac{\pi}{4}$) этот подход был использован в [3]. Однако, в этом случае мы должны предположить аналитичность функции $\varphi$ и потенциала $f$, что является излишне сильным ограничением. Кроме того, при этом возникают проблемы, связанные со сходимостью интеграла (5).

В настоящей работе для придания смысла выражениям (4) и (5) используется другой подход, основанный на идеологии теории обобщенных функций. Основная идея состоит в том, что на распределения комплекснозначных случайных величин мы будем смотреть не как на образ вероятностной меры, а как на образ обобщенной функции. Именно, пусть сначала $\xi$ – вещественнозначная случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, а $\mathcal{P}_\xi = \mathbf{P}\,\xi^{-1}$ – распределение этой случайной величины, то есть образ меры $\mathbf{P}$ под действием отображения $\omega \mapsto \xi(\omega)$. Мы также можем смотреть на $\mathbf{P}$ как на обобщенную функцию, действующую на основную функцию $f$ как $\int\limits_\Omega f d\,\mathbf{P}$. В этом случае для случайной величины $\xi$ мы можем определить ее распределение как образ $\xi\,\mathbf{P}$ обобщенной функции $\mathbf{P}$ под действием $\xi$. По определению, $\xi\,\mathbf{P}$ есть обобщенная функция, которая на основную функцию $\varphi$ действует как

$$(\xi\,\mathbf{P}, \varphi) = (\mathbf{P}, \varphi \circ \xi) = \int\limits_\Omega \varphi(\xi) d\,\mathbf{P} = \mathbf{E}\,\varphi(\xi). \tag{7}$$

Таким образом, для вещественных случайных величин $\xi$ понятия ее распределения как образа $\mathcal{P}_\xi = \mathbf{P}\,\xi^{-1}$ меры и как образа $\xi\,\mathbf{P}$ обобщенной функции совпадают. Именно, для каждой основной функции $\varphi$ мы имеем

$$(\xi\,\mathbf{P}, \varphi) = \mathbf{E}\,\varphi(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi d\mathcal{P}_\xi. \tag{8}$$

Совсем не так обстоит дело, когда мы рассматриваем распределения комплекснозначных случайных величин. Рассмотрим сначала только интересующий нас случай, когда комплекснозначная случайная величина $\eta$ имеет вид $\eta = x + \sigma\xi$, где $\xi$ – вещественная случайная величина, а $\sigma, x$ – константы, причем $x \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{C}$, и $\operatorname{Im} \sigma \neq 0$. При этом распределение $\mathcal{P}_\eta = \mathbf{P}\,\eta^{-1}$ случайной величины $\eta$, рассматриваемое как образ меры $\mathbf{P}$, есть вероятностная мера на комплексной плоскости, носитель которой лежит на прямой $x + \sigma t,\ t \in \mathbb{R}$.

Предположим теперь дополнительно, что $\mathbf{E}\,e^{\lambda|\xi|} < \infty$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ и посмотрим на распределение $\eta$ как на образ обобщенной функции, то есть как на обобщенную функцию. В качестве пространства основных функций мы возьмем множество (далее будем обозначать его через $\mathcal{H}_{\mathrm{fin}}$) комплекснозначных функций $\varphi$ вещественного аргумента, которые являются преобразование Фурье конечного заряда с финитным носителем. По определению обобщенная функция $\eta\,\mathbf{P}$ действует на основную функцию $\varphi \in \mathcal{H}_{\mathrm{fin}}$ как

$$(\eta\,\mathbf{P}, \varphi) = \mathbf{E}\,\varphi(\eta), \tag{9}$$

где подстановка комплексной $\eta$ в функцию вещественного аргумента понимается как подстановка в аналитическое продолжение функции $\varphi$, то есть в функцию $\varphi(z)$ комплексной переменной $z$, где

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ipz} \widehat{\varphi}(p)dp. \tag{10}$$

Таким образом, мы имеем

$$(\eta\,\mathbf{P}, \varphi) = \mathbf{E}\,\varphi(\eta) = \frac{1}{2\pi}\,\mathbf{E} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ip\eta} \widehat{\varphi}(p)dp$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(p) e^{-ipx}\,\mathbf{E}\,e^{-ip\sigma\xi} dp = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(p) e^{-ipx} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ip\sigma y} d\mathcal{P}_\xi(y) dp.$$

Последнее выражение показывает, что преобразование Фурье $\widehat{\eta\,\mathbf{P}}$ обобщенной функции $\eta\,\mathbf{P}$ имеет вид $e^{ipx} f_\xi(\sigma p)$, где $f_\xi(p) = \mathbf{E}\,e^{ip\xi}$ – характеристическая функция случайной величины $\xi$.

Аналогичным образом, в случае, когда $\eta$ – произвольная комплекснозначная случайная величина (не обязательно имеющая вид вещественной случайной величины, умноженной на комплексную константу), формула (9) задает обобщенную функцию $\eta\,\mathbf{P}$, имеющую преобразование Фурье

$$\widehat{\eta\,\mathbf{P}}(p) = \mathbf{E}\,e^{ip\eta}.$$

Важно отметить, что распределение комплекснозначной случайной величины, задаваемое (9) и понимаемое как обобщенная функция, определяется на очень узком классе основных функций. Если же нам дополнительно известно, что соответствующее преобразование Фурье достаточно быстро убывает, то мы можем продолжить $\eta\,\mathbf{P}$ на более широкий класс функций.

Отметим также, что в смысле определения (9) для любого $t > 0$ образ $\eta\,\mathbf{P}$ винеровской меры $\mathbf{P}$ под действием отображения $\eta = \sigma w(t)$, где $\sigma \in \mathbb{C}$, есть регулярный функционал с плотностью (1), то есть фундаментальное решение уравнения (2).

Далее, формула (9) может быть легко обобщена на векторный случай. Именно, когда $\eta$ есть случайный элемент $\mathbb{C}^d$, в качестве основных функций $\varphi$ в (9) нужно использовать аналитические функции нескольких переменных [4]. Представляется естественным, используя формулу (9), попытаться определить распределение процесса $\sigma w(t)$, $t \in [0,T]$, как обобщенную функцию, заданную на классе основных функций, зависящих от всей траектории процесса, но при этом возникают трудности, связанные с определением понятия аналитической функции $\varphi(z)$, аргумент $z$ которой в свою очередь является непрерывной комплекснозначной функцией. Одним из возможных способов преодоления этой трудности, по-видимому, является подход с использованием техники кратных стохастических интегралов, но мы в настоящей работе используем другой подход, основанный на идеях работы [1]. Именно, вместо винеровского процесса мы используем некоторый обобщенный случайный процесс. В отличие от обычного вероятностного процесса обобщенный случайный процесс задается не на вероятностном пространстве, а на пространстве, на котором вместо вероятностной меры задана некоторая обобщенная функция, соответственно, конечномерные распределения обобщенного процесса суть уже не образы вероятностной меры, а образы обобщенной функции (то есть тоже обобщенные функции). Как заменитель винеровского процесса мы выбираем обобщенный процесс, конечномерные распределения которого совпадают с конечномерными распределениями винеровского процесса. Преимущество использования обобщенного процесса вместо винеровского состоит в том, что все его траектории устроены очень просто. Именно, они всегда состоят из конечного числа скачков, соответственно, аналитическая функция от траекторий этого процесса есть просто аналитическая функция конечного числа переменных. В терминах нашего обобщенного процесса мы строим представления решений задачи Коши для уравнений (2) и (6), которые по форме напоминают представления (4) и (5), но в этих представлениях вместо операции взятия математического ожидания используется вычисление обобщенной функции (на том же самом функционале). Такое представление нельзя назвать вероятностным, поэтому мы дополнительно строим аппроксимацию обобщенного процесса последовательностью $\xi_n(t)$, $t \in [0,T]$, сложных пуассоновских процессов. Последовательность $\xi_n$ с одной стороны слабо сходится (в пространстве функций, не имеющих разрывов второго рода, с топологией, порожденной равномерной нормой) к винеровскому процессу, а с другой стороны, в смысле обобщенных функций (то есть на каждой основной функции) последовательность мер, порожденных $\xi_n$, сходится к обобщенной функции, отвечающей обобщенному процессу, который мы выбрали в качестве заменителя винеровского процесса.

Далее, если мы подставим в выражения (4) и (5) (с комплексным $\sigma$) вместо винеровского процесса $w(t)$ процесс $\xi_n(t)$, то полученные функции будут являться решениями других эволюционных уравнений типа (2) и (6), но вместо оператора $\frac{d^2}{dx^2}$ они будут содержать интегрально-разностные операторы, которые при $n \to \infty$ аппроксимируют оператор $\frac{d^2}{dx^2}$. Мы докажем несколько теорем о сходимости решений допредельных уравнений к решениям предельных.

Кроме этого, мы докажем теорему о сходимости квадратических вариаций допредельных (комплекснозначных) процессов к квадратической вариации предельного процесса.

## §2. Основные обозначения

Преобразование Фурье $\widehat{f}$ функции $f$ мы определяем как $\widehat{f}(p) = \int e^{ipx} f(x)dx$, соответственно, обратное преобразование Фурье функции $g$ определяется как $\frac{1}{2\pi}\int e^{-ipx} g(p)dp$.

В соответствии с [4], через $\delta$ мы будем обозначать обобщенную функцию, которая на основную функцию $\varphi$ действует как $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$. Через $\delta^{(n)}$ будем обозначать производные этой обобщенной функции, именно, $(\delta^{(n)}, \varphi) = (-1)^n(\varphi^{(n)}(0))$.

Далее, для $t \in \mathbb{R}$ через $\delta_t$ будем обозначать единичную массу, сосредоточенную в точке $t$. На этот объект нам будет удобнее смотреть как на меру, а не как на обобщенную функцию.

Через $\mathcal{R}_0$ будем обозначать пространство Винера ограниченных (комплекснозначных) функций $f$, таких, что $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R})$. Норма $\|\cdot\|_{\mathcal{R}_0}$ в этом пространстве определяется как $\|f\|_{\mathcal{R}_0} = \|\widehat{f}\|_1$. Справедливо неравенство $\|f\|_\infty \leqslant \|f\|_{\mathcal{R}_0}$. Через $\mathcal{R}_0^-$ (соответственно $\mathcal{R}_0^+$) обозначим пространство ограниченных функций $f$, таких, что носитель функции $\widehat{f}$ лежит на положительной (соответственно, отрицательной) полуоси и $\widehat{f} \in L_1[0,\infty)$ (соответственно $\widehat{f} \in L_1(-\infty, 0]$). Функции из $\mathcal{R}_0^-$ допускают ограниченное аналитическое продолжение в нижнюю полуплоскость, а функции из $\mathcal{R}_0^+$, соответственно, в верхнюю полуплоскость.

Через $\mathcal{H}_2^-$ (соответственно $\mathcal{H}_2^+$) обозначим пространство Харди функций $f$, таких, что носитель функции $\widehat{f}$ лежит на положительной (соответственно отрицательной) полуоси и $\widehat{f} \in L_2[0,\infty)$ (соответственно $\widehat{f} \in L_2(-\infty,0]$). Функции из $\mathcal{H}_2^-$ допускают аналитическое продолжение в нижнюю полуплоскость, функции из $\mathcal{H}_2^+$, соответственно, в верхнюю полуплоскость.

## §3. Обобщенная функция, как предел вероятностных мер

Зафиксируем $T > 0$ и через $\Omega_0$ обозначим пространство всех дискретных зарядов на $[0,T]$ с конечным спектром (с конечным числом атомов). Каждый элемент $\omega$ этого пространства представляется в виде

$$\omega = \sum_{j=1}^{k} x_j \delta_{t_j}, \tag{12}$$

где $k$ – число атомов заряда $\omega$, $\delta_{t_j}$ – $\delta$-мера, сосредоточенная в точке $t_j \in [0,T]$, а $x_j$ – величина заряда, сидящего в точке $t_j$. Заметим, что представление (12) будет однозначным, если мы условимся, что в данном представлении для всех $j$ $|x_j| > 0$ и все точки $t_j$ различны. Это соответствует тому, что точки, заряд в которых равен нулю, удаляются из спектра, а если в одной точке находятся сразу несколько зарядов, то они просто складываются.

Пространство $\Omega_0$ (как подпространство пространства зарядов) является, естественным образом, линейным пространством – умножение на число понимается как умножение заряда на число, а сложение тоже понимается как сложение зарядов, при этом заряды, соответствующие одним и тем же точкам спектра, складываются. В качестве нормы на $\Omega_0$ мы возьмем полную вариацию заряда и рассмотрим топологию, порожденную этой нормой. Через $\mathcal{B}(\Omega_0)$ мы обозначим борелевскую $\sigma$-алгебру на $\Omega_0$.

На пространстве $\Omega_0$ определим два объекта – последовательность вероятностных мер $\{\mathbf{P}_n\}_{n=1}^{\infty}$ и обобщенную функцию $\mathbf{L}$. При этом обобщенная функция $\mathbf{L}$ окажется пределом последовательности $\mathbf{P}_n$, в смысле сходимости обобщенных функций (заметим здесь, что всякую меру мы можем рассматривать и как обобщенную функцию). Определим сначала последовательность вероятностных мер $\mathbf{P}_n$ . При каждом

$n \in \mathbb{N}$ мера $\mathbf{P}_n$ будет порождаться некоторым сложным пуассоновским процессом. Именно, пусть $\nu_n$ – пуассоновская случайная мера на $[0,T]$ с интенсивностью $ndt$, то есть $\mathbf{E}\,\nu_n(dt) = ndt$, а $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность одинаково распределенных случайных величин, независимых между собой и не зависящих от пуассоновской случайной меры. Через $Q$ обозначим общее распределение случайных величин $\{\xi_j\}$. Мы будем предполагать, что $\mathbf{E}\,\xi_1 = 0$, $\mathbf{D}\,\xi_1 = \mathbf{E}\,\xi_1^2 = 1$ и для некоторого $\lambda > 0$

$$\mathbf{E}\,e^{\lambda|\xi_1|} = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{\lambda|y|} Q(dy) < \infty. \tag{13}$$

Для каждого натурального $n$ построим случайный заряд $\zeta_n$ (случайный элемент $\Omega_0$) следующим образом. Пусть

$$\nu_n = \sum_{j=1}^{k} \delta_{t_j}, \quad t_1 < t_2 < \cdots < t_k,$$

– реализация пуассоновской случайной меры $\nu_n$, (здесь $k = \nu_n([0,T])$). В каждую точку $t_j$, $j = 1,\ldots,k$, посадим заряд $\frac{\xi_j}{\sqrt{n}}$. То, что получилось, будет случайным зарядом, который мы обозначим через $\zeta_n$, то есть

$$\zeta_n = \sum_{j=1}^{k} \frac{\xi_j}{\sqrt{n}} \delta_{t_j} \in \Omega_0.$$

Обозначим через $\mathbf{P}_n$ распределение случайного заряда $\zeta_n$ в $\Omega_0$. Отметим, что мера $\mathbf{P}_n$ при всех $n$ однозначно определяется мерой $Q$. Через $\mathbf{E}_n$ условимся обозначать математическое ожидание по мере $\mathbf{P}_n$.

Посмотрим сначала, как будут выглядеть интегралы по мере $\mathbf{P}_n$. Пусть $f : \Omega_0 \to \mathbb{C}$ измеримая (по Борелю) функция (нам будет удобнее сразу рассматривать комплекснозначные функции). Для каждой такой функции $f$ через $f_k$, $k \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2\ldots\}$ обозначим симметричную функцию $k$ двумерных переменных, определяемую как

$$f_k((t_1,x_1),(t_2,x_2),\ldots,(t_k,x_k)) = f(\sum_{j=0}^{k} x_j \delta_{t_j}). \tag{14}$$

Нетрудно понять, что при различных $k$ функции $f_k$ связаны соотношениями

$$f_{k+1}((t_1,x_1),\ldots,(t_k,x_k),(t_{k+1},0)) = f_k((t_1,x_1),\ldots,(t_k,x_k)) \tag{15}$$

и

$$f_{k+1}((t_1,x_1),\ldots,(t_k,x_k),(t_k,y_k)) = f_k((t_1,x_1),\ldots,(t_k,x_k+y_k)),\ y_k\in\mathbb{R}.$$

Далее, для каждого $k\in\mathbb{N}=\{1,2,\ldots\}$ через $m^k$ будем обозначать меру Лебега на $[0,T]^k$, а через $Q^k$ – декартову степень меры $Q$.

Имеем

$$\int\limits_{\Omega_0} f d\,\mathbf{P}_n = \mathbf{E}\,f(\zeta_n)$$

$$= e^{-nT}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k}{k!}\int\limits_{[0,T]^k} dm^k(\overline{t})\int\limits_{\mathbb{R}^k} f_k((t_1,\frac{x_1}{\sqrt{n}}),\ldots,(t_k,\frac{x_k}{\sqrt{n}}))dQ^k(\overline{x}), \quad (16)$$

где для каждого $k\in\mathbb{N}$ $\overline{t}=(t_1,\ldots,t_k)$, $\overline{x}=(t_1,\ldots,x_k)$. Слагаемое, соответствующее $k=0$, равно $f_0=\mathrm{const}$.

Приведем теперь выражение (16) к более удобному для нас виду. Для этого нам понадобится ввести ряд обозначений. Обозначим через $\Delta,\ d$ операторы $\varphi\mapsto\Delta\varphi,\ \varphi\mapsto d\varphi$, действующие как

$$\Delta\varphi(x)=\varphi(x)-\varphi(0),\quad d\varphi(x)=\varphi(0).$$

Заметим, что $\Delta+d$ – тождественный оператор.

Через $\Delta_j,\ d_j$ будем обозначать действие операторов $\Delta,\ d$ по переменной $x_j$, а через $\Delta^{\otimes k}$ – оператор $\Delta_1\Delta_2\ldots\Delta_k$.

Положим также $G=[0,T]\times\mathbb{R}$, $\Pi=m\times Q$, $f_{k,n}((t_1,x_1),\ldots,(t_k,x_k)) = f_k((t_1,\frac{x_1}{\sqrt{n}}),\ldots,(t_k,\frac{x_k}{\sqrt{n}}))$.

Используя введенные обозначения, получаем

$$\int\limits_{\Omega_0} f d\mathrm{P}_n = e^{-nT}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k}{k!}\int\limits_{G^k} f_{k,n}d\Pi^k$$

$$= e^{-nT}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k}{k!}\int\limits_{G^k}\prod_{j=1}^{k}(\Delta_j+d_j)f_{k,n}d\Pi^k$$

$$= e^{-nT}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k}{k!}\int\limits_{G^k}\sum_{I\subset\{1,\ldots,k\}}\Delta_I d_{CI}f_{k,n}d\Pi^k$$

$$= e^{-nT}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k}{k!}\int\limits_{G^k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\Delta^{\otimes j}d^{\otimes(k-j)}f_{k,n}d\Pi^k.$$

В последнем выражении оператор $\Delta^{\otimes j}$ действует по первым $j$ переменным, а оператор $d^{\otimes(k-j)}$ – по оставшимся $k-j$ переменным.

Далее, пользуясь (15), получаем

$$\int\limits_{\Omega_0} f d\,\mathbf{P}_n = e^{-nT}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{n^j}{j!}\int\limits_{G^j}\Delta^{\otimes j} f_{j,n}\sum_{k=j}^{\infty}\frac{T^{k-j}n^{k-j}}{(k-j)!}d\Pi^j$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{n^j}{j!}\int\limits_{G^j}\Delta^{\otimes j} f_{j,n}d\Pi^j$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k}{k!}\int\limits_{[0,T]^k} dm^k(\bar{t})\int\limits_{\mathbb{R}^k}\Delta^{\otimes k} f_k((t_1,\frac{x_1}{\sqrt{n}}),\dots,(t_k,\frac{x_k}{\sqrt{n}}))dQ^k(\overline{x}). \qquad (17)$$

Из условия $\mathbf{E}\,\xi_1 = \int xQ(dx) = 0$ и (17) следует, что

$$\int\limits_{\Omega_0} f d\,\mathbf{P}_n$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k}{k!}\int\limits_{[0,T]^k} dm^k(\bar{t})\int\limits_{\mathbb{R}^k}(\Delta(1))^{\otimes k} f_k((t_1,\frac{x_1}{\sqrt{n}}),\dots,(t_k,\frac{x_k}{\sqrt{n}}))dQ^k(\overline{x}), \qquad (18)$$

где оператор $\Delta(1)$ действует на функцию $\varphi$ как

$$\Delta(1)\,\varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0).$$

Далее мы будем рассматривать не только интервал $[0,T]$, но и различные его подинтервалы. Введем соответствующие определения. Пусть $[t,s)\subset[0,T]$. Через $\Omega_0^{t,s}$ обозначим множество дискретных зарядов с конечным спектром на интервале $[t,s)$. Ясно, что для любого $u\in(t,s)$ множество $\Omega_0^{t,s}$ естественно изоморфно декартову произведению $\Omega_0^{t,u}\times\Omega_0^{u,s}$. Обозначим через $\mathbf{P}_n^{t,s}$ сужение меры $\mathbf{P}_n$ на $\Omega_0^{t,s}$. Ясно, что

$$\mathbf{P}_n^{t,s} = \mathbf{P}_n^{t,u}\times\mathbf{P}_n^{u,s},$$

где знаком $\times$ обозначено прямое произведение соответствующих мер.

Итак, последовательность вероятностных мер у нас построена. Определим теперь обобщенную функцию $\mathbf{L}$. Для каждой функции $f$ : $\Omega_0\to\mathbb{C}$, принадлежащей некоторому множеству основных функций $\mathcal{G}$

(множество основных функций мы опишем чуть позднее), положим

$$\mathbf{L}\, f = (\mathbf{L}, f) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{[0,T]^k} \left( \left( \frac{\delta^{(2)}}{2} \right)^{\otimes k}, f_k \right) dm^k. \tag{19}$$

Здесь, как и ранее, через $m^k$ обозначена мера Лебега на $[0,T]^k$, причем интегрирование ведется по временным переменным $t_j \in [0,T]$, а обобщенная функция $(\frac{\delta^{(2)}}{2})^{\otimes k}$ действует по пространственным переменным $x_j \in \mathbb{R}$. Отметим еще, что для действия обобщенной функции $\mathbf{L}$ на основную функцию $f$ мы также используем обозначение $\mathbf{L}\, f$ наряду с традиционным $(\mathbf{L}, f)$.

Опишем теперь пространство основных функций $\mathcal{G}$. Каждая основная функция $f \in \mathcal{G}$ есть измеримая функция из $\Omega_0$ в $\mathbb{C}$, через $f_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, как и ранее, будем обозначать функции, определяемые (14).

Первым шагом для каждых $k \geqslant 1, A > 0$ на множестве функций $h : \big([0,T] \times \mathbb{R}\big)^k \to \mathbb{C}$ определим норму $\| \cdot \|_{k,A}$, полагая

$$\|h\|_{k,A} = \sum_{I \subset \{1,\dots,k\}} \int\limits_{[0,T]^k} dm^k \max_{\substack{p\\ 0 \leqslant p_j \leqslant 3}} \sup_{\substack{|x_i| \leqslant 1,\\ j \in I}} \sup_{\substack{|x_j|>1,\\ j \notin I}} \Big( |\mathcal{D}_{I,p} h| \exp\big( -A \sum_{j \notin I} |x_j| \big) \Big), \tag{20}$$

где для $I \subset \{1,\dots,k\}$, $p = (p_1, \dots, p_k) \in \mathbb{N}^k$, через $\mathcal{D}_{I,p}$ обозначен дифференциальный оператор вида

$$\mathcal{D}_{I,p} = \prod_{j \in I} \frac{\partial^{p_j}}{\partial x^{p_j}}, \tag{21}$$

причем мы всюду в (21) предполагаем, что операторы $\mathcal{D}_{I,p}$ действуют только по переменным $x_i$. Смысл введенной нормы простой – по переменным $x_j \in [-1,1]$ должны быть ограничены сама функция и три ее первых производных, а на бесконечности функция должна возрастать не быстрее, чем $e^{A|x_j|}$.

Определим теперь пространство $\mathcal{G}$ основных функций как множество измеримых функций $f : \Omega_0 \to \mathbb{C}$, таких, что для каждого $k > 0$ функция $f_k = f_k((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k))$ бесконечно дифференцируема по переменным $x_j$, и для всех $M > 0$ и некоторого $A > 0$ сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k \|f_k\|_{k,A}}{k!} < \infty. \tag{22}$$

Отметим, что условие (22) гарантирует нам сходимость ряда (19).

Покажем теперь, что в смысле обобщенных функций

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_n = \mathbf{L}\,. \tag{23}$$

Напомним, что сходимость обобщенных функций означает сходимость на каждой основной функции. Таким образом, для доказательства (23) мы должны проверить, что $\lim_{n\to\infty}(\mathbf{P}_n, f) = (\mathbf{L}, f)$ для любого $f \in \mathcal{G}$ или, в используемых нами обозначениях,

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega_0} f d\,\mathbf{P}_n = \mathbf{L}\, f. \tag{24}$$

Итак, пусть $f \in \mathcal{G}$. В силу (18) имеем

$$\int\limits_{\Omega_0} f d\,\mathbf{P}_n$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} \int\limits_{[0,T]^k} dm^k \int\limits_{\mathbb{R}^k} (\Delta(1))^{\otimes k} f_k((t_1, \frac{x_1}{\sqrt{n}}), \ldots, (t_k, \frac{x_k}{\sqrt{n}}))dQ^k. \tag{25}$$

Рассмотрим слагаемое в (25), соответствующее $k = 1$. Условимся далее все дифференцирования понимать как дифференцирования по переменным $x$. Используя формулу Тейлора, получим $(0 < \theta < 1)$

$$n \int\limits_0^T dt \int\limits_{\mathbb{R}} \Delta(1) f_1(t, \frac{x}{\sqrt{n}}) Q(dx)$$

$$= n \int\limits_0^T dt \int\limits_{\mathbb{R}} \Big[ f_1(t, \frac{x}{\sqrt{n}}) - f_1(t,0) - \frac{x}{\sqrt{n}} f_1^{(1)}(t,0) \Big] Q(dx)$$

$$= n \int\limits_0^T dt \Bigg( \int\limits_{|\frac{x}{\sqrt{n}}| \leqslant 1} \Big[ f_1^{(2)}(t,0) \frac{x^2}{2n} + f_1^{(3)}(t, \frac{\theta x}{\sqrt{n}}) \frac{x^3}{6n^{3/2}} \Big] Q(dx)$$

$$+ \int\limits_{|\frac{x}{\sqrt{n}}| > 1} \Big[ f_1(t, \frac{x}{\sqrt{n}}) - f_1(t,0) - \frac{x}{\sqrt{n}} f_1^{(1)}(t,0) \Big] Q(dx) \Bigg)$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^T f_1^{(2)}(t,0) dt + O(\frac{1}{\sqrt{n}}) = \int\limits_0^T dt \big( \frac{\delta^{(2)}}{2}, f_1(t,x) \big) + O(\frac{1}{\sqrt{n}}).$$

Аналогичным же образом показывается, что при всех $k>1$

$$\lim_{n\to\infty}\Big[n^k\int\limits_{[0,T]^k} dm^k\int\limits_{\mathbb{R}^k}(\Delta(1))^{\otimes k}f_k((t_1,\frac{x_1}{\sqrt{n}}),\ldots,(t_k,\frac{x_k}{\sqrt{n}}))dQ^k\Big]$$
$$=\int\limits_{[0,T]^k}\Big((\frac{\delta^{(2)}}{2})^{\otimes k},f_k\Big)dm^k.$$

Возможность предельного перехода под знаком суммы в (25) гарантируется условием (22). Таким образом, (24) доказано.

Далее, как мы уже отмечали, для любых $u\in(t,s)$ множество $\Omega_0^{t,s}$ естественно изоморфно декартову произведению $\Omega_0^{t,u}\times\Omega_0^{u,s}$. Для $t<s$ через $\mathbf{L}^{t,s}$ будем обозначать сужение обобщенной функции $\mathbf{L}$ на $\Omega_0^{t,s}$, понимая под этим обобщенную функцию, определенную на подмножестве $\mathcal{G}^{t,s}\subset\mathcal{G}$ основных функций, каждая из которых зависит только от той части заряда, которая попала в интервал $[t,s)$, то есть любая функция $f\in\mathcal{G}^{t,s}$ удовлетворяет условию $f(\omega)=f(\omega|_{[t,s)})$ для всех $\omega\in\Omega_0$. На основную функцию $f\in\mathcal{G}^{t,s}$ обобщенная функция $\mathbf{L}^{t,s}$ действует как

$$\mathrm{L}^{t,s}f=\int\limits_{[t,s]^k}\Big((\frac{\delta^{(2)}}{2})^{\otimes k},f_k\Big)dm^k. \tag{26}$$

Нетрудно показать, что для любых $t<u<s$ справедливо соотношение $\mathbf{L}^{t,s}=\mathbf{L}^{t,u}\otimes\mathbf{L}^{u,s}$.

Итак, мы построили предельный объект $(\Omega_0,\mathcal{G},\mathbf{L})$, который не является вероятностным пространством, и последовательность обычных вероятностных мер $\mathbf{P}_n$ на $(\Omega_0,\mathcal{B}(\Omega_0))$. При этом $\mathbf{P}_n$ можно рассматривать не только как меру, но и как обобщенную функцию, заданную на множестве $\mathcal{G}$ основных функций, и как было показано, в смысле обобщенных функций последовательность $\mathbf{P}_n$ сходится к $\mathbf{L}$.

Далее мы будем изучать распределения различных измеримых функций, заданных на $(\Omega_0,\mathcal{B}(\Omega_0))$. При этом вопрос о том, что мы будем понимать под распределением, требует отдельного обсуждения.

Рассмотрим сначала предельный объект $(\Omega_0,\mathcal{G},\mathbf{L})$. Пусть $g\in\mathcal{G}$. Тогда, как и ранее, распределением $g$ мы будем называть образ $g\,\mathbf{L}$ обобщенной функции $\mathbf{L}$ под действием $g$, то есть обобщенную функцию, которая на основную функцию $\varphi$ действует как

$$(g\,\mathbf{L},\varphi)=(\mathbf{L},\varphi\circ g)=\mathbf{L}\,\varphi\circ g. \tag{27}$$

Важно отметить, что в случае, когда $g$ – вещественнозначная функция, формула (27) определяет стандартный хорошо известный объект, а $\varphi\circ g$ есть просто суперпозиция двух функций. В случае же, когда $g$ – комплекснозначная функция, формула (27) требует дополнительного пояснения. Именно, в этом случае $g\,\mathbf{L}$ есть обобщенная функция, которая на основную функцию $\varphi$ *вещественного* аргумента действует в соответствии с (27), при этом суперпозиция $\varphi\circ g$ понимается как подстановка комплексной $g$ в аналитическое продолжение функции $\varphi$, которое задается формулой (10).

Из самого определения ясно, что обобщенная функция $g\mathbf{L}$ исходно задана на очень узком классе основных функций, соответственно, один из вопросов, который мы будем рассматривать, это вопрос продолжения $g\,\mathbf{L}$ на более широкий класс функций $\varphi$.

Что же касается допредельной последовательности $\mathbf{P}_n$, то при каждом фиксированном $n$ на образ $\mathbf{P}_n$, под действием $g$ мы можем смотреть и как на образ $\mathbf{P}_n\,g^{-1}$ вероятностной меры $\mathbf{P}_n$ под действием $g$ (или, другими словами, как на распределение случайной величины $g$) и как на образ $g\,\mathbf{P}_n$ обобщенной функции $\mathbf{P}_n$ под действием $g$. В последнем случае $g\,\mathbf{P}_n$ есть обобщенная функция, действующая на основную функцию $\varphi$ как $(g\,\mathbf{P}_n,\varphi)=\int\varphi\circ g d\,\mathbf{P}_n$. Как и выше, для комплекснозначных $g$ суперпозицию $\varphi\circ g$ мы понимаем как подстановку комплексной $g$ в аналитическое продолжение функции $\varphi$.

В случае вещественнозначных $g$ эти два понятия совпадают, именно, обобщенная функция $g\,\mathbf{P}_n$ может быть задана как интеграл (8) по мере $\mathbf{P}_n\,g^{-1}$. В случае же комплекснозначной функции $g$ эти два объекта существенно различной природы. Именно, мера $\mathbf{P}_n\,g^{-1}$ это вероятностная мера на комплексной плоскости, а класс основных функций обобщенной функции $g\,\mathbf{P}_n$ состоит из функций вещественного аргумента.

Далее нас будут в основном интересовать распределения именно комплекснозначных функций $g$, причем распределение $g$ мы будем понимать как $g\,\mathbf{P}_n$ (или $g\,\mathbf{L}$, если речь идет о предельном объекте). Мы будем рассматривать различные конкретные функции $g$, и основной вопрос, который будет нас интересовать, это выделение классов функций $\varphi$, на которых имеет место сходимость $(g\,\mathbf{P}_n,\varphi)\underset{n\to\infty}{\to}(g\,\mathbf{L},\varphi)$. Отметим, что в данном случае речь может идти и о сходимости самих обобщенных функций и о сходимости их продолжений.

## §4. Процессы с независимыми приращениями и порожденные ими полугруппы операторов

Обозначим через $D_0[0,T]$ множество непрерывных справа кусочно-постоянных вещественнозначных функций с конечным числом скачков. Это пространство естественным образом изоморфно прямому произведению $\mathbb{R}\times\Omega_0$. Именно, каждому $x\in\mathbb{R}$ и $\omega\in\Omega_0$ сопоставим функцию $f\in D_0[0,T]$, полагая для $t\in T \quad f(t)=x+\omega([0,t])$, где $\omega([0,t])$ – заряд интервала $[0,t]$. На $D_0[0,T]$ мы рассмотрим топологию (и соответствующую борелевскую $\sigma$-алгебру) как образ топологии на $\mathbb{R}\times\Omega_0$ под действием данного изоморфизма. Фактически мы будем рассматривать комплекснозначные функции, для этого пространства введем обозначение $D_0([0,T],\mathbb{C})$, оно изоморфно декартову произведения двух экземпляров $D_0[0,T]$.

Обобщенным случайным процессом (слово обобщенный будем далее опускать) будем называть любое измеримое отображение из $\Omega_0$ в множество $D_0([0,T],\mathbb{C})$. Заметим, что процесс будет обобщенным только если на $\Omega_0$ мы рассматриваем обобщенную функцию $\mathbf{L}$. В допредельном случае мы имеем дело с обычным случайным процессом, заданном на вероятностном пространстве $(\Omega_0,\mathcal{B}(\Omega_0),\mathbf{P}_n)$.

Далее, пусть $\sigma\in\mathbb{C},\ |\sigma|=1$ – фиксированное комплексное число. Так как во все ответы будет входить только величина $\sigma^2$, то мы заранее предположим, что

$$\mathrm{Re}\ \sigma\geqslant 0. \tag{28}$$

Итак, для каждого $x\in\mathbb{R}$ определим случайный процесс $\xi_x^\sigma(t),\ t\in[0,T]$, полагая

$$\xi_x^\sigma(t)=\xi_x^\sigma(t,\omega)=x+\sigma\omega([0,t]). \tag{29}$$

Нетрудно понять, что для каждого фиксированного $n$ на вероятностном пространстве $(\Omega_0,\mathcal{B}(\Omega_0),\mathbf{P}_n)$ процесс $\xi_x^\sigma(t),\ t\in[0,T]$, является сложным пуассоновским процессом, и, соответственно, имеет независимые приращения (см. [6]).

Посмотрим теперь на одномерные распределения процесса $\xi_x^\sigma(t)$. В соответствии с вышесказанным, под одномерным распределением мы понимаем либо $\xi_x^\sigma(t)\,\mathbf{L}$, то есть образ обобщенной функции $\mathbf{L}$ под действием $\xi_x^\sigma(t)$, либо, если речь идет о допредельном случае, $\xi_x^\sigma(t)\,\mathbf{P}_n$ – соответствующий образ обобщенной функции $\mathbf{P}_n$.

В качестве исходного пространства основных функций для обобщенных функций $\xi_x^\sigma(t)\,\mathbf{L}$ и $\xi_x^\sigma(t)\,\mathbf{P}_n$ выберем множество $\mathcal{H}_{\mathrm{fin}}$ функций

$\varphi$, которые являются преобразованием Фурье конечного заряда с финитным носителем. Именно, каждая функция $\varphi \in \mathcal{H}_{\text{fin}}$ имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} e^{-ipx} \mu(dp),$$

где $\mu$ – заряд на $[-A, A]$, удовлетворяющий условию $|\mu|([-A, A]) < \infty$.

Ясно, что любая $\varphi \in \mathcal{H}_{\text{fin}}$ является целой функцией экспоненциального типа и, кроме того, для любых $x, t, \sigma$ функция $\omega \mapsto \varphi(\xi_x^\sigma(t, \omega))$ принадлежит $\mathcal{G}$.

Определим теперь две полугруппы операторов $P_n^t$ и $P^t$ ( $t \geqslant 0$) полагая для $\varphi \in \mathcal{H}_{\text{fin}}$

$$\begin{aligned} P^t\varphi(x) &= \mathbf{L}\,\varphi(\xi_x^\sigma(t)) = \mathbf{L}\,\varphi(x + \sigma\omega[0,t]) = \mathbf{L}^{0,t}\,\varphi(x + \sigma\omega[0,t]) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \Big( \big(\frac{\delta^{(2)}}{2}\big)^{\otimes k}, \varphi(x + \sigma x_1 + \dots + \sigma x_k) \Big) \end{aligned} \tag{30}$$

и

$$P_n^t\varphi(x) = \mathbf{E}_n\,\varphi(\xi_x^\sigma(t)) = \mathbf{E}_n\,\varphi(x + \sigma\omega[0,t]) = \int_{\Omega_0} \varphi(x + \sigma\omega[0,t])d\,\mathbf{P}_n\,.$$

Напомним, что через $\mathrm{E}_n$ мы обозначаем математическое ожидание по мере $\mathbf{P}_n$. В силу (17) имеем

$$P_n^t\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k t^k}{k!} \int_{\mathbb{R}^k} \Delta^{\otimes k}\varphi(x + \frac{\sigma x_1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{\sigma x_k}{\sqrt{n}}))dQ^k. \tag{31}$$

Нетрудно показать, что семейства операторов $P^t, P_n^t$ образуют полугруппы, именно, $P^{t+s} = P^t P^s$, $P_n^{t+s} = P_n^t P_n^s$.

Найдем Фурье-образы введенных операторов. Для этого посмотрим, как эти операторы действуют на функцию $\varphi(x) = e^{-ipx}$ при фиксированном $p \in \mathbb{R}$. В силу (30) имеем

$$\begin{aligned} P^t\varphi(x) &= \mathbf{L}\,e^{-ip\xi_x^\sigma(t)} = e^{-ipx}\,\mathbf{L}\,e^{-ip\sigma\omega[0,t]} \\ &= e^{-ipx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \Big( \big(\frac{\delta^{(2)}}{2}\big)^{\otimes k}, e^{-ip\sigma(x_1 + \dots + x_k)} \Big) = e^{-ipx} e^{-\frac{\sigma^2 p^2 t}{2}}. \end{aligned} \tag{32}$$

Из (32) следует, что $\widehat{P}^t$ (Фурье-образ оператора $P^t$) есть оператор умножения на функцию $\widehat{\rho}_t(p)$, где

$$\widehat{\rho}_t(p) = \exp\big(-\frac{\sigma^2 p^2 t}{2}\big). \tag{33}$$

Заметим, что из (33) немедленно следует справедливость полугруппового свойства для семейства операторов $P^t$.

Найдем теперь Фурье-образ оператора $P_n^t$. В силу (31) для $\varphi(x) = e^{-ipx}$ имеем

$$\begin{aligned}
P_n^t\varphi(x) &= e^{-ipx}\,\mathbf{E}_n\, e^{-ip\sigma\omega([0,t])}\\
&= e^{-ipx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k t^k}{k!}\int\limits_{\mathbb{R}^k}\Delta^{\otimes k} e^{-ip\sigma(\frac{x_1}{\sqrt{n}}+\dots+\frac{x_k}{\sqrt{n}}))}dQ^k\\
&= e^{-ipx}\exp\left(nt\int\limits_{\mathbb{R}}\big(e^{-ip\sigma\frac{y}{\sqrt{n}}}-1\big)Q(dy)\right)\\
&= e^{-ipx}\exp\left(nt\Big(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ip\sigma\frac{y}{\sqrt{n}}}Q(dy)-1\Big)\right).
\end{aligned} \tag{34}$$

Из (34) следует, что $\widehat{P}_n^t$ есть оператор умножения на функцию

$$\widehat{\rho}_{t,n}(p) = \exp\left(nt\Big(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{ip\sigma y}{\sqrt{n}}}Q(dy)-1\Big)\right). \tag{35}$$

**Лемма 1.** *Для любого $M > 0$ равномерно по $t \in [0,T]$, $|p| \leqslant M$*

$$\lim_{n\to\infty}\widehat{\rho}_{t,n}(p) = \widehat{\rho}_t(p) = \exp\Big(-\frac{\sigma^2 p^2 t}{2}\Big).$$

**Доказательство.** Отметим прежде всего, что из условия (13) вытекает, что функция $\widehat{\rho}_{t,n}(p)$ определена при всех $|p| \leqslant M$, по крайней мере для всех достаточно больших $n$.

Имеем

$$\widehat{\rho}_{t,n}(p) = \exp\Big(-\frac{\sigma^2p^2t}{2}\Big)\exp\Big(nt\int\limits_{\mathbb{R}}\big(e^{-\frac{ip\sigma y}{\sqrt{n}}}-1+\frac{ip\sigma y}{\sqrt{n}}+\frac{p^2\sigma^2y^2}{2n}\big)Q(dy)\Big).$$

Покажем теперь, что равномерно по $t \in [0,T]$, $|p| \leqslant M$ аргумент второй экспоненты стремится к нулю.

Имеем

$$
\begin{aligned}
&|nt\int\limits_{\mathbb{R}}\Big(e^{-\frac{ip\sigma y}{\sqrt{n}}}-1+\frac{ip\sigma y}{\sqrt{n}}+\frac{p^2\sigma^2y^2}{2n}\Big)Q(dy)| \\
&\leqslant nt\int\limits_{|\frac{y}{\sqrt{n}}|\leqslant 1}\frac{|p|^3|y|^3}{6n^{3/2}}e^{|p|}Q(dy) \\
&+nt\int\limits_{|\frac{y}{\sqrt{n}}|\geqslant 1}\Big|e^{-\frac{ip\sigma y}{\sqrt{n}}}-1+\frac{ip\sigma y}{\sqrt{n}}+\frac{p^2\sigma^2y^2}{2n}\Big|Q(dy).
\end{aligned}
$$

Ясно, что первое слагаемое стремится к нулю, а стремление к нулю второго слагаемого следует из условия (13). Действительно, для $0<\lambda_0<\lambda$ имеем

$$
nt\int\limits_{|\frac{y}{\sqrt{n}}|\geqslant 1}|e^{-\frac{ip\sigma y}{\sqrt{n}}}|Q(dy)\leqslant nte^{-\lambda_0\sqrt{n}}\int e^{\lambda_0|y|}|e^{-\frac{ip\sigma y}{\sqrt{n}}}|Q(dy)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.
$$

$\square$

**Лемма 2.** *Пусть* $\operatorname{Re}\sigma^2\geqslant 0$. *Тогда для любой последовательности* $M_n\to\infty$, $M_n=o(n^{1/6})$ *равномерно по* $t\in[0,T]$,

$$
\lim_{n\to\infty}\sup_{p\in[-M_n,M_n]}|\widehat{\rho}_{t,n}(p)-\widehat{\rho}_t(p)|=0.
$$

**Доказательство.** Заметим, что из условия $\operatorname{Re}\sigma^2\geqslant 0$ следует, что

$$
\sup_{p\in\mathbb{R}}|\widehat{\rho}_t(p)|=\sup_{p\in\mathbb{R}}\Big|\exp\Big(-\frac{\sigma^2p^2t}{2}\Big)\Big|=1. \tag{36}
$$

Оставшаяся часть доказательства практически совпадает с доказательством леммы 1. $\square$

Далее, для $\varphi\in\mathcal{H}_{\mathrm{fin}}$ определим функцию $u=u(t,x)$, $t\geqslant 0$, $x\in\mathbb{R}$, полагая

$$
u(t,x)=P^t\varphi(x)=\mathbf{L}\,\varphi(\xi_x^\sigma(t)).
$$

В силу (30), имеем

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\Big(\big(\frac{\delta^{(2)}}{2}\big)^{\otimes k},\varphi(x+\sigma x_1+\cdots+\sigma x_k)\Big) \\
&=\Big(\big(\frac{\delta^{(2)}}{2}\big)_{x_1},u(t,x+\sigma x_1)\Big)=\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)
\end{aligned}
$$

Таким образом, мы показали, что для каждой $\varphi \in \mathcal{H}_{\mathrm{fin}}$ функция $u(t,x)$ решает задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,x) = \varphi(x), \tag{37}$$

и, следовательно, семейство обобщенных функций $\mathcal{P}_{t,x} = \xi_x^\sigma(t)\,\mathbf{L}$ (другими словами, семейство одномерных распределений нашего процесса) является фундаментальным решением уравнения (37). Из того, что оператор $\widehat{P^t}$ есть оператор умножения на функцию $\widehat{\rho}_t(p) = \exp\big(-\frac{\sigma^2 p^2 t}{2}\big)$, следует, что для любых $t \in [0,T], x \in \mathbb{R}$ обобщенная функция функций $\mathcal{P}_{t,x}$ есть регулярный функционал с плотностью

$$\rho_t(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 t}}.$$

Как уже было отмечено, в уравнении (37) случай $\sigma^2 = 1$ соответствует уравнению теплопроводности, случай $\sigma^2 = \pm i$ соответствует уравнению Шредингера, а $\sigma^2 = -1$ – обратному уравнению теплопроводности.

Посмотрим теперь, какому уравнению соответствует полугруппа операторов $P_n^t$. Как и ранее, положим для $\varphi \in \mathcal{H}_{\mathrm{fin}}$

$$\begin{aligned} u_n(t,x) &= P_n^t\varphi(x) = \mathbf{E}_n\,\varphi(x + \sigma\omega([0,t])) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k t^k}{k!}\int\limits_{\mathbb{R}^k}\Delta^{\otimes k}\varphi\Big(x + \frac{\sigma x_1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{\sigma x_k}{\sqrt{n}}\Big)dQ^k. \end{aligned}$$

Непосредственным дифференцированием нетрудно убедиться, что функция $u_n(t,x)$ является решением задачи Коши

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = A_n^\sigma u_n, \quad u_n(0,x) = \varphi(x), \tag{38}$$

где оператор $A_n^\sigma$ действует на функцию $\psi \in \mathcal{H}_{\mathrm{fin}}$ как

$$\begin{aligned} A_n^\sigma\psi(x) &= n\int\limits_{\mathbb{R}}\Big(\psi(x + \frac{\sigma y}{\sqrt{n}}) - \psi(x)\Big)Q(dy) \\ &= n\int\limits_{\mathbb{R}}\Big(\psi(x + \frac{\sigma y}{\sqrt{n}}) - \psi(x) - y\psi'(x)\Big)Q(dy). \end{aligned}$$

Заметим, что для $\varphi \in \mathcal{H}_{\mathrm{fin}}$ функция $\omega \mapsto \varphi(\xi_x^\sigma(t,\omega))$ принадлежит $\mathcal{G}$ для любых фиксированных $t, x$ и, значит, из (23) следует, что

$u_n(t,x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u(t,x)$. Следующий вопрос, который мы рассмотрим – это вопрос о возможности продолжения операторов $P_n^t, P^t$ на более широкий класс функций $\varphi$, а также вопрос о сходимости $u_n \to u$ в различных метриках.

Отметим прежде всего, что ответ на поставленные вопросы существенно различен в случае $\mathrm{Re}\,\sigma^2 \geqslant 0$ и в случае $\mathrm{Re}\,\sigma^2 < 0$. Случай $\mathrm{Re}\,\sigma^2 < 0$ менее интересен. В этом случае $\widehat{P^t}$ есть оператор умножения на очень быстро растущую функцию и, соответственно, сходимость можно ожидать только на функциях из $\mathcal{H}_{\mathrm{fin}}$.

**Теорема 1.** *Пусть* $\mathrm{Re}\,\sigma^2 < 0$ *и* $\varphi \in \mathcal{H}_{\mathrm{fin}}$. *Тогда, равномерно по* $t \in [0,T]$,

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n^t\varphi - P^t\varphi\|_\infty = 0.$$

**Доказательство.** По определению каждая функция $\varphi \in \mathcal{H}_{\mathrm{fin}}$ представима в виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-A}^{A} e^{-ipx}\mu(dp)$$

и $|\mu|[-A,A] < \infty$. Тогда

$$P_n^t\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-A}^{A} e^{-ipx}\widehat{\rho}_{t,n}(p)\mu(dp)$$

и

$$P^t\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-A}^{A} e^{-ipx}\widehat{\rho}_t(p)\mu(dp).$$

Для завершения доказательства достаточно воспользоваться леммой 1. □

Рассмотрим теперь случай $\mathrm{Re}\,\sigma^2 \geqslant 0$. В этом случае оператор $P^t$ есть оператор свертки с функцией

$$\rho_t(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}\right)$$

и, соответственно, может быть продолжен на существенно более широкий класс функций $\varphi$, в частности на $L_2(\mathbb{R})$ и $\mathcal{R}_0$ (нас будут интересовать именно эти продолжения).

Сложнее дело обстоит с операторами $P_n^t$. В общем случае эти операторы определены только на $\mathcal{H}_{\text{fin}}$. Введем необходимые определения. Пусть $M_n$ – произвольная последовательность, удовлетворяющая условиям леммы 2. Для каждой функции $\varphi$ через $\varphi_n$ обозначим обратное преобразование Фурье функции $\widehat{\varphi}(p)\mathbf{1}_{[-M_n,M_n]}(p)$.

**Теорема 2.** *Пусть* $\operatorname{Re}\sigma^2 \geqslant 0$ *и* $\varphi \in \mathcal{R}_0$. *Тогда, равномерно по* $t \in [0,T]$,

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n^t\varphi_n - P^t\varphi\|_{\mathcal{R}_0} = 0.$$

**Доказательство.** Имеем

$$\begin{aligned}&\|P_n^t\varphi_n - P^t\varphi\|_{\mathcal{R}_0} \leqslant \|P_n^t\varphi_n - P^t\varphi_n\|_{\mathcal{R}_0} + \|P^t\varphi_n - P^t\varphi\|_{\mathcal{R}_0}\\ &= \|\widehat{P}_n^t\widehat{\varphi_n} - \widehat{P}^t\widehat{\varphi_n}\|_1 + \|\widehat{P}^t\widehat{\varphi_n} - \widehat{P}^t\widehat{\varphi}\|_1 \leqslant \|(\widehat{\rho}_{t,n} - \widehat{\rho}_t)\widehat{\varphi_n}\|_1 + \|\widehat{\varphi_n} - \widehat{\varphi}\|_1.\end{aligned}$$

По лемме 2 последнее выражение стремится к нулю. □

**Теорема 3.** *Пусть* $\operatorname{Re}\sigma^2 \geqslant 0$ *и* $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$. *Тогда, равномерно по* $t \in [0,T]$,

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n^t\varphi_n - P^t\varphi\|_2 = 0.$$

**Доказательство.** Аналогично доказательству теоремы 2. □

Рассмотрим теперь частный случай описанной конструкции, когда $Q(dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$. В этом случае, вычисляя интеграл в формуле (35), получаем, что $\widehat{P}_n^t$ есть оператор умножения на функцию

$$\widehat{\rho}_{t,n}(p) = \exp\bigl(nt(e^{-\frac{p^2\sigma^2}{2n}} - 1)\bigr). \tag{39}$$

Заметим, что в этом случае для всех $p \in \mathbb{R}$ выполнено $|\widehat{\rho}_{t,n}(p)| \leqslant 1$ и, значит, оператор $P_n^t$ может быть продолжен на $\mathcal{R}_0$ и на $L_2(\mathbb{R})$. В следующих теоремах рассматриваются вопросы сходимости соответствующих продолжений.

**Теорема 4.** *Пусть* $\operatorname{Re}\sigma^2 \geqslant 0$, $\;Q(dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$ *и* $\varphi \in \mathcal{R}_0$. *Тогда, равномерно по* $t \in [0,T]$,

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n^t\varphi - P^t\varphi\|_{\mathcal{R}_0} = 0.$$

**Доказательство.** Имеем

$$\begin{aligned}\|P_n^t\varphi - P^t\varphi\|_{\mathcal{R}_0} &= \|\widehat{P}_n^t\widehat{\varphi} - \widehat{P}^t\widehat{\varphi}\|_1 \leqslant \|(\widehat{\rho}_{t,n} - \widehat{\rho}_t)\widehat{\varphi}\|_1 \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(p)||\widehat{\rho}_{t,n}(p) - \widehat{\rho}_t(p)|dp.\end{aligned}$$

Последний интеграл стремится к нулю по теореме Лебега. Равномерная сходимость по $t \in [0,T]$ легко следует из равномерной (по $t \in [0,T]$ и по $p$ на каждом компакте) сходимости $\widehat{\rho}_{t,n}(p)$. □

**Теорема 5.** *Пусть* $\mathrm{Re}\,\sigma^2 \geqslant 0$, $Q(dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$ *и* $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$. *Тогда, равномерно по* $t \in [0,T]$,

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n^t\varphi - P^t\varphi\|_2 = 0.$$

**Доказательство.** Имеем

$$\|P_n^t\varphi - P^t\varphi\|_2^2 = \|\widehat{P}_n^t\widehat{\varphi} - \widehat{P}^t\widehat{\varphi}\|_2^2 = \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}^2(p)(\widehat{\rho}_{t,n}(p) - \widehat{\rho}_t(p))^2 dp \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

□

Отметим, что во всех доказанных теоремах существенно используется условие (13) существования экспоненциального момента у распределения $Q$. Наличие экспоненциального момента дает нам возможность аналитического продолжения преобразования Фурье $\widehat{Q}$ и, как следствие, возможность определения операторов на функциях из $\mathcal{H}_{\mathrm{fin}}$. В следующей теореме мы откажемся от условия (13) и вместо $\mathcal{H}_{\mathrm{fin}}$ рассмотрим другие классы функций.

Итак, пусть $\mathrm{Im}\,\sigma \geqslant 0$, $|\sigma| = 1$. Определим класс $\mathcal{R}_0^{\sigma,+}$ комплекснозначных функций (этот класс будет зависеть от $\sigma$), заданных на положительной полуоси $x \geqslant 0$ и представимых в виде

$$\varphi(x) = \int\limits_0^\infty e^{-ipx\overline{\sigma}}h(p)dp, \tag{40}$$

где $h \in L_1[0,\infty)$.

Покажем, что функции класса $\mathcal{R}_0^{\sigma,+}$ аналитически ограниченно продолжаются в область $\operatorname{Im} \overline{\sigma} z \leqslant 0$. Действительно, положим

$$\varphi(z) = \int_0^\infty e^{-ipz\overline{\sigma}} h(p) dp. \tag{41}$$

Из условия $\operatorname{Im} \overline{\sigma} z \leqslant 0$ следует, что $\operatorname{Re}(i\overline{\sigma} z) \geqslant 0$, что гарантирует сходимость интеграла (41).

Посмотрим теперь, как действуют на функцию (40) операторы $P^t$ и $P_n^t$. Для $x \geqslant 0$ имеем

$$P^t \varphi(x) = \mathbf{L}\, \varphi(x + \sigma\omega([0,t])) = \int_0^\infty e^{-ipx\overline{\sigma}}\, \mathbf{L}\, e^{-ip\omega([0,t])} h(p) dp$$
$$= \int_0^\infty e^{-ipx\overline{\sigma}} e^{-\frac{tp^2}{2}} h(p) dp.$$

Таким образом, действие оператора $P^t$ на функцию (40) соответствует умножению функции $h(p)$ на вещественную функцию $e^{-\frac{tp^2}{2}}$.

Аналогичным образом образом можно показать, что действие оператора $P_n^t$ на функцию (40) соответствует умножению функции $h(p)$ на функцию $\exp(nt(\widehat{Q}(\frac{p}{\sqrt{n}}) - 1))$, где $\widehat{Q}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{ipy} Q(dy)$ – преобразование Фурье (характеристическая функция) распределения $Q$, то есть

$$P_n^t \varphi(x) = \mathbf{E}_n\, \varphi(x + \sigma\omega([0,t])) = \int_0^\infty e^{-ipx\overline{\sigma}} e^{nt(\widehat{Q}(\frac{p}{\sqrt{n}})-1)} h(p) dp.$$

Отметим, что и в предельном и в допредельном случае функция $h(p)$ умножается на функцию, по модулю не превосходящую единицы.

В следующей теореме мы не предполагаем выполнение условия (13), а предполагаем только наличие второго момента (равного единице) у распределения $Q$.

**Теорема 6.** *Пусть* $\operatorname{Im} \sigma \geqslant 0$ *и* $\varphi \in \mathcal{R}_0^{\sigma,+}$. *Тогда, равномерно по* $t \in [0,T]$,

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n^t \varphi - P^t \varphi\|_\infty = 0.$$

**Доказательство.** Имеем

$$\|P_n^t\varphi - P^t\varphi\|_\infty \leqslant \int\limits_0^\infty |e^{nt(\widehat{Q}(\frac{p}{\sqrt{n}})-1)} - e^{-\frac{tp^2}{2}}| \cdot |h(p)|dp.$$

Последний интеграл стремится к нулю по теореме Лебега. □

## §5. Процессы квадратической вариации и порожденные ими полугруппы операторов

Как мы уже выяснили, одномерные распределения обобщенных процессов с независимыми приращениями являются фундаментальными решениями соответствующих эволюционных уравнений. Определим теперь другой процесс, имеющий смысл квадратической вариации процесса $\xi_0^\sigma(t)$ (мы рассматриваем процесс, выходящий из нуля, так как квадратическая вариация не зависит от сдвига). Отметим, что в этом параграфе мы не будем предполагать наличие у распределения $Q$ экспоненциального момента (условие (13)). Мы предположим только наличие второго момента. Как и ранее, предположим, что $\int yQ(dy) = 0$ и $\int y^2Q(dy) = 1$.

Для каждого $\omega \in \Omega_0$, $\omega = \sum_{j=0}^k x_j\delta_{t_j}$, определим другой элемент $\Omega_0$, который мы обозначим через $\langle\omega,\omega\rangle$, где

$$\langle\omega,\omega\rangle = \sum_{j=0}^k x_j^2\delta_{t_j}.$$

Определим теперь процесс $\gamma_x^\sigma(t)$, полагая

$$\gamma_x^\sigma(t) = x + \sigma^2\langle\omega,\omega\rangle([0,t]),$$

и также определим полугруппы $W^t$ и $W_n^t$, $n \in \mathbb{N}$, полагая для $\varphi \in \mathcal{H}_{\text{fin}}$

$$W^t\varphi(x) = \mathbf{L}\,\varphi(\gamma_x^\sigma(t))$$

и

$$W_n^t\varphi(x) = \mathbf{E}_n\,\varphi(\gamma_x^\sigma(t)) = \int \varphi(\gamma_x^\sigma(t))d\,\mathbf{P}_n\,.$$

Покажем, что полугруппа $W^t$ есть просто полугруппа сдвигов. Имеем

$$\begin{aligned} W^t\varphi(x) &= \mathbf{L}\,\varphi(\gamma_x^\sigma(t)) = \mathbf{L}^{0,t}\,\varphi(x+\sigma^2\langle\omega,\omega\rangle([0,t])) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\Big(\big(\frac{\delta^{(2)}}{2}\big)^{\otimes k},\varphi(x+\sigma^2x_1^2+\cdots+\sigma^2x_k^2)\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\varphi^{(k)}(x)\sigma^{2k} = \varphi(x+\sigma^2 t). \end{aligned}$$

Отметим, что, если Im $\sigma^2 \geqslant 0$, то оператор $W^t$ может быть продолжен на множество функций, аналитически продолжимых в верхнюю полуплоскость. Если же Im $\sigma^2 \leqslant 0$, то $W^t$ продолжается на множество функций, аналитически продолжимых в нижнюю полуплоскость. Ясно, что $\widehat{W^t}$ (Фурье-образ оператора $W^t$) есть оператор умножения на функцию

$$\widehat{\tau}_t(p) = e^{-i\sigma^2 tp}. \tag{42}$$

Посмотрим теперь, как действует полугруппа $W_n^t$. Ясно, что Фурье-образ этого оператора также будет оператором умножения. Чтобы найти оператор $\widehat{W_n^t}$ мы должны применить оператор $W_n^t$ к функции $\varphi(x) = e^{-ipx}$. Рассмотрим сначала случай Im $\sigma^2 \leqslant 0$ (или, что то же самое, Re $i\sigma^2 \geqslant 0$).

Имеем

$$\begin{aligned} W_n^t\varphi(x) &= e^{-ipx}\,\mathbf{E}_n\,e^{-ip\sigma^2\langle\omega,\omega\rangle[0,t]} \\ &= e^{-ipx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^kt^k}{k!}\int_{\mathbb{R}^k}\Delta^{\otimes k}e^{-ip\sigma^2(\frac{x_1^2}{n}+\cdots+\frac{x_k^2}{n}))}dQ^k \\ &= e^{-ipx}\exp\Big(nt\int_{\mathbb{R}}\big(e^{-ip\sigma^2\frac{y^2}{n}}-1\big)Q(dy)\Big) \\ &= e^{-ipx}\exp\Big(nt\Big(\int_{\mathbb{R}}e^{-ip\sigma^2\frac{y^2}{n}}Q(dy)-1\Big)\Big) \end{aligned} \tag{43}$$

Из (43) следует, что $\widehat{W_n^t}$ есть оператор умножения на функцию

$$\widehat{\tau}_{t,n}(p) = \exp\Big(nt\Big(\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{ip\sigma^2y^2}{n}}Q(dy)-1\Big)\Big).$$

Заметим прежде всего, что из условия $\operatorname{Im}\sigma^2 \leqslant 0$ ($\operatorname{Im}\sigma^2 \geqslant 0$) немедленно вытекает, что для всех $p \geqslant 0$ (соответственно $p \leqslant 0$)

$$|\widehat{\tau}_{t,n}(p)| \leqslant 1. \tag{44}$$

**Лемма 3.** *Если* $\operatorname{Im}\sigma^2 \leqslant 0$, *то для любого* $M > 0$ *равномерно по* $p \in [0, M]$

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{\tau}_{t,n}(p) = \widehat{\tau}_t(p) = \exp\big(-i\sigma^2 tp\big). \tag{45}$$

*Если же* $\operatorname{Im}\sigma^2 \geqslant 0$, *то* (45) *справедливо равномерно по* $p \in [-M, 0]$.

**Доказательство.** Пусть $\operatorname{Im}\sigma^2 \leqslant 0$ (случай $\operatorname{Im}\sigma^2 \geqslant 0$ рассматривается аналогично). Имеем

$$\widehat{\tau}_{t,n}(p) = \exp\big(-i\sigma^2 tp\big)\exp\Big(nt\int\limits_{\mathbb{R}}\Big(e^{-\frac{ip\sigma^2y^2}{n}} - 1 + \frac{ip\sigma^2y^2}{n}\Big)Q(dy)\Big).$$

Покажем теперь, что аргумент второй экспоненты равномерно по $p \in [0, M]$ стремится к нулю.

Имеем

$$\begin{aligned}
&|nt\int\limits_{\mathbb{R}}\Big(e^{-\frac{ip\sigma^2y^2}{n}} - 1 + \frac{ip\sigma^2y^2}{n}\Big)Q(dy)| \\
&\leqslant nt\int\limits_{|\frac{y}{\sqrt{n}}|\leqslant 1}\frac{|p|^2y^4}{2n^2}e^{|p|}Q(dy) \\
&+ nt\int\limits_{|\frac{y}{\sqrt{n}}|\geqslant 1}\Big|e^{-\frac{ip\sigma^2y^2}{n}} - 1 + \frac{ip\sigma^2y^2}{n}\Big|Q(dy).
\end{aligned} \tag{46}$$

Ясно, что второе слагаемое в (46) стремится к нулю (напомним, что в силу условия $\operatorname{Im}\sigma^2 \leqslant 0$, экспонента во втором слагаемом по модулю не больше единицы). Покажем, что первое слагаемое в (46) тоже стремится к нулю. Так как $p \in [0, M]$, то достаточно показать, что стремится к нулю последовательность

$$\frac{1}{n}\int\limits_{|\frac{y}{\sqrt{n}}|\leqslant 1} y^4 Q(dy). \tag{47}$$

Для любого $0 < \varepsilon < 1$ имеем

$$\frac{1}{n} \int\limits_{|\frac{y}{\sqrt{n}}|\leqslant 1} y^4 Q(dy) = \frac{1}{n} \int\limits_{|\frac{y}{\sqrt{n}}|\leqslant \varepsilon} y^4 Q(dy) + \frac{1}{n} \int\limits_{\varepsilon<|\frac{y}{\sqrt{n}}|\leqslant 1} y^4 Q(dy)$$

$$\leqslant \varepsilon^2 \int y^2 Q(dy) + \int\limits_{\varepsilon<|\frac{y}{\sqrt{n}}|} y^2 Q(dy).$$

Выбирая теперь последовательность $\varepsilon_n \to 0$ такую, что $\varepsilon_n\sqrt{n} \to \infty$, получаем стремление к нулю последовательности (47). $\square$

Далее, нетрудно показать, что для каждой $\varphi \in \mathcal{H}_{\rm fin}$ функция $u(t,x) = W^t\varphi(x)$ является решением задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma^2 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u(0,x) = \varphi(x),$$

а функция $u_n(t,x) = W_n^t\varphi(x)$ является решением задачи Коши

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = B_n^\sigma u_n, \quad u_n(0,x) = \varphi(x),$$

где оператор $B_n^\sigma$ действует на функцию $\psi \in \mathcal{H}_{\rm fin}$ как

$$B_n^\sigma \psi(x) = n \int\limits_{\mathbb{R}} (\psi(x + \frac{\sigma^2 y^2}{n}) - \psi(x)) Q(dy).$$

Из (42) и (44) следует, что в случае $\operatorname{Im} \sigma^2 \leqslant 0$ операторы $W^t, W_n^t$ могут быть продолжены на пространства $\mathcal{R}_0^-$ и $\mathcal{H}_2^-$, а в случае $\operatorname{Im}\sigma^2 \geqslant 0$ – соответственно на пространства $\mathcal{R}_0^+$ и $\mathcal{H}_2^+$. В следующих теоремах речь идет о сходимости соответствующих продолжений.

**Теорема 7.** 1. *Если* $\operatorname{Im} \sigma^2 \leqslant 0$, *то для любой функции* $\varphi \in \mathcal{R}_0^-$ *равномерно по* $t \in [0,T]$

$$\lim_{n\to\infty} \|W_n^t\varphi - W^t\varphi\|_{\mathcal{R}_0} = 0. \tag{48}$$

2. *Если* $\operatorname{Im} \sigma^2 \geqslant 0$, *то* (48) *справедливо равномерно по* $t \in [0,T]$ *для любой функции* $\varphi \in \mathcal{R}_0^+$.

**Теорема 8.** 1. *Если* $\operatorname{Im} \sigma^2 \leqslant 0$, *то для любой функции* $\varphi \in \mathcal{H}_2^-$ *равномерно по* $t \in [0,T]$

$$\lim_{n\to\infty} \|W_n^t\varphi - W^t\varphi\|_2 = 0. \tag{49}$$

2. *Если* $\mathrm{Im}\,\sigma^2 \geqslant 0$, *то* (49) *справедливо равномерно по* $t \in [0,T]$ *для любой функции* $\varphi \in \mathcal{H}_2^+$

Доказательство теорем 7 и 8 аналогично доказательству теорем 4 и 5.

## §6. Представление решения уравнения с ограниченным потенциалом

В этом параграфе мы будем предполагать, что $\mathrm{Re}\,\sigma^2 \geqslant 0$, а $Q(dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$. Как было показано выше, для любой $\varphi \in \mathcal{H}_{\mathrm{fin}}$ функция $u(t,x) = \mathbf{L}\,\varphi(\xi_x^\sigma(t))$ является решением задачи Коши (37). Теперь мы хотим получить аналогичное представление, но уже для уравнения, возмущенного ограниченным потенциалом. В соответствии в формулой Фейнмана–Каца естественным кандидатом на такое представление является функция

$$u(t,x) = \mathbf{L}\left[\varphi(\xi_{t,x}^\sigma(T)) \exp\left(\int\limits_t^T f(\xi_{t,x}^\sigma(u))du\right)\right], \tag{50}$$

где $f$ – комплекснозначная функция вещественного аргумента (она, как будет показано далее, отличается от потенциала постоянным множителем), а $\xi_{t,x}^\sigma(u)$, $u \geqslant t$ – обобщенный процесс вида

$$\xi_{t,x}^\sigma(u) = \xi_{t,x}^\sigma(u,\omega) = x + \sigma\omega([t,u]), \quad u \in [t,T].$$

Ясно, что такое представление не может быть признано удовлетворительным, по причине того, что нам необходимо иметь аналитическое продолжение функции $f$, что налагает на потенциал совершенно неестественные ограничения. Чтобы избежать этой проблемы, мы, отталкиваясь от (50), получим другое представление функции $u(t,x)$, в котором потенциал появляется не сам по себе, а только в свертке с фундаментальным решением невозмущенного уравнения.

Заметим, прежде всего, что для всех $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T$ справедливы соотношения

$$P^{s-t}\varphi(x) = \mathbf{L}\,\varphi(\xi_{t,x}^\sigma(s)) = \mathbf{L}^{t,s}\,\varphi(\xi_{t,x}^\sigma(s)) \tag{51}$$

и

$$P_n^{s-t}\varphi(x) = \mathbf{E}_n\,\varphi(\xi_{t,x}^\sigma(s)) = \int \varphi(\xi_{t,x}^\sigma(s))d\,\mathbf{P}_n^{t,s}\,. \tag{52}$$

И, кроме того, функция $u(t,x) = P^{T-t}\varphi(x)$ является решением задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(T,x) = \varphi(x), \tag{53}$$

а функция $u_n(t,x) = P_n^{T-t}\varphi(x)$ – решением задачи Коши

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = -A_n^\sigma u_n, \quad u_n(T,x) = \varphi(x), \tag{54}$$

где оператор $A_n^\sigma$ определен в (38).

Преобразуем теперь выражение (50). В силу (51) и (26), имеем

$$\mathbf{L}\,\varphi(\xi_{t,x}^\sigma(T))\int_t^T f(\xi_{t,x}^\sigma(u))du = \int_t^T \mathbf{L}\,\varphi(\xi_{t,x}^\sigma(T))f(\xi_{t,x}^\sigma(u))du$$

$$= \int_t^T \big(\mathbf{L}\,\varphi(\xi^\sigma_{u,\xi^\sigma_{t,x}(u)}(T))f(\xi_{t,x}^\sigma(u))\big)du = \int_t^T P^{u-t}(fP^{T-u}\varphi)(x)du.$$

Аналогично, для любого $k > 1$ имеем

$$\mathbf{L}\,\varphi(\xi_{t,x}^\sigma(T))\bigg(\int_t^T f(\xi_{t,x}^\sigma(u))du\bigg)^k$$

$$= k!\int\limits_{t<u_1<\dots<u_k<T} du_1\dots$$

$$du_k P^{u_1-t}(fP^{u_2-u_1}(fP^{u_3-u_2}(\dots fP^{T-u_k}\varphi)\dots))(x). \tag{55}$$

Используя (55), получаем

$$u(t,x) = \mathbf{L}\,\varphi(\xi_{t,x}^\sigma(T))\exp\bigg(\int_t^T f(\xi_{t,x}^\sigma(u))du\bigg)$$

$$= \mathbf{L}\,\varphi(\xi_{t,x}^\sigma(T))\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}\bigg(\int_t^T f(\xi_{t,x}^\sigma(u))du\bigg)^k$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}\mathbf{L}\,\varphi(\xi_{t,x}^\sigma(T))\bigg(\int_t^T f(\xi_{t,x}^\sigma(u))du\bigg)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{t<u_1<\dots<u_k<T} du_1 \dots du_k$$
$$P^{u_1-t}(fP^{u_2-u_1}(fP^{u_3-u_2}(\dots fP^{T-u_k}\varphi)\dots))(x). \tag{56}$$

Будем теперь считать, что функция $u(t,x)$ задана формулой (56), а на все предыдущее будем смотреть как на наводящие соображения. Посмотрим, какому уравнению удовлетворяет функция $u(t,x)$. Продифференцируем по $t$ правую часть (56). От $t$ зависят пределы интегрирования и подинтегральное выражение. Используя (53), получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - fu, \quad u(T,x) = \varphi(x), \tag{57}$$

Случай $\sigma = 1$ соответствует уравнению теплопроводности, в этом случае $f$ имеет смысл потенциала. Случай $\sigma = e^{-\frac{i\pi}{4}}$ соответствует уравнению Шредингера

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ifu,$$

в этом случае смысл потенциала имеет функция $v(x) = if(x)$.

Далее, для $n \in \mathbb{N}$ определим функцию $u_n(t,x)$, полагая ее равной

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{t<u_1<\ldots<u_k<T} du_1 \dots du_k P_n^{u_1-t}(fP_n^{u_2-u_1}(fP_n^{u_3-u_2}(\dots fP_n^{T-u_k}\varphi)\dots))(x). \tag{58}$$

Нетрудно показать, что функция $u_n(t,x)$ является решением задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -A_n^{\sigma} u_n - fu, \quad u_n(T,x) = \varphi(x).$$

Займемся теперь вопросами сходимости рядов (56), (58), а также вопросами сходимости $u_n \to u$. Напомним, что мы предполагаем выполнение условий $\operatorname{Re}\sigma^2 \geqslant 0$, и $Q(dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$. Как было показано выше, при этих предположениях операторы $\widehat{P}^t$ и $\widehat{P}_n^t$ суть операторы умножения на функцию, по модулю не превосходящую единицы.

**Лемма 4.** *Пусть* $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, $f \in L_\infty(\mathbb{R})$. *Тогда ряды* (56), (58) *сходятся в* $L_2(\mathbb{R})$ *равномерно по* $t \in [0,T]$.

**Доказательство.** Воспользуемся простыми оценками. Пусть $\psi \in L_2(\mathbb{R})$. Тогда $\|f\psi\|_2 \leqslant \|\psi\|_2\|f\|_\infty$ и для любого $t \in [0,T]$

$$\|P^t\psi\|_2 = \|\widehat{P}^t\widehat{\psi}\|_2 \leqslant \|\widehat{\psi}\|_2 = \|\psi\|_2$$

и

$$\|P_n^t\psi\|_2 \leqslant \|\psi\|_2.$$

Применяя последовательно эти оценки, получаем, что $L_2$-норма слагаемого с номером $j$ в (56) и (58) для любых $u_1 < u_2 < \cdots < u_n$ оценится величиной $\|\psi\|_2\|f\|_\infty^j$. Интегрирование по переменным $u_1, \ldots, u_j$ даст множитель $\frac{(T-t)^j}{j!}$, что гарантирует сходимость в $L_2$ рядов (56) и (58). □

**Лемма 5.** *Пусть $\varphi$, $f \in \mathcal{R}_0$. Тогда ряды* (56) *и* (58) *сходятся в норме $\mathcal{R}_0$ равномерно по $t \in [0,T]$.*

**Доказательство.** Пусть $\psi \in \mathcal{R}_0$. Тогда для любого $t \in [0,T]$

$$\|P^t f\psi\|_{\mathcal{R}_0} = \|\widehat{P}^t\widehat{f\psi}\|_1 \leqslant \|\widehat{f\psi}\|_1 = \|\widehat{f} * \widehat{\psi}\|_1 \leqslant \|\widehat{f}\|_1\|\widehat{\psi}\|_1$$

и, аналогично,

$$\|P_n^t f\psi\|_{\mathcal{R}_0} \leqslant \|\widehat{f}\|_1\|\widehat{\psi}\|_1.$$

Дальнейшие рассуждения полностью совпадают с аналогичными рассуждениями в доказательстве леммы 4. □

**Теорема 9.** *Пусть $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, $f \in L_\infty(\mathbb{R})$. Тогда, равномерно по $t \in [0,T]$,*

$$\|u_n(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

**Доказательство.** Заметим прежде всего, что в силу леммы 4 нам достаточно показать сходимость в $L_2$ отдельных слагаемых суммы (58) к соответствующим слагаемым суммы (56). Последнее утверждение легко доказывается последовательным применением следующей леммы. □

**Лемма 6.** *Пусть $\{\psi_n\}$ – последовательность функций из $L_2(\mathbb{R})$, такая, что $\|\psi_n - \psi\|_2 \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Тогда, равномерно по $t \in [0,T]$,*

$$\|P_n^t\psi_n - P^t\psi\|_2 \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

**Доказательство.** Имеем

$$\|P_n^t\psi_n - P^t\psi\|_2 \leqslant \|P_n^t(\psi_n - \psi)\|_2 + \|P_n^t\psi - P^t\psi\|_2$$
$$\leqslant \|\psi_n - \psi\|_2 + \|P_n^t\psi - P^t\psi\|_2.$$

Заметим, что второе слагаемое стремится к нулю по теореме 5. □

**Теорема 10.** *Пусть* $\varphi, f \in \mathcal{R}_0$. *Тогда, равномерно по* $t \in [0,T]$,

$$\|u_n(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_{\mathcal{R}_0} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

**Доказательство.** Доказательство этой теоремы вполне аналогично доказательству теоремы 9. Все, что нужно доказать – это аналог леммы 6, именно, что из сходимости $\|\psi_n - \psi\|_{\mathcal{R}_0} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ вытекает равномерная то $t \in [0,T]$ сходимость $\|P_n^t\psi_n - P^t\psi\|_{\mathcal{R}_0} \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Имеем

$$\begin{aligned}\|P_n^t\psi_n - P^t\psi\|_{\mathcal{R}_0} &= \|\widehat{P_n^t\psi_n} - \widehat{P^t\psi}\|_1 \\ &\leqslant \|\widehat{P_n^t}(\widehat{\psi_n} - \widehat{\psi})\|_1 + \|\widehat{P}_n^t\widehat{\psi} - \widehat{P}^t\widehat{\psi}\|_1 \\ &\leqslant \|\widehat{\psi_n} - \widehat{\psi}\|_1 + \|\widehat{P}_n^t\widehat{\psi} - \widehat{P}^t\widehat{\psi}\|_1.\end{aligned}$$

Стремление к нулю последнего слагаемого следует из теоремы 4. □

## Литература


1. Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Вероятностное представление решений некоторого класса эволюционных уравнений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **384** (2010), 238–266.
2. А. Д. Вентцель, *Курс теории случайных процессов*. Наука, М. (1975).
3. H. Doss, *Sur une résolution stochastique de l'equation de Schrödinger à coefficients analytiques.* — Commun. Math. Phys. **73**, (1980), 247–264.
4. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними.* Наука, М. (1958).
5. Ю. Л. Далецкий, С. В. Фомин, *Меры и дифференциальные уравнения в функциональных пространствах.* Наука, М. (1983).
6. А. В. Скороход, *Случайные процессы с независимыми приращениями.* Наука, М. (1986).
7. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики.* Мир, М. (1978).

Ibragimov I. A., Smorodina N. V., Faddeev M. M. A probabilistic approximation of the Cauchy problem solution of some evolution equations.

In our paper we construct an analogy of a probabilistic representation of the Cauchy problem solution of the equation $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x)u = 0$, where $\sigma$ is a complex number.

Поступило 11 октября 2011 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 С.-Петербург,
Россия;
С.-Петербургский
государственный университет,
Математико-механический факультет,
Университетский проспект 28 Петродворец,
Санкт-Петербург 198504,
Россия

*E-mail*: ibr32@pdmi.ras.ru

С.-Петербургский
государственный университет,
Физический факультет,
Ульяновская ул. 3, Старый Петергоф,
198504 Санкт-Петербург,
Россия

*E-mail*: smorodin@ns2691.spb.edu

*E-mail*: mmfaddeev@gmail.com