Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 396, 2011 г.

А. Н. Бородин

СОВМЕСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИНФИМУМА, СУПРЕМУМА И КОНЕЧНОГО ЗНАЧЕНИЯ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ СО СКАЧКАМИ

§1. Скачкообразная диффузия

Настоящая работа продолжает исследование, проведенное в [1], где разработаны методы вычисления распределений функционалов от мостов диффузионных скачкообразных процессов. Впервые метод вычисления распределений функционалов от броуновского моста был предложен М. Кацем в [2]. Для процессов с независимыми приращениями задача о вычислении распределений функционалов изучалась в монографии А. В. Скорохода [3]. Явные формулы для распределения супремума процесса, являющегося суммой броуновского процесса с линейным сносом и сложного пуассоновского с экспоненциально распределенными скачками нашел Мордецкий [4]. Совместное распределение инфимума и супремума для такого процесса с нулевым сносом впервые, по-видимому, получено в [5].

Опишем класс диффузий со скачками. Пусть τ_k, $k = 1, 2, \dots,$ – независимые экспоненциально распределенные с параметром λ_1 случайные величины, $\mathbf{P}(\tau_k \geqslant t) = e^{-\lambda_1 t}$. Пусть Y_k, $k = 1, 2, \dots,$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, не зависящие от моментов τ_k, $k = 1, 2, \dots$. Рассмотрим однородную диффузию X, которая является решением стохастического дифференциального уравнения: с вероятностью единица для любых $s \leqslant t \leqslant T$

$$X(t) = X(s) + \int\limits_s^t \mu(X(u))\,du + \int\limits_s^t \sigma(X(u))\,dW(u), \tag{1.1}$$

где $\mu(x)$, $\sigma(x)$ являются дифференцируемыми функциями с ограниченными производными. Пусть $\sigma(x) > 0$ для всех $x \in \mathbf{R}$ и $X(0) = x$.

Ключевые слова: инфимум, супремум, совместное броуновское движение.

Работа поддержана грантами РФФИ-ННИО 09-01-91331, НШ 4472.2010.1 и Программой фундаментальных исследований РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

Скачкообразная диффузия, обозначим ее J, определяется следующим образом. Предположим, что броуновское движение W не зависит от величин τ_k и Y_k, $k = 1, 2, \ldots$. Для $\tau_0 := 0 \leqslant t \leqslant \tau_1$ полагаем $J(t) = X(t)$, а для $\sum_{k=1}^{l} \tau_k \leqslant t < \sum_{k=1}^{l+1} \tau_k$, $l = 1, 2, \ldots$, определяем J как решение стохастического дифференциального уравнения

$$J(t) = \rho\Big(J\Big(\sum_{k=1}^{l}\tau_k -\Big), Y_l\Big) + \int\limits_{\sum_{k=1}^{l}\tau_k}^{t} \mu(J(u))\,du + \int\limits_{\sum_{k=1}^{l}\tau_k}^{t} \sigma(J(u))\,dW(u), \quad (1.2)$$

где $\rho(x, y)$ – некоторая функция, которая является кусочно непрерывной по переменной x. В момент $\sum_{k=1}^{l} \tau_k$ скачкообразная диффузия J начинается заново как обычная диффузия X, выходящая из точки $\rho\big(J\big(\sum_{k=1}^{l} \tau_k -\big), Y_l\big)$. Здесь полагаем $q- = \lim_{s \uparrow q} s$.

Пусть τ – не зависящий от процесса $\{J(t),\ t \geqslant 0\}$ экспоненциально распределенный с параметром $\lambda > 0$ случайный момент времени.

Обозначим $\mathbf{P}_x$ и $\mathbf{E}_x$ вероятность и математическое ожидание по процессу J при условии $J(0) = x$. В дальнейшем для краткости будем использовать обозначение $\mathbf{E}\{\xi;\, A\} := \mathbf{E}\{\xi \mathbb{1}_A\}$.

В работе [1] показано, что ключевым для вычисления совместных распределений интегральных функционалов и функционалов инфимума и супремума от моста диффузионного процесса со скачками является следующий результат.

Теорема 1.1. *Пусть $f(x)$, $x \in [a, b]$, – кусочно непрерывная функция. Предположим, что $f \geqslant 0$. Тогда функция*

$$G_y(x) := \frac{d}{dy}\mathbf{E}_x\bigg\{ \exp\bigg(-\int\limits_0^{\tau} f(J(s))\,ds\bigg);\ a \leqslant \inf_{0 \leqslant s \leqslant \tau} J(s),$$

$$\sup_{0 \leqslant s \leqslant \tau} J(s) \leqslant b,\ J(\tau) < y\bigg\} \quad (1.3)$$

существует и является единственным ограниченным решением уравнения

$$G_y(x) = G_y^{\lambda,\lambda_1}(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z^{\lambda_1,\lambda}(x)\, \mathbf{E} G_y(\rho(z, Y_1))\, dz, \qquad (1.4)$$

где $G_y^{\alpha,\beta}(x)$ *– единственное непрерывное решение задачи*

$$\frac{\sigma^2(x)}{2} G''(x) + \mu(x) G'(x) - (\alpha + \beta + f(x)) G(x) = 0, \quad x \in (a, b) \setminus \{y\}, \quad (1.5)$$

$$G'(y+0) - G'(y-0) = -2\alpha/\sigma^2(y), \qquad (1.6)$$

$$G(a) = 0, \quad G(b) = 0. \qquad (1.7)$$

Полагаем $G_y^{\alpha,\beta}(x) = 0$ *при* $x \notin (a, b)$ *или* $y \notin (a, b)$.

Замечание 1.1. Функция $G_y^{\lambda,\lambda_1}(x)$, $x \in (a, b)$, имеет следующее вероятностное представление

$$G_y^{\lambda,\lambda_1}(x) = \frac{d}{dy} \mathbf{E}_x \biggl\{ \exp\biggl(- \int\limits_0^{\tau} (\lambda_1 + f(X(s)))\, ds \biggr);$$

$$a \leqslant \inf_{0 \leqslant s \leqslant \tau} X(s),\ \sup_{0 \leqslant s \leqslant \tau} X(s) \leqslant b,\ X(\tau) < y \biggr\}.$$

Функция $G_y^{\lambda_1,\lambda}(x)$, $x \in (a, b)$, имеет такое же представление с заменой λ_1 на λ и τ на τ_1.

§2. Вспомогательные результаты

Обозначим при $x, y \in (a, b)$

$$D_x^q(y) = D_y^q(x) := \frac{\operatorname{ch}((b - a - |y - x|)q) - \operatorname{ch}((b + a - y - x)q)}{q \operatorname{sh}((b - a)q)}. \qquad (2.1)$$

При $x \notin (a, b)$ либо $y \notin (a, b)$ полагаем $D_x^q(y) = D_y^q(x) = 0$.

Эта функция является решением следующей задачи

$$D''(x) - q^2 D(x) = 0, \quad x \in (a, b) \setminus \{y\}, \qquad (2.2)$$

$$D'(y+0) - D'(y-0) = -2, \qquad (2.3)$$

$$D(a) = 0, \quad D(b) = 0. \qquad (2.4)$$

Заметим, что функция $\alpha D_y^q(x)$ будет решением такой же задачи, только скачок производной в (2.3) будет равен -2α.

Для дальнейших вычислений нам понадобятся вспомогательные формулы:

$$\int_a^b e^{-p|z-v|-q|y-v|}\,dv = \frac{2(pe^{-q|y-z|} - qe^{-p|y-z|})}{p^2-q^2}$$
$$-\frac{e^{-p(z-a)-q(y-a)} + e^{-p(b-z)-q(b-y)}}{p+q}, \qquad (2.5)$$

$$\int_a^b e^{-p|z-v|+q|y-v|}\,dv = \frac{2(pe^{q|y-z|} + qe^{-p|y-z|})}{p^2-q^2}$$
$$-\frac{e^{-p(z-a)+q(y-a)} + e^{-p(b-z)+q(b-y)}}{p-q}, \qquad (2.6)$$

$$\int_a^b e^{-p|z-v|}\frac{\operatorname{sh}((v-a)q)}{\operatorname{sh}((b-a)q)}\,dv = \frac{2p\operatorname{sh}((z-a)q) + qe^{-p(z-a)}}{(p^2-q^2)\operatorname{sh}((b-a)q)}$$
$$-\frac{e^{-p(b-z)}(q\operatorname{cth}((b-a)q)+p)}{p^2-q^2}, \qquad (2.7)$$

$$\int_a^b e^{-p|z-v|}\frac{\operatorname{sh}((b-v)q)}{\operatorname{sh}((b-a)q)}\,dv = \frac{2p\operatorname{sh}((b-z)q) + qe^{-p(b-z)}}{(p^2-q^2)\operatorname{sh}((b-a)q)}$$
$$-\frac{e^{-p(z-a)}(p+q\operatorname{cth}((b-a)q))}{p^2-q^2}. \qquad (2.8)$$

Из формул (2.5)–(2.8) можно вывести следующее равенство

$$\int_a^b e^{-p|z-v|}D_y^q(v)\,dv = \frac{2}{p^2-q^2}\Big\{pD_y^q(z) - e^{-p|z-y|}$$
$$+e^{-p(z-a)}\frac{\operatorname{sh}((b-y)q)}{\operatorname{sh}((b-a)q)} + e^{-p(b-z)}\frac{\operatorname{sh}((y-a)q)}{\operatorname{sh}((b-a)q)}\Big\}. \qquad (2.9)$$

Как следствие из этого равенства при $z = a$ и $z = b$ получаем, что для $a \leqslant y \leqslant b$ выполняется равенство

$$\int\limits_a^b e^{pv} D_y^q(v)\,dv$$

$$= -\frac{2}{p^2 - q^2}\biggl(e^{py} - \frac{e^{pa}\,\mathrm{sh}((b-y)q) + e^{pb}\,\mathrm{sh}((y-a)q)}{\mathrm{sh}((b-a)q)}\biggr). \qquad (2.10)$$

Из (2.10) следует, что

$$\int\limits_a^b \mathrm{sh}((v-\delta)p) D_y^q(v)\,dv = -\frac{2}{p^2 - q^2}\biggl(\mathrm{sh}((y-\delta)p)$$

$$-\frac{\mathrm{sh}((a-\delta)p)\,\mathrm{sh}((b-y)q) + \mathrm{sh}((b-\delta)p)\,\mathrm{sh}((y-a)q)}{\mathrm{sh}((b-a)q)}\biggr). \qquad (2.11)$$

Справедливость формул (2.9)–(2.11) может быть также проверена следующим образом. Очевидно, что $D_y(x)$ является функцией Грина соответствующей дифференциальной задачи, т.е. для любой функции $\Psi(x)$ функция

$$U(x) := \int\limits_a^b D_x^q(y)\,\Psi(y)\,dy, \quad x \in [a,b],$$

является единственным решением задачи

$$\begin{aligned} &U''(x) - q^2 U(x) = -2\Psi(x), \quad x \in (a,b),\\ &U(a) = 0, \quad U(b) = 0. \end{aligned}$$

Решая эту задачу для $\Psi(x) = e^{px}$, получаем (2.10), решая задачу для $\Psi(x) = \mathrm{sh}((x-\delta)p)$, получаем (2.11). Немного сложнее найти решение задачи для $\Psi(x) = e^{-p|x-z|}$, из которого следует (2.9).

§3. Броуновское движение со скачками

Пусть $X = \sigma W$ – броуновское движение с дисперсией σ^2 в единичный момент времени. Рассмотрим процесс

$$J^{(0)}(t) = \sigma W(t) + \sum_{k=1}^{N(\lambda_1 t)} Y_k,$$

где $N(t)$, $t \geqslant 0$, – пуассоновский процесс с параметром 1, а Y_k, $k = 1, 2, \ldots$, – независимые одинаково распределенные величины. Предполагается, что броуновское движение, пуассоновский процесс и величины $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ не зависят между собой. Процесс $J^{(0)}$ – сумма броуновского движения и сложного пуассоновского процесса с интенсивностью $\lambda_1 > 0$. Процесс $J^{(0)}$ имеет независимые приращения.

Пусть τ – независимый от процесса $\{J^{\circ}(s), s \geqslant 0\}$ и величин Y_k, $k = 1, 2, \ldots$, экспоненциально распределенный с параметром $\lambda > 0$ момент времени.

Предположим, что плотность распределения величин Y_k, $k = 1, 2, \ldots$, имеет вид

$$\frac{d}{dy}\mathbf{P}(Y_1 < y) = \frac{1}{2}\eta e^{-\eta|y|}, \quad \eta > 0.$$

В этом случае $J^{(0)}(t)$ является симметричным случайным процессом ($-J^{(0)}(t)$ распределен так же как $J^{(0)}(t)$).

Вид плотности величин Y_k обусловлен тем, что для броуновского процесса функция $G_y^{\alpha,\beta}(x)$, $x \in \mathbf{R}$, в теореме 1.1 выражается через экспоненты, и это позволяет решить интегральное уравнение (1.4).

Вычислим совместное распределение величин

$$\inf_{0\leqslant s\leqslant\tau} J^{\circ}(s), \quad \sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} J^{\circ}(s) \quad \text{и} \quad J^{\circ}(\tau).$$

Напомним, что рассмотрение момента τ соответствует преобразованию Лапласа по времени t от соответствующего выражения. Для того, чтобы получить выражение в фиксированный момент времени t, нужно в соответствующей формуле, деленной на λ, обратить преобразование Лапласа по λ.

Во многих примерах, касающихся броуновского движения с экспоненциально распределенными скачками, следующее алгебраическое уравнение

$$\frac{\eta^2}{(\eta^2 - \rho^2)} \frac{2\lambda_1}{(2\lambda + 2\lambda_1 - \sigma^2\rho^2)} = 1 \tag{3.1}$$

играет важную роль. Это уравнение эквивалентно уравнению

$$\frac{\sigma^2\rho^2}{2} + \frac{\lambda_1\rho^2}{\eta^2 - \rho^2} = \lambda, \tag{3.2}$$

чьи положительные корни имеют вид

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{\lambda + \lambda_1}{\sigma^2} + \frac{\eta^2}{2} - \Bigl(\Bigl(\frac{\lambda + \lambda_1}{\sigma^2} + \frac{\eta^2}{2}\Bigr)^2 - \frac{2\lambda\eta^2}{\sigma^2}\Bigr)^{1/2}} \tag{3.3}$$

и

$$\rho_2 = \sqrt{\frac{\lambda+\lambda_1}{\sigma^2} + \frac{\eta^2}{2} + \left(\left(\frac{\lambda+\lambda_1}{\sigma^2} + \frac{\eta^2}{2}\right)^2 - \frac{2\lambda\eta^2}{\sigma^2}\right)^{1/2}}. \qquad (3.4)$$

Нетрудно проверить, что $0 < \rho_1 < \eta < \rho_2$ и $\rho_1^2\rho_2^2 = 2\lambda\eta^2/\sigma^2$.

Так для переходной плотности броуновского движения со скачками справедливо (см. формулу (3.6) из [1]) следующее выражение

$$\frac{d}{dy}\mathbf{P}_x\big(J^{(0)}(\tau) < y\big)$$
$$= \frac{\lambda(\eta^2-\rho_1^2)}{\sigma^2(\rho_2^2-\rho_1^2)\rho_1}e^{-|x-y|\rho_1} + \frac{\lambda(\rho_2^2-\eta^2)}{\sigma^2(\rho_2^2-\rho_1^2)\rho_2}e^{-|x-y|\rho_2}. \qquad (3.5)$$

Теорема 3.1. *Пусть*

$$L_- = -\left(\frac{\rho_1 \operatorname{cth}((b-a)\rho_1/2)+\eta}{\eta^2-\rho_1^2} + \frac{\rho_2 \operatorname{cth}((b-a)\rho_2/2)+\eta}{\rho_2^2-\eta^2}\right)^{-1}, \qquad (3.6)$$

$$L_+ = \left(\frac{\rho_1 \operatorname{th}((b-a)\rho_1/2)+\eta}{\eta^2-\rho_1^2} + \frac{\rho_2 \operatorname{th}((b-a)\rho_2/2)+\eta}{\rho_2^2-\eta^2}\right)^{-1}. \qquad (3.7)$$

Тогда при $x, y \in (a,b)$

$$\frac{d}{dy}\mathbf{P}_x\Big(a \leqslant \inf_{0\leqslant s\leqslant\tau} J^\circ(s), \sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} J^\circ(s) \leqslant b, J^\circ(\tau) < y\Big) \qquad (3.8)$$

$$= \frac{\lambda(\eta^2-\rho_1^2)}{\sigma^2(\rho_2^2-\rho_1^2)}D_y^{\rho_1}(x) + \frac{\lambda(\rho_2^2-\eta^2)}{\sigma^2(\rho_2^2-\rho_1^2)}D_y^{\rho_2}(x)$$
$$+\frac{\lambda(L_++L_-)}{\sigma^2(\rho_2^2-\rho_1^2)}\Big(\frac{\operatorname{sh}((b-y)\rho_2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2)} - \frac{\operatorname{sh}((b-y)\rho_1)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_1)}\Big)\Big(\frac{\operatorname{sh}((x-a)\rho_2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2)} - \frac{\operatorname{sh}((x-a)\rho_1)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_1)}\Big)$$
$$+\frac{\lambda(L_+-L_-)}{\sigma^2(\rho_2^2-\rho_1^2)}\Big(\frac{\operatorname{sh}((y-a)\rho_2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2)} - \frac{\operatorname{sh}((y-a)\rho_1)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_1)}\Big)\Big(\frac{\operatorname{sh}((x-a)\rho_2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2)} - \frac{\operatorname{sh}((x-a)\rho_1)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_1)}\Big)$$
$$+\frac{\lambda(L_++L_-)}{\sigma^2(\rho_2^2-\rho_1^2)}\Big(\frac{\operatorname{sh}((y-a)\rho_2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2)} - \frac{\operatorname{sh}((y-a)\rho_1)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_1)}\Big)\Big(\frac{\operatorname{sh}((b-x)\rho_2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2)} - \frac{\operatorname{sh}((b-x)\rho_1)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_1)}\Big)$$
$$+\frac{\lambda(L_+-L_-)}{\sigma^2(\rho_2^2-\rho_1^2)}\Big(\frac{\operatorname{sh}((b-y)\rho_2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2)} - \frac{\operatorname{sh}((b-y)\rho_1)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_1)}\Big)\Big(\frac{\operatorname{sh}((b-x)\rho_2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2)} - \frac{\operatorname{sh}((b-x)\rho_1)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_1)}\Big).$$

Рассмотрим частные случаи формулы (3.8). Устремим $a \to -\infty$, тогда

$$L_+ \to \left(\frac{\rho_1+\eta}{\eta^2-\rho_1^2} + \frac{\rho_2+\eta}{\rho_2^2-\eta^2}\right)^{-1} = \frac{(\rho_2-\eta)(\eta-\rho_1)}{\rho_2-\rho_1},$$
$$L_- \to -\frac{(\rho_2-\eta)(\eta-\rho_1)}{\rho_2-\rho_1}.$$

Переходя в (3.8) к пределу при $a \to -\infty$, получаем следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Совместное распределение максимума процесса* J° *и его конечного значения задается формулой*

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dy}\mathbf{P}_x\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} J^\circ(s)\leqslant b, J^\circ(\tau)<y\Big)\\ &=\frac{\lambda(\eta^2-\rho_1^2)}{\sigma^2(\rho_2^2-\rho_1^2)\rho_1}\big(e^{-|x-y|\rho_1}-e^{-(2b-x-y)\rho_1}\big)\\ &+\frac{\lambda(\rho_2^2-\eta^2)}{\sigma^2(\rho_2^2-\rho_1^2)\rho_2}\big(e^{-|x-y|\rho_2}-e^{-(2b-x-y)\rho_2}\big)\\ &+\frac{2\lambda(\rho_2-\eta)(\eta-\rho_1)}{\sigma^2(\rho_2^2-\rho_1^2)(\rho_2-\rho_1)}\big(e^{-(b-y)\rho_2}-e^{-(b-y)\rho_1}\big)\big(e^{-(b-x)\rho_2}-e^{-(b-x)\rho_1}\big). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Аналогично переходя в (3.8) к пределу при $b \to \infty$, получаем следующий результат.

Теорема 3.3. *Совместное распределение минимума процесса* J° *и его конечного значения задается формулой*

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dy}\mathbf{P}_x\Big(a\leqslant \inf_{0\leqslant s\leqslant\tau} J^\circ(s), J^\circ(\tau)<y\Big)\\ &=\frac{\lambda(\eta^2-\rho_1^2)}{\sigma^2(\rho_2^2-\rho_1^2)\rho_1}\big(e^{-|x-y|\rho_1}-e^{-(x+y-2a)\rho_1}\big)\\ &+\frac{\lambda(\rho_2^2-\eta^2)}{\sigma^2(\rho_2^2-\rho_1^2)\rho_2}\big(e^{-|x-y|\rho_2}-e^{-(x+y-2a)\rho_2}\big)\\ &+\frac{2\lambda(\rho_2-\eta)(\eta-\rho_1)}{\sigma^2(\rho_2^2-\rho_1^2)(\rho_2-\rho_1)}\big(e^{-(y-a)\rho_2}-e^{-(y-a)\rho_1}\big)\big(e^{-(x-a)\rho_2}-e^{-(x-a)\rho_1}\big). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Интегрируя (3.8) по $y \in (a, b)$, получаем формулу

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}_x\Big(a \leqslant \inf_{0\leqslant s\leqslant\tau} J^\circ(s), \sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} J^\circ(s) \leqslant b\Big)\\
&= 1 - \frac{2\lambda(\eta^2-\rho_1^2)}{\sigma^2(\rho_2^2-\rho_1^2)\rho_1^2}\frac{\mathrm{ch}((b+a-2x)\rho_1/2)}{\mathrm{ch}((b-a)\rho_1/2)}\\
&- \frac{2\lambda(\rho_2^2-\eta^2)}{\sigma^2(\rho_2^2-\rho_1^2)\rho_2^2}\frac{\mathrm{ch}((b+a-2x)\rho_2/2)}{\mathrm{ch}((b-a)\rho_2/2)}\\
&+ \frac{2\lambda L_+}{\sigma^2(\rho_2^2-\rho_1^2)}\Big(\frac{\mathrm{th}((b-a)\rho_2/2)}{\rho_2} - \frac{\mathrm{th}((b-a)\rho_1/2)}{\rho_1}\Big)\\
&\times\Big(\frac{\mathrm{ch}((b+a-2x)\rho_2/2)}{\mathrm{ch}((b-a)\rho_2/2)} - \frac{\mathrm{ch}((b+a-2x)\rho_1/2)}{\mathrm{ch}((b-a)\rho_1/2)}\Big).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Эта формула совпадает с формулой (4.15) работы [5].

Доказательство теоремы 3.1. Применим теорему 1.1 для вычисления выражения (3.8) при $\sigma(x)\equiv\sigma$, $\mu(x)\equiv 0$, $f(x)\equiv 0$ и $\rho(x,y) = x+y$.

Согласно этому результату функция

$$G_y(x) := \frac{d}{dy}\mathbf{P}_x\Big(a \leqslant \inf_{0\leqslant s\leqslant\tau} J^\circ(s), \sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} J^\circ(s) \leqslant b, J^\circ(\tau) < y\Big)$$

является единственным ограниченным решением уравнения

$$G_y(x) = G_y^{\lambda,\lambda_1}(x) + \int_{-\infty}^{\infty} G_z^{\lambda_1,\lambda}(x)\mathbf{E}G_y(z+Y_1)dz, \tag{3.12}$$

где $G_z^{\alpha,\beta}(x)$ – единственное непрерывное решение задачи

$$\frac{1}{2}\sigma^2 G''(x) - (\alpha+\beta)G(x) = 0, \quad x\in(a,b)\setminus\{z\}, \tag{3.13}$$

$$G'(z+0) - G'(z-0) = -2\alpha/\sigma^2, \tag{3.14}$$

$$G(a) = 0, \quad G(b) = 0. \tag{3.15}$$

Полагаем $G_z^{\alpha,\beta}(x) = 0$ при $x\notin(a,b)$ или $y\notin(a,b)$.

Обозначим $\Upsilon := \sqrt{2\lambda+2\lambda_1}/\sigma$. Решение задачи (3.13)–(3.15) при $\alpha=\lambda_1$, $\beta=\lambda$, имеет вид

$$G_y^{\lambda_1,\lambda}(x) = \frac{\lambda_1}{\sigma^2}D_y^\Upsilon(x). \tag{3.16}$$

В силу (3.16), ядро интегрального уравнения (3.12) состоит из экспоненциальных функций. Есть надежда на то, что решение интегрального уравнения (3.12) можно найти в виде суммы экспонент. Поскольку функции типа (3.16) не дифференцируемы в точке y, то одну из экспонент естественно взять с показателем $|y-x|$. Поэтому при $x \in (a,b)$ решение (3.12) будем искать в виде

$$\begin{aligned} G_y(x) := \sum_{l=1}^{2} \Big(C_l\, D_y^{q_l}(x) + A(-1)^l \frac{\operatorname{sh}((x-a)q_l)}{\operatorname{sh}((b-a)q_l)} \\ + B(-1)^l \frac{\operatorname{sh}((b-x)q_l)}{\operatorname{sh}((b-a)q_l)}\Big), \end{aligned} \tag{3.17}$$

где C_l, A, B, q_l, $l=1,2,$ – некоторые константы. В этом представлении мы учли, что $G_y(a)=0$ и $G_y(b)=0$.

Наряду с равенствами (2.9)–(2.11) нам понадобится еще одно важное вспомогательное равенство. Если в (3.12) положить $Y_1 \equiv 0$, то (3.12) превращается в следующую формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_z^{\lambda_1,\lambda}(x)\, G_y^{\lambda,0}(z)dz = G_y^{\lambda,0}(x) - G_y^{\lambda,\lambda_1}(x). \tag{3.18}$$

Используя равенство (3.16), преобразуем (3.18) следующим образом: для любых неотрицательных p и q

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_z^{p}(x)\, D_y^{q}(z)\, dz = \frac{2}{p^2-q^2}\big(D_y^{q}(x) - D_y^{p}(x)\big). \tag{3.19}$$

Вычислим $\mathbf{E}G_y(z+Y_1)$ используя (2.7), (2.8) и (2.9):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}G_y(z+Y_1) = \frac{\eta}{2}\int_a^b e^{-\eta|z-v|}G_y(v)\,dv = \sum_{l=1}^{2} C_l\Big(\frac{\eta^2 D_y^{q_l}(z)}{\eta^2-q_l^2} - \frac{\eta e^{-\eta|z-y|}}{\eta^2-q_l^2} \\ + \frac{\eta e^{-\eta(z-a)}\operatorname{sh}((b-y)q_l)}{(\eta^2-q_l^2)\operatorname{sh}((b-a)q_l)} + \frac{\eta e^{-\eta(b-z)}\operatorname{sh}((y-a)q_l))}{(\eta^2-q_l^2)\operatorname{sh}((b-a)q_l)}\Big) \\ + \frac{A\eta}{2}\sum_{l=1}^{2}(-1)^l\Big(\frac{2\eta\operatorname{sh}((z-a)q_l) + q_l e^{-\eta(z-a)}}{(\eta^2-q_l^2)\operatorname{sh}((b-a)q_l)} - \frac{e^{-\eta(b-z)}(q_l\operatorname{cth}((b-a)q_l)+\eta)}{\eta^2-q_l^2}\Big) \\ + \frac{B\eta}{2}\sum_{l=1}^{2}(-1)^l\Big(\frac{2\eta\operatorname{sh}((b-z)q_l) + q_l e^{-\eta(b-z)}}{(\eta^2-q_l^2)\operatorname{sh}((b-a)q_l)} - \frac{e^{-\eta(z-a)}(\eta+q_l\operatorname{cth}((b-a)q_l))}{\eta^2-q_l^2}\Big), \end{aligned}$$

или

$$\mathbf{E}G_y(z+Y_1)=\sum_{l=1}^{2}\frac{C_l\eta^2 D_y^{q_l}(z)}{\eta^2-q_l^2}-\eta e^{-\eta|z-y|}\sum_{l=1}^{2}\frac{C_l}{\eta^2-q_l^2}$$
$$+A\eta^2\sum_{l=1}^{2}\frac{(-1)^l\operatorname{sh}((z-a)q_l)}{(\eta^2-q_l^2)\operatorname{sh}((b-a)q_l)}+B\eta^2\sum_{l=1}^{2}\frac{(-1)^l\operatorname{sh}((b-z)q_l)}{(\eta^2-q_l^2)\operatorname{sh}((b-a)q_l)}$$
$$+\eta e^{-\eta(z-a)}\Big\{\sum_{l=1}^{2}\frac{C_l\operatorname{sh}((b-y)q_l)}{(\eta^2-q_l^2)\operatorname{sh}((b-a)q_l)}+\frac{A}{2}\sum_{l=1}^{2}\frac{(-1)^l q_l}{(\eta^2-q_l^2)\operatorname{sh}((b-a)q_l)}$$
$$-\frac{B}{2}\sum_{l=1}^{2}\frac{(-1)^l(\eta+q_l\operatorname{cth}((b-a)q_l))}{\eta^2-q_l^2}\Big\}$$
$$+\eta e^{-\eta(b-z)}\Big\{\sum_{l=1}^{2}\frac{C_l\operatorname{sh}((y-a)q_l)}{(\eta^2-q_l^2)\operatorname{sh}((b-a)q_l)}+\frac{B}{2}\sum_{l=1}^{2}\frac{(-1)^l q_l}{(\eta^2-q_l^2)\operatorname{sh}((b-a)q_l)}$$
$$-\frac{A}{2}\sum_{l=1}^{2}\frac{(-1)^l(q_l\operatorname{cth}((b-a)q_l)+\eta)}{\eta^2-q_l^2}\Big)\Big\}. \tag{3.20}$$

Следующий этап состоит в вычислении выражения для

$$\int_a^b G_z^{\lambda_1,\lambda}(x)\mathbf{E}G_y(z+Y_1)dz.$$

Применяя формулы (2.7), (2.8), (2.9)–(2.11), формулу (3.19) и выражение (3.20), можно получить, что

$$\int_a^b G_z^{\lambda_1,\lambda}(x)\mathbf{E}G_y(z+Y_1)\,dz=\frac{\lambda_1}{\sigma^2}\int_a^b D_z^{\Upsilon}(x)\mathbf{E}G_y(z+Y_1)\,dz$$
$$=\frac{\lambda_1}{\sigma^2}\int_a^b D_z^{\Upsilon}(x)\sum_{l=1}^{2}\frac{C_l\eta^2}{\eta^2-q_l^2}D_y^{q_l}(z)\,dz$$
$$-\frac{\lambda_1}{\sigma^2}\Big(\sum_{l=1}^{2}\frac{C_l\eta}{\eta^2-q_l^2}\Big)\int_a^b e^{-\eta|z-y|}D_z^{\Upsilon}(x)\,dz$$
$$+\frac{A\lambda_1}{\sigma^2}\sum_{l=1}^{2}\frac{(-1)^l\eta^2}{\eta^2-q_l^2}\int_a^b\frac{\operatorname{sh}((z-a)q_l)}{\operatorname{sh}((b-a)q_l)}D_z^{\Upsilon}(x)\,dz$$

$$+\frac{B\lambda_1}{\sigma^2}\sum_{l=1}^{2}\frac{(-1)^l\eta^2}{\eta^2-q_l^2}\int_a^b\frac{\operatorname{sh}((b-z)q_l)}{\operatorname{sh}((b-a)q_l)}D_z^{\Upsilon}(x)\,dz$$

$$+\frac{\lambda_1}{\sigma^2}\eta S_1\int_a^b e^{-\eta(z-a)}D_z^{\Upsilon}(x)\,dz+\frac{\lambda_1}{\sigma^2}\eta S_2\int_a^b e^{-\eta(b-z)}D_z^{\Upsilon}(x)\,dz,$$

где символы S_1 и S_2 обозначают выражения, стоящие в фигурных скобках в формуле (3.20) в порядке их следования.

Применяя формулы (2.9)–(2.11) и (3.19) это выражение преобразуем к следующему виду

$$\int_a^b G_z^{\lambda_1,\lambda}(x)\mathbf{E}G_y(z+Y_1)\,dz$$

$$=\frac{\lambda_1}{\sigma^2}\sum_{l=1}^{2}\frac{2C_l\eta^2}{(\eta^2-q_l^2)(\Upsilon^2-q_l^2)}\big(D_y^{q_l}(x)-D_y^{\Upsilon}(x)\big)$$

$$-\frac{\lambda_1}{\sigma^2}\Big(\sum_{l=1}^{2}\frac{C_l\eta}{\eta^2-q_l^2}\Big)\frac{2}{\eta^2-\Upsilon^2}\Big\{\eta D_y^{\Upsilon}(x)-e^{-\eta|x-y|}$$

$$+e^{-\eta(y-a)}\frac{\operatorname{sh}((b-x)\Upsilon)}{\operatorname{sh}((b-a)\Upsilon)}+e^{-\eta(b-y)}\frac{\operatorname{sh}((x-a)\Upsilon)}{\operatorname{sh}((b-a)\Upsilon)}\Big\}$$

$$+\frac{A\lambda_1}{\sigma^2}\sum_{l=1}^{2}\frac{2(-1)^l\eta^2}{(\eta^2-q_l^2)(q_l^2-\Upsilon^2)}\Big(\frac{\operatorname{sh}((x-a)\Upsilon)}{\operatorname{sh}((b-a)\Upsilon)}-\frac{\operatorname{sh}((x-a)q_l)}{\operatorname{sh}((b-a)q_l)}\Big)$$

$$+\frac{B\lambda_1}{\sigma^2}\sum_{l=1}^{2}\frac{2(-1)^l\eta^2}{(\eta^2-q_l^2)(q_l^2-\Upsilon^2)}\Big(\frac{\operatorname{sh}((b-x)\Upsilon)}{\operatorname{sh}((b-a)\Upsilon)}-\frac{\operatorname{sh}((b-x)q_l)}{\operatorname{sh}((b-a)q_l)}\Big)$$

$$+\frac{\lambda_1}{\sigma^2}\eta S_1\Big(-\frac{2e^{-\eta(x-a)}}{\eta^2-\Upsilon^2}+\frac{2\operatorname{sh}((b-x)\Upsilon)+2e^{-\eta(b-a)}\operatorname{sh}((x-a)\Upsilon)}{(\eta^2-\Upsilon^2)\operatorname{sh}((b-a)\Upsilon)}\Big)$$

$$+\frac{\lambda_1}{\sigma^2}\eta S_2\Big(-\frac{2e^{-\eta(b-x)}}{\eta^2-\Upsilon^2}+\frac{2e^{-\eta(b-a)}\operatorname{sh}((b-x)\Upsilon)+2\operatorname{sh}((x-a)\Upsilon)}{(\eta^2-\Upsilon^2)\operatorname{sh}((b-a)\Upsilon)}\Big).$$

В силу уравнения (3.12) и формул (3.16) и (3.17), это выражение должно быть равно следующему выражению

$$\sum_{l=1}^{2}\Big(C_l\,D_y^{q_l}(x)+A(-1)^l\frac{\operatorname{sh}((x-a)q_l)}{\operatorname{sh}((b-a)q_l)}+B(-1)^l\frac{\operatorname{sh}((b-x)q_l)}{\operatorname{sh}((b-a)q_l)}\Big)-\frac{\lambda}{\sigma^2}D_y^{\Upsilon}(x).$$

В силу линейной независимости функций $D_y^{q_l}(x)$, $D_y^{\Upsilon}(x)$, $\frac{\operatorname{sh}((x-a)q_l)}{\operatorname{sh}((b-a)q_l)}$, $\frac{\operatorname{sh}((b-x)q_l)}{\operatorname{sh}((b-a)q_l)}$, $\frac{\operatorname{sh}((x-a)\Upsilon)}{\operatorname{sh}((b-a)\Upsilon)}$, $\frac{\operatorname{sh}((b-x)\Upsilon)}{\operatorname{sh}((b-a)\Upsilon)}$, $e^{-\eta|y-x|}$, $e^{-\eta(b-x)}$ и $e^{-\eta(x-a)}$ результирующие коэффициенты при этих функциях должны быть равны нулю.

Приравняем коэффициенты при $D_y^{q_l}(x)$. Имеем

$$C_l = C_l \frac{\eta^2}{(\eta^2 - q_l^2)} \frac{2\lambda_1}{(2\lambda + 2\lambda_1 - \sigma^2 q_l^2)}, \tag{3.21}$$

а это влечет, что q_1, q_2 являются решениями уравнения (3.1). Таких положительных решений два: $q_1 = \rho_1$, $q_2 = \rho_2$, которые определяются формулами (3.3), (3.4).

В дальнейшем, константы q_l заменяем на ρ_l. Равенство (3.21) влечет равенство коэффициентов при функциях $\frac{\operatorname{sh}((x-a)q_l)}{\operatorname{sh}((b-a)q_l)}$ и $\frac{\operatorname{sh}((b-x)q_l)}{\operatorname{sh}((b-a)q_l)}$.

Приравнивая коэффициенты при $D_y^{\Upsilon}(x)$, получаем

$$\sum_{l=1}^{2} C_l + \frac{2\lambda_1 \eta^2}{\sigma^2(\eta^2 - \Upsilon^2)} \sum_{l=1}^{2} \frac{C_l}{\eta^2 - q_l^2} = \frac{\lambda}{\sigma^2}. \tag{3.22}$$

Приравнивая коэффициенты при $e^{-\eta|y-x|}$, получаем

$$\frac{C_1}{\eta^2 - \rho_1^2} + \frac{C_2}{\eta^2 - \rho_2^2} = 0. \tag{3.23}$$

Отсюда и из (3.22) следует, что

$$C_1 + C_2 = \frac{\lambda}{\sigma^2}. \tag{3.24}$$

Решая систему алгебраических уравнений (3.23), (3.24), имеем

$$C_1 = \frac{\lambda(\eta^2 - \rho_1^2)}{\sigma^2(\rho_2^2 - \rho_1^2)}, \quad C_2 = \frac{\lambda(\rho_2^2 - \eta^2)}{\sigma^2(\rho_2^2 - \rho_1^2)}. \tag{3.25}$$

В силу (3.23) и (3.21), коэффициенты при функциях

$$\frac{\operatorname{sh}((x-a)\Upsilon)}{\operatorname{sh}((b-a)\Upsilon)} \quad \text{и} \quad \frac{\operatorname{sh}((b-x)\Upsilon)}{\operatorname{sh}((b-a)\Upsilon)}$$

обращаются в ноль.

Коэффициенты при $e^{-\eta(b-x)}$ и $e^{-\eta(x-a)}$ должны быть равны нулю. Это влечет, что $S_1 = 0$ и $S_2 = 0$. Отсюда получаем следующую систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов A и B:

$$\frac{A}{2} \sum_{l=1}^{2} \frac{(-1)^l \rho_l}{(\eta^2 - \rho_l^2)\operatorname{sh}((b-a)\rho_l)} - \frac{B}{2} \sum_{l=1}^{2} \frac{\eta + \rho_l \operatorname{cth}((b-a)\rho_l)}{(-1)^l(\eta^2 - \rho_l^2)}$$

$$= \frac{\lambda}{\sigma^2(\rho_2^2-\rho_1^2)} \sum_{l=1}^{2} \frac{(-1)^l \operatorname{sh}((b-y)\rho_l)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_l)},$$

$$\frac{A}{2} \sum_{l=1}^{2} \frac{\rho_l \operatorname{cth}((b-a)\rho_l)+\eta}{(-1)^l(\eta^2-\rho_l^2)} - \frac{B}{2} \sum_{l=1}^{2} \frac{(-1)^l \rho_l}{(\eta^2-\rho_l^2)\operatorname{sh}((b-a)\rho_l)}$$

$$= -\frac{\lambda}{\sigma^2(\rho_2^2-\rho_1^2)} \sum_{l=1}^{2} \frac{(-1)^l \operatorname{sh}((y-a)\rho_l)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_l)}.$$

Суммируя эти уравнения, и вычитая одно из другого, получаем

$$A-B = \frac{2\lambda L_-}{\sigma^2(\rho_2^2-\rho_1^2)} \sum_{l=1}^{2} (-1)^l \Big(\frac{\operatorname{sh}((b-y)\rho_l)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_l)} - \frac{\operatorname{sh}((y-a)\rho_l)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_l)} \Big), \tag{3.26}$$

$$A+B = \frac{2\lambda L_+}{\sigma^2(\rho_2^2-\rho_1^2)} \sum_{l=1}^{2} (-1)^l \Big(\frac{\operatorname{sh}((b-y)\rho_l)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_l)} + \frac{\operatorname{sh}((y-a)\rho_l)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_l)} \Big), \tag{3.27}$$

где L_-, L_+ определены формулами (3.6) и (3.7). Из (3.26), (3.27) легко вычислить коэффициенты A и B. Подставляя теперь полученные значения коэффициентов в (3.17), получаем (3.8). □

Литература

1. А. Н. Бородин, *Распределение функционалов от мостов скачкообразных диффузий.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **341** (2007), 34–47.
2. M. Kac, *On some connections between probability theory and differential and integral equations.* — In: Proc. Second Berkley Symp. Math. Stat. Probab. (1951), pp. 189–215.
3. А. В. Скороход, *Случайные процессы с независимыми приращениями.* Наука, М., 1964.
4. E. Mordecki, *Ruin probabilities for Lévy processes with mixed exponential negative jumps.* — Теория вероятн. и ее примен. **48**, No. 1 (2003), 188–194.
5. А. Н. Бородин, *Распределение функционалов от некоторых процессов с независимыми приращениями.* — Вестник СПбГУ, сер. 1, No. 4 (2005), 7–20.

Borodin A. N. Joint distributions of the infimum, the supremum and the end of Brownian motion with jumps.

In the paper, we compute the joint distributions of the infimum, the supremum and the end of the Brownian motion with jumps. The final time of the Brownian motion with jumps is taken at the exponentially distributed random time independent of the process. This corresponds to

the Laplace transform with respect to the deterministic time of the joint distributions under consideration.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
Санкт-Петербург 191023,
Россия
и Санкт-Петербургский государственный
университет, Университетский пр., 28,
Петродворец, Санкт-Петербург 198504, Россия
E-mail: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 15 октября 2011 г.