Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 396, 2011 г.

И. А. Ибрагимов

О НИЖНИХ ГРАНИЦАХ ТОЧНОСТИ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ

1. Введение. В работе [1] авторы рассматривали следующую задачу непараметрического оценивания. Наблюдается выборка

$$X_1, \dots, X_n,$$

элементы которой принимают значения в измеримом пространстве $\{\mathfrak{X}, \mathfrak{A}\}$, снабженном σ-конечной мерой μ. Распределения $\mathcal{P}$ величин X_j абсолютно непрерывны относительно μ и имеют плотность $\theta(x) = \frac{d\mathcal{P}}{d\mu}(x)$, которая и подлежит оценке по наблюдениям X_j. Априори предполагается, что неизвестная плотность θ принадлежит известному множеству Θ функций на $\{\mathfrak{X}, \mathfrak{A}\}$. Предполагается, что Θ снабжено метрикой ρ, превращающей его в метрическое пространство (Θ, ρ). Пусть $l(x)$ – неубывающая функция, определенная на $[0, \infty)$, $l(0) = 0$; примем $l(x)$ за функцию потерь. Тогда

$$R(\widehat{\theta}_n; \theta) = \mathbf{E}_\theta(l(\rho(\widehat{\theta}_n, \theta)))$$

есть функция риска оценки $\widehat{\theta}_n$.

Возьмем число $\delta > 0$ и пусть $\theta_1, \dots \theta_N$ – множество элементов из Θ δ-различимых в метрике ρ, т.е. $\rho(\theta_i, \theta_j) > \delta$. Обозначим $\|\cdot\|_2$ норму в пространстве $L_2(\mathfrak{X}, d\mu)$. В [1] доказано, что для любой оценки $\widehat{\theta}_n$ плотности θ при больших N

$$\sup_{\theta \in \Theta} \mathbf{E}_\theta(l(\delta^{-1}\rho(\widehat{\theta}_n, \theta))) \geqslant l\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{n}{\ln N} \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \left\| \frac{\theta_i - \theta_0}{\sqrt{\theta_0}} \right\|_2^2 (1 + o(1)\right),$$

где θ_0 – произвольная плотность распределения по отношению к μ, т.е. $\theta_0 \geqslant 0$, $\int\limits_{\mathfrak{X}} \theta_0 \, d\mu = 1$.

Из последнего соотношения легко вытекает следующий результат:

Ключевые слова: непараметрические задаци оценивания, гауссовский белый шум, процесс Пуассона.

Работа поддержана грантами РФФИ-ННИО 09-01-91331, РФФИ 11-01-00577 и Программой фундаментальных исследований РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

Пусть для каждого $\delta > 0$ существует множество $\{\theta_{i\delta}, i = 1, ..., N(\delta)\}$ δ-различимых плотностей из Θ. Положим

$$\delta(n;\Theta;\rho) = \delta(n,\Theta) = \sup_{\theta_0} \sup_{\{\theta_{i\delta}\}} \left\{ \delta : (\ln N(\delta))^{-1} \max_{1 \leqslant i \leqslant N(\delta)} \left\| \frac{\theta_{i\delta} - \theta_0}{\sqrt{\theta_0}} \right\|_2^2 \leqslant \frac{1}{2n} \right\},$$

где верхняя грань берется по всем δ-различимым подмножествам $\{\theta_{i\delta}\}$ множества Θ и всем вероятностным плотностям θ_0. Тогда при $n \to \infty$

$$\inf_{\theta_n} \sup_{\theta \in \Theta} \mathbf{E}_\theta \left\{ l\left(\frac{\rho(\theta_n, \theta)}{\delta(n;\theta)} \right) \right\} \geqslant \frac{1}{2}\, l\left(\frac{1}{2}\right)(1 + o(1)). \tag{1}$$

Ниже приводятся аналоги этого результата для некоторых других схем оценивания.

2. Наблюдения в гауссовском белом шуме интенсивности ε. Пусть $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A}, \mu)$ – измеримое пространство с мерой μ, функция $\theta \in L_2(\mathfrak{X}, d\mu)$. Мы скажем, что θ наблюдается в белом гауссовском шуме интенсивности ε, и обозначим наблюдение X_ε, если каждой функции $\varphi \in L_2(\mathfrak{X}, d\mu)$ (пробной функции) отвечает наблюдаемая величина $X_\varepsilon(\varphi)$, статистика. При этом векторы $(X_\varepsilon(\varphi), \ldots, X_\varepsilon(\varphi_n))$ имеют гауссовское распределение в R^n и

$$\mathbf{E}_f\{X_\varepsilon(\varphi_j)\} = \int_{\mathfrak{X}} f(x)\varphi_j(x)\, d\mu,$$

$$\mathbf{E}_f\{(X_\varepsilon(\varphi_i) - \mathbf{E}X_\varepsilon(\varphi_i))(X_\varepsilon(\varphi_j) - \mathbf{E}X_\varepsilon(\varphi_j)\} = \int_{\mathfrak{X}} \varphi_i(x)\varphi_j(x)\, d\mu.$$

Пример. Наблюдается случайная функция $X_\varepsilon(t)$,

$$X_\varepsilon(t) = \int_0^t f(t)\, dt + \varepsilon w(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

$w(t)$ – винеровский процесс. Наблюдаемые

$$X_\varepsilon(\varphi) = (X_\varepsilon, \varphi) = \int_0^1 \varphi(t)\, dX_\varepsilon(t) = \int_0^1 f(t)\varphi(t)\, dt + \varepsilon \int_0^1 f(t)\, dw(t),$$

см., напр., [2].

Предположим, что о неизвестной функции θ известно, что она принадлежит заданному известному множеству $\Theta \subseteq L_2(\mathfrak{X}, d\mu)$ и что множество Θ снабжено метрикой ρ.

Положим

$$\delta(\varepsilon,\Theta)=\sup_{\theta_0,\{\theta_{i\delta}\}}\left\{\delta:\left(\frac{1}{\ln(N(\delta)-1)}\left\|\frac{\theta_{i\delta}-\theta_0}{\sqrt{\theta_0}}\right\|_2^2+\ln 2\right)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

где верхняя грань берется по всем δ-различимым в метрике ρ подмножествам $\{\theta_{1\delta},\dots,\theta_{N\delta}\}$ множества Θ.

Теорема 1. *Пусть $l(x)$ – определенная на $[0,\infty)$ монотонно неубывающая функция потерь с $l(0)=0$. Какова бы ни была оценка $\widehat{\theta}_\varepsilon$ функции θ, построенная по наблюдению X_ε,*

$$\sup_{\theta\in\Theta}\mathbf{E}_\theta\, l\left(\frac{\rho(\theta,\widehat{\theta}_\varepsilon)}{\delta(\varepsilon,\Theta)}\right)\geqslant\frac{1}{2}\,l\left(\frac{1}{2}\right)\tag{2}$$

Доказательство. Пусть $\{\theta_i, i=1,2,\dots,N\}$ – какое-нибудь δ-различимое подмножество Θ. Рассмотрим задачу оценивания величины η, принимающей значения θ_i с вероятностями $\frac{1}{N}$, по наблюдению X_ε и пусть

$$p_e=\inf_\Psi\mathbf{P}\left\{\Psi(X_\varepsilon)\neq\eta\right\}=\inf_\Psi\frac{1}{N}\sum\mathbf{P}\left\{\Psi(X_\varepsilon)\neq\theta_i\,|\,\eta=\theta_i\right\}.$$

По лемме Фэно (см. [2, соотношение (1.9), гл. VII]

$$p_e\geqslant 1-\frac{I(X_\varepsilon,\eta)+\ln 2}{\ln(N-1)},$$

где $I(X,Y)$ означает количество информации Шеннона в X относительно Y,

$$I(X,Y)=\mathbf{E}\left\{\ln\frac{d\mathbf{P}_{X,Y}}{d\mathbf{P}_X\times d\mathbf{P}_Y}(X,Y)\right\}.$$

Возвращаясь к задаче оценивания θ, найдем, что для любой оценки $\widehat{\theta}_\varepsilon$

$$\sup_\theta\mathbf{E}_\theta\, l\left(\frac{\rho(\theta,\widehat{\theta}_\varepsilon)}{\delta}\right)\geqslant\sup_i\mathbf{E}_{\theta_i}\, l\left(\frac{\rho(\theta_i,\widehat{\theta}_\varepsilon)}{\delta}\right)\geqslant\frac{1}{N}\sum_1^N\mathbf{E}_{\theta_i}\, l\left(\frac{\rho(\theta_1,\widehat{\theta}_\varepsilon)}{\delta}\right)$$

$$\geqslant\frac{l(\frac{1}{2})}{N}\sum_{i=1}^N\mathbf{P}_{\theta_i}\left\{\rho(\theta_i,\widehat{\theta}_\varepsilon)>\frac{\delta}{2}\right\}\geqslant l\left(\frac{1}{2}\right)p_e\geqslant l\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{I(X_\varepsilon,\eta)+\ln 2}{\ln(N-1)}\right).$$

Пусть $\theta_0\in L_2$. Положим

$$\varphi_i(X_\varepsilon)=\frac{d\mathbf{P}_{X_\varepsilon|\eta=\theta_i}(X_\varepsilon,\eta)}{d\mathbf{P}_{\theta_0}}(X_\varepsilon).$$

Тогда в силу неравенства Йенсена

$$I(\eta, X_\varepsilon) = \mathbf{E}\left\{\ln \frac{d\mathbf{P}_{X_\varepsilon|\eta}}{d\mathbf{P}_{X_\varepsilon}}(X_\varepsilon, \eta)\right\} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}\left\{\frac{d\mathbf{P}_{X_\varepsilon|\eta=\theta_i}}{\frac{1}{N}\sum\limits_{1}^{N} d\mathbf{P}_{X_\varepsilon|\eta=\theta_i}}\right\}$$

$$\leqslant \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}_{\theta_i}\{\ln\varphi_i\} = \frac{1}{N}\sum \mathbf{E}_{\theta_0}\{\varphi_i \ln\varphi_i\}.$$

Производная Радона–Никодима

$$\varphi_i = \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}X_\varepsilon(\theta_i - \theta_0) - \frac{1}{2\varepsilon^2}(\|\theta_i\|_2^2 - \|\theta_0\|_2^2)\right\}$$
$$= \exp\left\{\frac{\|\theta_i - \theta_0\|_2}{\varepsilon}\xi - \frac{1}{2\varepsilon^2}\|\theta_i - \theta_0\|_2^2\right\},$$

где ξ – случайная величина со стандартным нормальным распределением, см. [3, теорема 3, §9]. Следовательно, полагая $\sigma_i = \|\theta_i - \theta_0\|_2$, найдем

$$\mathbf{E}_{\theta_0}\{\varphi_i \ln\varphi_i\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sigma_i x}{\varepsilon} - \frac{\sigma_i^2}{2\varepsilon^2}\right) e^{-\frac{\sigma_i^2}{2\varepsilon^2}} \exp\left\{\frac{\sigma_i x}{\varepsilon} - \frac{x^2}{2}\right\} dx = \frac{\sigma_i^2}{2\varepsilon^2}.$$

Таким образом,

$$I(\eta, X_\varepsilon) \leqslant \frac{1}{2\varepsilon^2}\max_i \|\theta_i - \theta_0\|_2^2.$$

Следовательно,

$$\sup_\theta \mathbf{E}_\theta\left\{l\left(\frac{\rho(\theta, \theta_\varepsilon^*)}{\delta}\right)\right\} \geqslant l\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{(2\varepsilon^2)^{-1}\max\limits_i \|\theta_i - \theta_0\|_2^2 + \ln 2}{\ln(N-1)}\right)$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\, l\left(\frac{1}{2}\right),$$

если $\frac{(2\varepsilon^2)^{-1}\max\limits_i \|\theta_i - \theta_0\|^2 + \ln 2}{\ln(N-1)} \leqslant \frac{1}{2}$. □

3. Оценка плотности интенсивности пуассоновского случайного множества. Пусть, как и выше, $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A}, \mu)$ – измеримое пространство с σ-конечной мерой μ. Относительно $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A})$ мы предположим, что

это измеримое пространство удовлетворяет условиям из [4, гл. 2], позволяющим безболезненно определять на $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A})$ пуассоновские случайные множества.

Предположим, что мы наблюдаем на $\mathfrak{X}$ пуассоновское случайное множество Π_ε с плотностью интенсивности относительно меры μ равной $\varepsilon^{-1} \cdot \theta(x)$, где ε – известный (малый) параметр, а θ – неизвестная функция, $\theta \geqslant 0$, $\int\limits_{\mathfrak{X}} \theta(x)\, d\mu < \infty$. Как и выше, мы предполагаем, что плотность интенсивности $\theta \in \Theta$, Θ – известное подмножество $\mathfrak{X}$, снабженное метрикой ρ.

(Малый) множитель ε усиливает интенсивность наблюдаемого случайного множества, делая возможным состоятельное (при $\varepsilon \to 0$) оценивание θ. Например, если наблюдается n независимых пуассоновских множеств Π_j, $j = 1, \ldots, n$, интенсивности θ, то их объединение $\Pi_\varepsilon = \cup \Pi_j$ есть достаточная статистика для θ. Интенсивность множества Π_ε равна $n \cdot \theta = \varepsilon^{-1} \cdot \theta$, $\varepsilon = n^{-1}$.

Аналогично предыдущим пп. положим

$$\delta(\varepsilon; \Theta) = \sup_{\theta_0} \sup_{\{\theta_{i\delta}\}} \left\{ \delta : \frac{1}{\ln(N-1)} \left(\max_i \left(\left\| \frac{\theta_1 - \theta_0}{\sqrt{\theta_0}} \right\| \right)^2 + \ln 2 + \int\limits_{\mathfrak{X}} \theta_0 \, d\mu \right) \right\},$$

где верхняя грань берется по всем возможным плотностям интенсивности θ_0 и всем δ-различимым в метрике ρ подмножествам $\{\theta_{i\delta}, i = 1, 2, \ldots, N(\delta)\}$ множества Θ.

Теорема 2. *Пусть $l(x)$ – определенная на $(0, \infty)$ монотонно неубывающая функция потерь, $l(0) = 0$. Тогда для любой оценки $\widehat{\theta}_\varepsilon$ плотности интенсивности θ*

$$\sup_{\theta \in \Theta} \mathbf{E}_\theta \left\{ l \left(\frac{\rho(\theta_1 \widehat{\theta}_\varepsilon}{\delta(\varepsilon; \Theta)} \right) \right\} \geqslant \frac{1}{2}\, l\left(\frac{1}{2}\right). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $\theta_1, \ldots, \theta_N$ какое-нибудь δ-различимое подмножество множества Θ. Те же рассуждения, что и в предыдущем п., приводят к неравенству

$$\sup_{\theta \in \Theta} \mathbf{E}_\theta \left\{ l \left(\delta^{-1} \rho(\theta, \widehat{\theta}_\varepsilon) \right) \right\} \geqslant l\left(\frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{\ln(N-1)} \left(I(\Pi_\varepsilon, \eta) + \ln 2 \right) \right).$$

Здесь $I(\Pi_\varepsilon, \eta)$ – количество информации об η в Π_ε, а случайный элемент η принимает значения $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$ с вероятностями N^{-1}. Пусть

$\theta_0(x) > 0$, $\int\limits_{\mathfrak{X}} \theta_0(x)\, d\mu < \infty$. Положим

$$\varphi_i = \varphi_i(\Pi_\varepsilon) = \frac{d\mathbf{P}_{\Pi_\varepsilon|\eta=\theta_i}}{d\mathbf{P}_{\theta_0}}(\Pi_\varepsilon).$$

Как и выше, доказывается, что

$$I(\Pi_\varepsilon, \eta) \leqslant \frac{1}{N}\sum_1^N \mathbf{E}_0\{\varphi_i \ln \varphi_i\},$$

где $\mathbf{E}_i\{\,\cdot\,\}$ мы обозначаем $\mathbf{E}_{\theta_i}\{\,\cdot\,\}$, $i = 0, 1, \ldots, N$. Для вычисления $\mathbf{E}_0\{\varphi_i \ln \varphi_i\}$ нам понадобятся два следующих результата о процессах Пуассона.

Лемма 1 (теорема Кэмпбелла, см. [4, гл. 3])**.** *Пусть $\Pi = \{\tau\}$ есть пуассоновское случайное множество на $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A})$ с мерой интенсивности Λ. Пусть $f(x)$ – вещественная измеримая функция на $\mathfrak{X}$. Если*

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} \min(|f(x)|, 1)\Lambda(dx) < \infty,$$

то

$$\mathbf{E}\left\{\exp\left\{z\sum_{\tau\in\Pi} f(\tau)\right\}\right\} = \exp\left\{\int\limits_{\mathfrak{X}} (e^{zf(x)} - 1)\Lambda(dx)\right\}. \tag{4}$$

для всех комплексных чисел z, для которых сходится интеграл в правой части последнего равенства.

Лемма 2. *Пусть $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$ – два вероятностных распределения, соответствующих пуассоновскому случайному множеству Π в $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A}, \mu)$ с плотностями интенсивности относительно μ равными θ_0, θ_1 соответственно. Тогда, если $\int\limits_{\mathfrak{X}} \theta_i d\mu < \infty$, $\theta_i > 0$, то*

$$\frac{d\mathbf{P}_1}{d\mathbf{P}_0}(\Pi) = \exp\left\{\sum_{\tau\in\Pi} \ln\frac{\theta_1(\tau)}{\theta_0(\tau)} - \int\limits_{\mathfrak{X}} [\theta_1(x) - \theta_0(x)]\mu(dx)\right\}.$$

Относительно доказательства леммы 2 см. [5] или [6, пример 7, с. 124].

Перейдем к вычислению $\mathbf{E}_0\{\varphi_i \ln \varphi_i\}$). В силу леммы 2, полагая $I = \sum\limits_{\tau\in\Pi_\varepsilon} \ln \frac{\theta_i(\tau)}{\theta_0(\tau)}$, найдем

$$\mathbf{E}_0\{\varphi_i \ln \varphi_i\} = \mathbf{E}_0\{I \cdot \exp\{I - \int\limits_{\mathfrak{X}} [\theta_i(x) - \theta_0(x)]\, d\mu\} - \int\limits_{\mathfrak{X}} [\theta_1(x) - \theta_0(x)]\mu(dx).$$

Дифференцируя (4) по z и полагая $z = 1$, мы получим, что

$$\mathbf{E}_0\{Ie^I\} = \int\limits_{\mathfrak{X}} \ln\left(\frac{\theta_1(x)}{\theta_0(x)}\right) \cdot \theta_i(x)\mu(dx) \cdot \exp\{\int\limits_{\mathfrak{X}} [\theta_i(x) - \theta_0(x)]\mu(dx)\}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{E}_0\{\varphi_i \ln \varphi_i\} = \int\limits_{\mathfrak{X}} \theta_i(x) \ln \frac{\theta_i(x)}{\theta_0(x)} \mu(dx) - \int\limits_{\mathfrak{X}} [\theta_i(x) - \theta_0(x)]\mu(dx).$$

Для $x > 0$ справедливо неравенство $\ln(1 + x) < x$, поэтому

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_0\{\varphi_i \ln \varphi_i\} &\leqslant \int\limits_{\{\theta_i \geqslant \theta_0\}} \frac{(\theta_0 - \theta_i)^2}{\theta_0}\, d\mu + \int\limits_{\{\theta_0 \geqslant \theta_i\}} [\theta_0 - \theta_i]\, d\mu \\ &\leqslant \int\limits_{\mathfrak{X}} \frac{|\theta_i - \theta_0|^2}{\theta_0}\, d\mu + \frac{1}{2} \int\limits_{\mathfrak{X}} \theta_0\, d\mu.\end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует неравенство теоремы 2. □

4. Пример. Применение неравенств теорем 1 и 2 к конкретным задачам происходит так же, как и в работе [1]. Для иллюстрациии рассмотрим следующий простой пример.

Пусть Π – пуассоновское случайное множество на $[-\infty, \infty]$ с 1-периодической плотностью интенсивности (относительно меры Лебега) $\theta(x)$. Для оценки θ множество Π наблюдается на отрезке $[0, n]$, n – целое. Будем предполагать, что $\theta \in \Theta_\beta$, где Θ_β – множество всех неотрицательных 1-периодических функций таких, что

1. $\sup\limits_{\theta\in\Theta} \sup\limits_{x} \theta(x) = M_0 < \infty$;
2. все функции θ из Θ имеют k производных и

$$|\theta^{(k)}(x + h) - \theta^{(x)}(x)| \leqslant M_1 |h|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leqslant 1.$$

Числа M_0, M_1, $\beta = k+\alpha$ и определяют класс $\Theta_\beta = \Theta_\beta(M_0, M_1)$. Можно построить ядерные оценки θ_N вида

$$\theta_N(x) = \lambda_N \sum_{\tau\in\Pi} K(\lambda_N(x-\tau))$$

такие, что

$$\sup_{\theta\in\Theta} \mathbf{E}_\theta \|\theta - \theta_N\|_\infty \leqslant c_1 \cdot n^{-\frac{\beta}{2\beta+1}} (\ln n)^{\frac{\beta}{2\beta+1}},$$

где постоянная c_1 зависит от M_0, M_1 и β.

Теорема 2 позволяет показать, что последнее неравенство с точностью до постоянной c_1 неулучшаемо. Как уже отмечалось, можно считать, что наблюдается пуассоновское случайное множество Π_ε на отрезке $[0,1]$ с плотностью интенсивности $\varepsilon^{-1}\theta(x) = n\theta(x)$. Пусть $\varphi(x)$ – финитная бесконечно дифференцируемая функция с носителем на $(0,1]$. Допустим, что $\varphi(x) \geqslant 0$, и пусть $\max\limits_x \varphi(x) = M_2$. Рассмотрим функции

$$\psi_j(x) = bN^{-\beta}\varphi\left(N\left(x - \frac{j}{N}\right)\right), \quad j = 0, 1, \ldots, N-1,$$

и положим $\theta_j(x) = \psi_j(x) + \theta_0(x)$, $\theta_0(x) \equiv 1$. Легко видеть, что при подходящем выборе b все функции $\theta_j \in \Theta_\beta(M_0, M_1)$. Очевидно,

$$\max_x |\theta_j(x) - \theta_i(x)| = bN^{-\beta} \cdot M_2,$$

так что функции $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$ δ-различимы в $C(0,1)$ с $\delta = bMN^{-\beta}$. Далее,

$$\int_0^1 |\theta_j(x) - \theta_0(x)|^2\, dx = b^2 N^{-2\beta-1} \int_0^1 \varphi^2(x)\, dx,$$

так что при $N \to \infty$

$$\max_j \frac{1}{\ln N} \left\| \frac{\theta_j - \theta_0}{\sqrt{\theta_0}} \right\|_2^2 \sim \mathrm{const}\, \frac{N^{-2\beta-1}}{\ln N}.$$

Отсюда и из теоремы 2 следует, что для любой оценки $\widehat{\theta}_n$ функции θ

$$\sup_{\theta\in\Theta} \mathbf{E}_\theta \{\max_x |\theta(x) - \widehat{\theta}_n(x)\} \geqslant c_2 n^{-\frac{\beta}{2\beta+1}} (\ln n)^{\frac{\beta}{2\beta+1}},$$

где постоянная $c_2 > 0$ зависит только от M_0, M_1, β.

Сходным образом можно распространить на схемы наблюдений из пп. 2, 3 и прочие результаты из [1].

Литература

1. I. Ibragimov, R. Khasminskii, *On density estimation in the view of Kolmogorov's ideas in approximation theory.* — Ann. Statist. **18**, No. 3 (1990).
2. И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, *Статистическая теория оценивания.* Наука, М. (1979).
3. М. А. Лифшиц, *Гауссовские случайные функции.* ТВіМС, Киев (1995).
4. Дж. Кингман, *Пуассоновские процессы.* МЦНМО, М. (2007).
5. M. Brown, *Discrimination of Poisson processes.* — Ann. Math. Statist. **42** (1971), 773–776.
6. U. Grenander, *Abstract Inference.* J Wiley (1981).

Ibragimov I. A. Low bounds for risk functions in non-parametric estimation problems.

The authors of the paper [1] have established some general minimax low bounds of risk functions for probability densities estimates, Here analogous results are proved for some other non-parametric estimation problems.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, Санкт-Петербург 191023,
и С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр., 28,
Петродворец,
Санкт-Петербург 198504, Россия
E-mail: ibr32@pdmi.ras.ru

Поступило 23 ноября 2011 г.