Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 396, 2011 г.

Ю. А. Давыдов

ЗАМЕЧАНИЕ О ЛОКАЛЬНО ПОСТОЯННЫХ САМОПОДОБНЫХ ПРОЦЕССАХ

§1. Введение

Пусть $X = \{X(t),\ t \in \mathbb{R}_+\}$ – самоподобный процесс с параметром $\alpha > 0$, то есть для любого $a > 0$ распределения процессов

$$\{X(at),\ t \in \mathbb{R}_+\} \quad \text{и} \quad \{a^\alpha X(t),\ t \in \mathbb{R}_+\}$$

одинаковы.

Мы будем интересоваться достаточными условиями абсолютной непрерывности маргинальных распределений X. Наш подход будет основан на методе суперструктуры, использовавшемся в [3] для изучения распределения супремума самоподобных процессов.

Здесь мы рассмотрим класс самоподобных процессов с локально постоянными реализациями. Будет показано, что распределение $X(1)$ абсолютно непрерывно, если

$$\mathbf{P}\{X(1) = 0\} = 0,$$

и указаны применения для супремума X и однородных функционалов от многомерного дробного броуновского движения.

Определение 1. *Пусть $X = \{X(t),\ t \in \mathbb{R}_+\}$ – случайный процесс со значениями в измеримом пространстве $\{E, \mathcal{E}\}$. Говорят, что X – локально постоянный, если для каждого $t > 0$ с вероятностью 1 существует ε такое, что*

$$X(s) = X(t) \quad \text{при всех} \quad s \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon).$$

Пример 1. Пусть $X(t) = \sup_{s \in [0,t]}\{B(s)\}$, где B – стандартное броуновское движение. Хорошо известно, что для каждого $t > 0$ с вероятностью 1 верно $B(t) < X(t)$. Из этого сразу следует, что X – локально постоянный процесс.

Ключевые слова: самоподобные процессы, абсолютная непрерывность, дробное броуновское движение.

§2. Основная теорема

Теорема 1. *Пусть* $X = \{X(t), \quad t > 0\}$ *– самоподобный локально постоянный cadlag-процесс со значениями из* $\mathbb{R}^1$. *Тогда распределение случайной величины* $X(1)$ *имеет следующую структуру:*

Оно может иметь атом в нуле 0 *(равный* $\mathbf{P}\{X(1) = 0\}$*) и является абсолютно непрерывным на* $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$.

Будем говорить, что X получен из стационарного в узком смысле процесса Y *преобразованием Ламперти*, и писать $X = L(Y)$, если

$$X(t) = t^\alpha Y(\log t), \quad t > 0.$$

Это преобразование является биекцией.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Если*

$$\mathbf{P}\{X(1) > 0\} > 0$$

и $X = L(Y)$, *где* Y *– эргодический стационарный случайный процесс в узком смысле, то распределение величины*

$$Z = \sup_{s \leqslant 1}\{X(s)\}$$

абсолютно непрерывно.

Действительно, из самоподобия X вытекает

$$p = \mathbf{P}\{\sup_{[0,1]} X(t) = 0\} = \mathbf{P}\{\sup_{[0,\infty)} X(t) \leqslant 0\} = \mathbf{P}\{\sup_{\mathbb{R}^1} Y(s) \leqslant 0\}.$$

Это значит, что с вероятностью p реализации Y остаются неположительными. Если $0 < p < 1$, последнее свойство может возникать, только если процесс Y не эргодический. В нашем случае единственно возможным будет значение $p = 0$. Так как процесс $Z(t) = \sup_{[0,t]} X(s)$ является самоподобным и локально постоянным, то из теоремы 1 следует абсолютная непрерывность распределения $Z(1)$.

Доказательство теоремы 1 основано на следующем факте (см. теоремы 5.1 и 5.2 в гл. 2 [1]).

Теорема 2. *Пусть* P *– вероятностная мера на польском пространстве* E. *Пусть вещественная функция* f *измерима на* E. *Предположим, что существует такое семейство отображений*

$$\{G_c,\, c \in [0, a)\}$$

пространства E, *что*

(1) $PG_c^{-1} \stackrel{\mathrm{var}}{\to} P$ *при* $c \to 0$;

(2) $G_c x \to x$ *по вероятности* P *при* $c \to 0$;

(3) *для* P*-почти всех* x *существует такое число* $\varepsilon_x > 0$, *что производная* $\varphi'_x(c)$ *функции* $\varphi_x(c) = f(G_c x)$ *существует и отлична от нуля для почти всех* $c \in [0, \varepsilon_x]$.

Тогда $Pf^{-1} \ll \lambda$.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим сначала случай

$$\mathbf{P}\{X(1) \neq 0\} = 1.$$

Пусть $D([0,\infty))$ обозначает пространство Скорохода cadlag-функций определенных на $[0,\infty)$. Используем теорему 2 в следующей ситуации:

$$E = D([0,\infty)), \quad f(x) = x(1), \quad x \in E,$$

$$G_c x(t) = \frac{x((1+c)t)}{(1+c)^\alpha}, \quad x \in E, \quad c \in [0,1], \quad t \geqslant 0.$$

Пусть P – распределение X в E.

Условие 1) теоремы 2 выполнено в силу самоподобия:

$$PG_c^{-1} = P \quad \text{при всех} \quad c.$$

Условие 2) тривиально вытекает из определения G_c.

Приступим к проверке условия 3). По свойству локального постоянства для P-почти всех x существует интервал $[0,\varepsilon_x)$ такой, что $x(c+1) \equiv \mathrm{const} \neq 0$ при всех $c \in [0,\varepsilon_x)$. Тогда для $c \in [0,\varepsilon_x)$

$$\varphi_x(c) = (1+c)^{-\alpha} x(1+c),$$

и

$$\varphi'_x(c) = -\alpha(1+c)^{-\alpha-1} x(1+c) \neq 0.$$

Итак, все условия теоремы 2 выполняются, что дает искомый результат.

В общем случае аргументы такие же в силу леммы 5.1 из [1]. □

§3. Приложения

Теперь мы рассмотрим приложение теоремы 1 к однородным функционалам от многомерного дробного броуновского движения (ДБД).

Определение 2. *ДБД в* $\mathbb{R}^d$ *– это* d*-мерный центрированный гауссовский самоподобный процесс* $X = \{X(t),\ t \in \mathbb{R}_+\}$ *такой, что для любого* $a \in \mathbb{R}^d$ *процесс*

$$t \to \langle X(t), a \rangle$$

является стандартным одномерным ДБД с точностью до константы $C(a)$ (с параметром $H \in (0,1)$, не зависящим от a).

Тогда $C^2(a) = \langle Qa, a\rangle$, где Q – ковариационная матрица случайного вектора $X(1)$, и

$$K_a(t,s) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}\langle X(t), a\rangle\langle X(s), a\rangle = \langle Qa, a\rangle \frac{1}{2}[t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}].$$

Ясно, что X имеет непрерывную версию, с которой далее мы и будем работать.

Рассмотрим *выпуклую оболочку* процесса X:

$$V(t) = \operatorname{conv}\{X(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant t\}, \quad t \geqslant 0.$$

Это процесс со значениями в пространстве $\mathcal{K}_d$ выпуклых компактных подмножеств $\mathbb{R}^d$.

Определение 3. *Функция $f : [0,1] \to \mathcal{K}_d$ называется возрастающей, если $f(t) \subset f(s)$ для $0 \leqslant t < s \leqslant 1$.*

Функция $f : [0,1] \to \mathcal{K}_d$ называется канторовской лестницей, если f непрерывна, возрастает и такова, что для почти всех $t \in [0,1]$ существует интервал $(t-\varepsilon, t-\varepsilon)$, где f постоянна.

Понятно, что процесс V непрерывен п.н., возрастает и самоподобен с параметром $H \in [0,1]$.

Следующая теорема обобщает результат [4], установленный для d-мерного броуновского движения.

Теорема 3 (см. [2]). *Пусть случайный вектор $X(1)$ невырожден. Тогда*

(1) *с вероятностью 1 точка 0 внутренняя для множества $V(t)$ для всех $t > 0$;*
(2) *для каждого $t > 0$ с вероятностью 1 точка $X(t)$ внутренняя для множества $V(t)$;*
(3) *с вероятностью 1 траектории процесса $t \to V(t)$ являются канторовскими лестницами.*

Приложение к однородным функционалам.

Пусть $f : \mathcal{K}^d \to \mathbb{R}^1$ – непрерывная однородная функция порядка $p > 0$, т.е.

$$f(cA) = c^p f(A) \text{ при всех } \quad c \geqslant 0,\ A \in \mathcal{K}^d.$$

Теорема 4. *Пусть f – функция с описанными выше свойствами. Предположим, что* $\mathbf{P}\{f(V(1)) \neq 0\} = 1$. *Тогда распределение* $f(V(1))$ *имеет плотность.*

Замечание 1. Эта теорема содержит полезную информацию о структуре распределения всех основных геометрических характеристик $V(1)$ таких как объем, поверхностная мера, диаметр, и т.д.

Замечание 2. Если f положительна и возрастает ($f(A) \leqslant f(B)$ для $A \subset B$), то почти все траектории процесса $t \to f(V(t))$, $t \geqslant 0$, суть вещественные канторовские лестницы.

Доказательство теоремы 4. Процесс $\{f(V(t)),\ t \in \mathbb{R}_+\}$ наследует самоподобие и, в силу пункта 3) теоремы 3, будет локально постоянным. Применяя теорему 1, получим искомый результат. $\square$

Литература

1. Yu. Davydov, M. Lifshits, and N. Smorodina, *Local properties of distributions of stochastic functionals.* AMS (1998).
2. Yu. Davydov, *On convex hull of d-dimensional fractional Brownian motion.* — Statist. Probab. Letters **82** (2012), 37–39.
3. Ю. А. Давыдов, *Об абсолютной непрерывности образов мер.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **142** (1985), 48–54.
4. S. N. Evans, *On the Hausdorff dimension of Brownian cone points.* — Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **98** (1985), 343–353.

Davydov Yu. A. Remark on locally constant self-similar processes.

Let $X = \{X(t),\ t \in \mathbb{R}_+\}$ be a self-similar process with index $\alpha > 0$. We show that if X is locally constant, and if $\mathbf{P}\{X(1) = 0\} = 0$, then the law of $X(t)$ is absolutely continuous. The applications of this result to homogeneous functionals of a multi-dimensional fractional Brownian motion are discussed.

Laboratoire P. Painlevé,
University of Lille 1,
59655, Villeneuve d'Ascq, France
E-mail: youri.davydov@univ-lille1.fr

Поступило 19 октября 2011 г.