Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 396, 2011 г.

А. Ю. Зайцев

ОПТИМАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ СИЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ПРИНЦИПЕ ИНВАРИАНТНОСТИ

Цель этой статьи – выяснить, при каких условиях из основного результата недавно опубликованной работы [5] (см. теоремы 1 и 2) вытекают правильные по порядку оценки точности сильной гауссовской аппроксимации сумм независимых одинаково распределенных гильбертовозначных случайных векторов ξ_j, имеющих конечные моменты $\mathbf{E}\,\|\xi_j\|^\gamma$, $\gamma > 2$. В работе [5] показано, что точность аппроксимации существенно зависит от скорости убывания последовательности собственных чисел ковариационного оператора слагаемых. В настоящей работе мы покажем, что теоремы 1 и 2 дают правильные по порядку оценки, если эта последовательность убывает медленно.

Введем обозначения, которые будут использоваться ниже. Распределение случайного вектора ξ будут обозначаться $\mathcal{L}(\xi)$. Соответствующий ковариационный оператор будет обозначаться $\operatorname{cov}\xi$. В дальнейшем $\log^* b = \max\{1, \log b\}$ при $b > 0$. Мы будем писать $A \ll_t B$, если существует такая зависящая только от t положительная величина $c(t)$, что $A \leqslant c(t)\, B$. Мы будем также писать $A \asymp_t B$, если $A \ll_t B \ll_t A$.

Мы будем рассматривать следующую хорошо известную проблему. Пусть $Z, Z_1, \dots, Z_n$ – независимые одинаково распределенные случайные векторы с нулевыми математическими ожиданиями и конечными моментами второго порядка. Требуется построить на одном вероятностном пространстве независимые одинаково распределенные случайные векторы $X, X_1, \dots, X_n$ и независимые одинаково распределенные гауссовские случайные векторы $Y, Y_1, \dots, Y_n$ таким образом, чтобы

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Z), \quad \mathbf{E}\,Y = 0, \quad \operatorname{cov} Y = \operatorname{cov} X,$$

Ключевые слова: принцип инвариантности, сильная аппроксимация, скорость сходимости, гильбертово пространство, суммы независимых случайных векторов.

Работа поддержана грантами РФФИ-ННИО 09-01-91331, РФФИ 10-01-00242 и 11-01-12104 и Программой фундаментальных исследований РАН "Современные проблемы теоретической математики".

и величина

$$\Delta_n(X,Y) = \max_{1\leqslant s\leqslant n} \Big\| \sum_{j=1}^{s} X_j - \sum_{j=1}^{s} Y_j \Big\| \tag{1}$$

была бы по возможности мала с достаточно большой вероятностью. Именно к этой задаче сводится оценивание точности сильной аппроксимации в принципе инвариантности. Мы опускаем подробную историю вопроса, отсылая читателя к работам [3, 5] и [12]. Ранее оценки точности сильной аппроксимации в бесконечномерных пространствах были получены, например, в работах [1, 2, 8] и [9].

Для краткости мы будем вместо выписывания перечисленных выше свойств векторов $X, X_1, \dots, X_n$ и $Y, Y_1, \dots, Y_n$ просто говорить, что *существует построение*, обладающее дополнительными свойствами, явно указываемыми в тексте.

В настоящей работе мы докажем теоремы 4 и 5, являющиеся достаточно элементарными следствиями теорем 1, 2 и 3, доказанных в работе [5]. В теоремах 4 и 5 мы формулируем условия, при которых порядки оценок сверху и снизу совпадают.

Мы будем обозначать $\mathbf{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство, состоящее из всевозможных вещественных последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$, для которых $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots < \infty$. Мы будем также обозначать

$$x^{(d)} = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbf{R}^d \quad \text{и} \quad x^{[d]} = (0, 0, \dots, 0, x_d, x_{d+1}, \dots) \in \mathbf{H}.$$

В формулировках результатов будет участвовать случайный вектор $Z = (Z_1, Z_2, \dots)$, принимающий значения в $\mathbf{H}$. Независимые копии вектора Z требуется построить на одном вероятностном пространстве с последовательностью независимых гауссовских случайных векторов. Не нарушая общности, мы будем предполагать, что координаты вектора Z некоррелированы, причем

$$\sigma_1^2 \geqslant \sigma_2^2 \geqslant \dots \geqslant \sigma_m^2 \geqslant \dots, \quad \text{где} \quad \sigma_m^2 = \mathbf{E}\, Z_m^2, \qquad m = 1, 2, \dots. \tag{2}$$

Обозначим

$$\mathbb{D} = \operatorname{cov} Z, \quad \mathbb{D}_d = \operatorname{cov} Z^{(d)}, \quad B_d^2 = \sum_{m=d+1}^{\infty} \sigma_m^2 = \mathbf{E}\, \big\|Z^{[d]}\big\|^2. \tag{3}$$

В частности,

$$B_0^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m^2 = \mathbf{E}\, \big\|Z\big\|^2. \tag{4}$$

Кроме того, в формулировках будет присутствовать параметр ψ, удовлетворяющий неравенству

$$21/2 < \psi \leqslant 11. \tag{5}$$

В дальнейшем некоторые константы будут зависеть от ψ. Чтобы избавиться от этого усложнения, можно, например, взять $\psi = 11$.

Следующие теоремы 1 и 2 были доказаны в работе [5].

Теорема 1. *Предположим, что ψ удовлетворяет неравенству* (5), *а Z – $\mathbf{H}$-значный случайный вектор с $\mathbf{E}\,Z = 0$ и $\mathbf{E}\,\|Z\|^\gamma < \infty$ при некотором $\gamma > 2$. Существует положительная величина $C(\gamma)$, зависящая только от γ и такая, что если при фиксированных натуральных числах d и n выполняется неравенство*

$$C(\gamma)\, d^{\gamma/2} (\log^* d)^{\gamma+1} \left(\mathbf{E}\left\|\mathbb{D}_d^{-1/2} Z^{(d)}\right\|^\gamma\right)^{2/\gamma} \leqslant n^{1-2/\gamma}, \tag{6}$$

то существует такое построение, что

$$\mathbf{E}\left(\Delta_n(X,Y)\right)^\gamma \ll_{\gamma,\psi} d^{\psi\gamma} n \sigma_1^\gamma\, \mathbf{E}\left\|\mathbb{D}_d^{-1/2} Z^{(d)}\right\|^\gamma + n\,\mathbf{E}\left\|Z^{[d]}\right\|^\gamma + (n\,B_d^2)^{\gamma/2}. \tag{7}$$

Теорема 2. *Предположим, что ψ удовлетворяет неравенству* (5), *а Z – $\mathbf{H}$-значный случайный вектор с $\mathbf{E}\,Z = 0$ и $\mathbf{E}\,\|Z\|^\gamma < \infty$ при некотором $\gamma > 2$. Пусть d и n – фиксированные натуральные числа. Если выполняется неравенство*

$$C(\gamma)\, d^{\gamma/2} (\log^* d)^{\gamma+1} \left(\mathbf{E}\,\|Z\|^\gamma\right)^{2/\gamma} \leqslant n^{1-2/\gamma}\, \sigma_d^2, \tag{8}$$

где величина $C(\gamma)$ определена в теореме 1, *то существует такое построение, что*

$$\mathbf{E}\left(\Delta_n(X,Y)\right)^\gamma \ll_{\gamma,\psi} d^{\psi\gamma} \left(\sigma_1/\sigma_d\right)^\gamma n\,\mathbf{E}\,\|Z\|^\gamma + (n\,B_d^2)^{\gamma/2}. \tag{9}$$

Использование оценок величины $\mathbf{E}\left(\Delta_n(X,Y)\right)^\gamma$ для оценивания точности сильной аппроксимации в одномерном принципе инвариантности было предложено в работе А. И. Саханенко [7].

Теоремы 1 и 2 позволяют получать содержательные бесконечномерные оценки с помощью подходящего выбора размерности d, при котором слагаемые в правых частях неравенств (7) или (9) имеют примерно одинаковый порядок по n. Теорема 2 является простым следствием теоремы 1 и неравенства

$$\mathbf{E}\left\|\mathbb{D}_d^{-1/2} Z^{(d)}\right\|^\gamma \leqslant \sigma_d^{-\gamma}\, \mathbf{E}\left\|Z^{(d)}\right\|^\gamma \leqslant \sigma_d^{-\gamma}\, \mathbf{E}\,\|Z\|^\gamma. \tag{10}$$

Вообще говоря, теорема 1 точнее теоремы 2. Для многих распределений с регулярным поведением моментов справедливо соотношение

$$K = \sup_{1\leqslant d<\infty} d^{-\gamma/2}\,\mathbf{E}\,\|\mathbb{D}_d^{-1/2}Z^{(d)}\|^\gamma < \infty, \tag{11}$$

выполнение которого может привести к существенному улучшению порядка оценок (см. примеры 2 и 4 из работы [5]). Например, если вектор Z имеет независимые координаты Z_m, то, в силу неравенства Розенталя [6] для моментов сумм неотрицательных случайных величин (см. [5], лемма 2),

$$\mathbf{E}\,\|\mathbb{D}_d^{-1/2}Z^{(d)}\|^\gamma = \mathbf{E}\left(\sum_{m=1}^{d}\frac{Z_m^2}{\sigma_m^2}\right)^{\gamma/2} \ll_\gamma d^{\gamma/2} + \sum_{m=1}^{d}\sigma_m^{-\gamma}\,\mathbf{E}\,|Z_m|^\gamma. \tag{12}$$

Следовательно, $K<\infty$, если последовательность моментов $\sigma_m^{-\gamma}\,\mathbf{E}\,|Z_m|^\gamma$ ограничена или растет не быстрее чем $O(m^{(\gamma-2)/2})$. Заметим, что, согласно неравенству Ляпунова, $\mathbf{E}\,\|\mathbb{D}_d^{-1/2}Z^{(d)}\|^\gamma \geqslant d^{\gamma/2}$.

Следующая теорема 3 была доказана в работе [5]. Она дает оценку снизу в условиях теорем 1 и 2.

Теорема 3. *Пусть положительные числа σ_m^2, $m=1,2,\dots$, удовлетворяют соотношениям*

$$\sigma_1^2 \geqslant \sigma_2^2 \geqslant \dots \geqslant \sigma_m^2 \geqslant \dots, \quad \text{и} \quad \sum_{m=1}^{\infty}\sigma_m^2 < \infty. \tag{13}$$

Пусть n – фиксированное натуральное число, а $\lambda>0$, причем $\sigma_1^2 \leqslant \lambda^2$. Обозначим

$$k = \min\{m : n\,\sigma_m^2 < \lambda^2\} - 1. \tag{14}$$

Тогда существует такой случайный вектор $Z=(Z_1,Z_2,\dots)$, принимающий значения в пространстве $\mathbf{H}$ и удовлетворяющий соотношениям (2)–(4), *что $\mathbf{E}\,\|Z\|^\gamma<\infty$ при всех $\gamma\geqslant 0$ и для любого построения справедлива оценка снизу*

$$\mathbf{E}\left(\Delta_n(X,Y)\right)^\gamma \gg_\gamma \mathbf{E}\left(\Delta_n(X^{(k)},Y^{(k)})\right)^\gamma + (nB_k^2)^{\gamma/2}. \tag{15}$$

При этом первое слагаемое в правой части неравенства (15) *считается равным нулю, если $k=0$.*

Основными результатами настоящей работы являются следующие теоремы 4 и 5. В них утверждается, что если последовательность собственных чисел σ_m^2 убывает медленно, то теоремы 1 и 2 дают оценки с правильным порядком точности аппроксимации.

Теорема 4. *Пусть* Z – $\mathbf{H}$*-значный случайный вектор с* $\mathbf{E}\,Z = 0$ *и* $\mathbf{E}\,\|Z\|^\gamma < \infty$ *при некотором* $\gamma > 2$. *Пусть* $F = \mathcal{L}(Z)$. *Предположим, что*

$$B_d^2 \asymp_F \varphi(d+1), \quad d = 0, 1, 2, \dots, \tag{16}$$

где невозрастающая функция $\varphi(x)$, $x \geqslant 1$, *удовлетворяет соотношению*

$$\varphi(x^\lambda) \asymp_{\lambda,F} \varphi(x) \quad \text{при всех} \quad \lambda > 1. \tag{17}$$

Предположим, что $\beta \geqslant 1$ *и*

$$K_\beta = \sup_{1 \leqslant d < \infty} d^{-\gamma\beta/2}\,\mathbf{E}\,\|\mathbb{D}_d^{-1/2} Z^{(d)}\|^\gamma < \infty. \tag{18}$$

Тогда существует такое построение, что

$$\mathbf{E}\left(\Delta_n(X,Y)\right)^\gamma \ll_{\gamma,\beta,F} (nB_n^2)^{\gamma/2}. \tag{19}$$

С другой стороны, существует случайный вектор $Z = (Z_1, Z_2, \dots)$, *принимающий значения в пространстве* $\mathbf{H}$, *удовлетворяющий соотношениям* (2)–(4) *и* $\mathbf{E}\,\|Z\|^\gamma < \infty$ *при всех* $\gamma \geqslant 0$ *и такой, что для любого построения справедлива оценка снизу*

$$\mathbf{E}\left(\Delta_n(X,Y)\right)^\gamma \gg_\gamma (nB_n^2)^{\gamma/2}. \tag{20}$$

Теорема 5. *Утверждение теоремы* 4 *останется справедливым, если условие* (18) *заменить на условие*

$$\sigma_d^2 \gg_{\beta,F} d^{-\beta}, \quad d = 1, 2, \dots, \tag{21}$$

при некотором $\beta \geqslant 1$.

Теорема 5 легко выводится из теоремы 4, поскольку из (10) и (21) следует выполнение условия (18). Однако условие (21) выражено в терминах собственных чисел σ_m^2, в то время как в условии (18) участвуют моменты векторов $\mathbb{D}_d^{-1/2} Z^{(d)}$. Условие (18) можно рассматривать как естественное обобщение условия (11). Отметим, что теорему 5 можно вывести непосредственно из теорем 2 и 3.

Замечание 1. Выполнение условия (21) не следует из (16) и (17).

Замечание 2. Правая часть неравенства (19) может не стремиться к нулю при $n \to \infty$. Чтобы удостовериться в том, что это неравенство дает содержательную оценку точности сильной аппроксимации в бесконечномерном принципе инвариантности, достаточно заметить, что неравенство (19) эквивалентно неравенству

$$\mathbf{E}\left(\Delta_n(X/\sqrt{N},Y/\sqrt{N})\right)^\gamma \ll_{\gamma,\beta,F} B_n^\gamma \underset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{22}$$

Замечание 3. Анализ доказательства теорем 4 и 5 показывает, что возможность получения правильных по порядку оценок основана на степенной зависимости констант от размерности в теоремах 1 и 2, которая в свою очередь связана со степенными оценками, полученными в работе [12]. Возможные уточнения зависимости констант от размерности в результатах работы [12] должны привести к улучшению порядка точности аппроксимации в теоремах 1 и 2.

Доказательство теоремы 4. Обозначим через $\lceil x\rceil$ целую часть числа x. Выберем

$$d = \lceil n^\varepsilon\rceil, \quad \text{где} \quad \varepsilon = \frac{\gamma-2}{\gamma\,(\gamma+\beta+22)} > 0. \tag{23}$$

Ясно, что тогда, в соответствии с (17), (23), справедливо соотношение

$$\varphi(d) \asymp_{\gamma,\beta,F} \varphi(n). \tag{24}$$

Пусть $g(y)=\varphi(e^y)$ при $y>0$. Тогда условие (17) можно переписать в виде

$$g(\lambda y) \asymp_{\lambda,F} g(y), \tag{25}$$

при всех $\lambda>1$. Применяя теорему П.5 из монографии [10, с. 94] к функции $g(y)$, легко показать, что из соотношения (25) следует, что существует такое $\mu>0$, что

$$g(y) \gg_F (y+1)^{-\mu}, \tag{26}$$

и, следовательно,

$$\varphi(x) \gg_F (\log^* x)^{-\mu}. \tag{27}$$

Пользуясь соотношениями (16), (23), (24) и (27), нетрудно проверить, что при достаточно большом n выполняется условие (6) и справедливо утверждение теоремы 1 с оценкой

$$\mathbf{E}\left(\Delta_n(X,Y)\right)^\gamma \ll_{\gamma,\beta,F} (nB_d^2)^{\gamma/2}. \tag{28}$$

Мы воспользовались тем, что величина ε в (23) выбрана настолько малой, что первые два слагаемых в правой части неравенства (7) мажорируются третьим слагаемым. В силу (16) и (24), из (28) следует оценка (19).

Легко показать, что, согласно (2)–(4),

$$\sigma_d^2 \leqslant B_0^2\, d^{-1}, \quad d = 1, 2, \dots. \tag{29}$$

Из неравенства (29) следует, что

$$k = \min\{m : n\, \sigma_m^2 < B_0^2\} - 1 \leqslant n. \tag{30}$$

Теперь последнее утверждение теоремы 4 вытекает из теоремы 3 с $\lambda = B_0$. В качестве Z_m (координат вектора Z) при применении теоремы 3 используются независимые случайные величины, принимающие значения $-B_0$, 0 и B_0 с вероятностями

$$\mathbf{P}\{Z_m = \pm B_0\} = \sigma_m^2/2B_0^2, \quad \mathbf{P}\{Z_m = 0\} = 1 - \sigma_m^2/B_0^2, \quad m = 1, 2, \dots. \tag{31}$$

Теорема 4 доказана.

Замечание 4. Условие (17) родственно условию медленного изменения функции φ:

$$\varphi(\lambda x)/\varphi(x) \underset{x\to\infty}{\to} 1 \quad \text{при всех} \quad \lambda > 1, \tag{32}$$

из которого следует, что

$$x^s\, \varphi(x) \underset{x\to\infty}{\to} \infty \quad \text{при всех} \quad s > 0 \tag{33}$$

(см. [10]). Заменяя условие (17) на условие (32) и пользуясь соотношением (33), можно доказать справедливость оценки (28) с d, определенным в (23). Последнее утверждение теоремы 4 по-прежнему вытекает из теоремы 3 с $\lambda = B_0$. Однако теперь соотношение $B_d \asymp_{\gamma,\beta,F} B_n$ может не выполняться. Например, если $\varphi(x) = \exp\big(-(\log^* x)^{1/2}\big)$.

Приведем несколько примеров распределений, удовлетворяющих условиям теоремы 5.

Пример 1. Пусть $\sigma_m^2 = 1/m\,(\log^* m)^{1+\tau}$ при $m = 1, 2, \dots$, где $\tau > 0$. Тогда справедливо утверждение теоремы 5 с оценкой

$$\mathbf{E}\,\big(\Delta_n(X,Y)\big)^\gamma \ll_{\gamma,\tau} (n/(\log^* n)^\tau)^{\gamma/2}. \tag{34}$$

Порядок этой оценки не может быть улучшен. Оценки снизу и сверху имеют одинаковый порядок $O\big((n/(\log^* n)^\tau)^{\gamma/2}\big)$, так что теорема 5 дает правильный порядок точности аппроксимации. Оценка (34) для этого примера была выписана для случая $\tau = 1$ в работе [5] и для произвольного $\tau > 0$ в английском переводе той же работы.

Пример 2. Пусть s – целое неотрицательное число и

$$\sigma_m^2 = \frac{1}{m \log^* m \log^* \log^* m \ \ldots \ \underbrace{\log^* \ldots \log^*}_{s \text{ раз}} m \left(\underbrace{\log^* \ldots \log^*}_{s+1 \text{ раз}} m\right)^{1+\tau}}$$

при $m = 1, 2, \ldots$, где $\tau > 0$. Тогда справедливо утверждение теоремы 5 с оптимальной по порядку оценкой

$$\mathbf{E}\left(\Delta_n(X,Y)\right)^\gamma \ll_{\gamma,\tau,s} (n/(\underbrace{\log^* \ldots \log^*}_{s+1 \text{ раз}} n)^\tau)^{\gamma/2}. \tag{35}$$

Аналогичные примеры получаются, если дисперсии координат σ_m^2 убывают еще медленнее, чем в примере 2. При этом порядок оценки может быть сделан сколь угодно близким к тривиальному порядку $O(n^{\gamma/2})$. С помощью примера 2 можно построить большое количество аналогичных примеров, домножая σ_m^2 на логарифмические множители более высоких порядков или на не очень быстро растущие функции от этих множителей.

Литература

1. А. А. Боровков, А. И. Саханенко, *Об оценках скорости сходимости в принципе инвариантности для банаховых пространств.* — Теория вероятн. и ее примен. **25** (1980), 734–744.
2. К. А. Боровков, *О скорости сходимости в принципе инвариантности для гильбертова пространства.* — Теория вероятн. и ее примен. **29** (1984), 532–535.
3. F. Götze, A. Yu. Zaitsev, *Bounds for the rate of strong approximation in the multidimensional invariance principle.* — Теория вероятн. и ее примен. **53** (2008), 100–123.
4. Ф. Гётце, А. Ю. Зайцев, *Точность аппроксимации в многомерном принципе инвариантности для сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов с конечными моментами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **368** (2009), 110–121.
5. Ф. Гётце, А. Ю. Зайцев, *Оценки точности сильной аппроксимации в гильбертовом пространстве.* — Сибирский матем. журнал **54** (2011), 4, 796–808.
6. H. P. Rosenthal, *On the subspaces of L_p ($p > 2$) spanned by sequences of independent random variables.* — Israel J. Math. **8** (1970), 273–303.
7. А. И. Саханенко, *Оценки в принципе инвариантности.* — В кн.: Труды инст. матем. СО АН СССР **5**, Наука, Новосибирск (1985), 27–44.
8. A. I. Sakhanenko, *Simple method of obtaining estimates in the invariance principle.* — Lect Notes Math. **1299** (1987), 430–443.

9. A. I. Sakhanenko, *A new way to obtain estimates in the invariance principle.* — In: High dimensional probability, II (Seattle, WA, 1999). Progr. Probab., **47**, Birkhäuser Boston, Boston, MA (2000), pp. 223–245.
10. Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции.* Наука, М., 1976.
11. A. Yu. Zaitsev, *Multidimensional version of the results of Komlós, Major, and Tusnády for vectors with finite exponential moments.* — ESAIM: Probability and Statistics **2** (1998), 41–108.
12. А. Ю. Зайцев, *Точность сильной гауссовской аппроксимации для сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **364** (2009), 148–165.

Zaitsev A. Yu. Optimal estimates for the rate of strong Gaussian approximation in the infinite dimensional invariance principle.

Estimates for the rate of strong Gaussian approximation in the invariance principle in the Hilbert space for sums of i.i.d. random vectors are derived. It is shown that they are optimal with respect to the order if the sequence of eigenvalues of the covariance operator of summands decreases slowly.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, Санкт-Петербург 191023
и С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр., 28,
Петродворец,
Санкт-Петербург 198504, Россия
E-mail: zaitsev@pdmi.ras.ru

Поступило 25 ноября 2011 г.