Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 396, 2011 г.

А. Берред, В. Б. Невзоров

О ХАРАКТЕРИЗАЦИЯХ СЕМЕЙСТВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ, ВКЛЮЧАЮЩИХ ЛОГИСТИЧЕСКОЕ, СВОЙСТВАМИ ПОРЯДКОВЫХ СТАТИСТИК

Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (с.в.) $X, X_1, X_2, \ldots$ с функцией распределения (ф.р.) $F(x)$ и соответствующие порядковые статистики $X_{1,n} \leqslant X_{2,n} \leqslant \ldots \leqslant X_{n,n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим также независимые с.в. $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$, имеющие стандартное экспоненциальное распределение с плотностью $p(x) = \exp(-x)$, $x \geqslant 0$, и порядковые статистики

$$\xi_{1,n} \leqslant \xi_{2,n} \leqslant \ldots \leqslant \xi_{n,n}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

В дальнейшем предполагаем, что наборы с.в. $X_1, X_2, \ldots$ и $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы.

Случайная величина имеет стандартное логистическое распределение, если ее ф.р. H(x) задается равенством

$$H(x) = \frac{1}{1 + \exp(-x)}, \quad -\infty < x < \infty. \tag{1}$$

Функция распределения произвольного логистического распределения имеет вид $H((x-\mu)/\sigma)$, где $-\infty < \mu < \infty$ и $\sigma > 0$ – параметры сдвига и масштаба. В работах [1–4] были получены различные характеризации логистических распределений некоторыми соотношениями, связывающими порядковые статистики и случайные величины, имеющие экспоненциальное распределение. В частности, Lin и Hu [3] показали, что при некоторых дополнительных предположениях на ф.р. F равенства

$$X \stackrel{d}{=} X_{1,n} + \xi_1 + \frac{\xi_2}{2} + \ldots + \frac{\xi_{n-1}}{n-1} \tag{2}$$

Ключевые слова: порядковые статистики, характеризации распределений, экспоненциальное распределение, логистическое распределение.

Работа частично поддержана грантами РФФИ 10-01-00314 и 09-01-00808, грантом научной школы НШ 4472.2010.1 и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (2010-1.1-111-128-033).

характеризуют логистические распределения с ф.р. $H(x-\mu)$, $-\infty < \mu < \infty$.

Если вспомнить (см., например, [5, глава 3]), что для экспоненциальных порядковых статистик $\xi_{k,n}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, справедливы представления

$$\xi_{k,n} \stackrel{d}{=} \frac{\xi_1}{n} + \frac{\xi_2}{n-1} + \cdots + \frac{\xi_k}{n-k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad n \geqslant 1, \tag{3}$$

то соотношение (2) можно переписать как

$$X \stackrel{d}{=} X_{1,n} + \xi_{n-1,n-1}. \tag{4}$$

Отметим, что (4) при $n = 2$ сводится к равенству

$$X \stackrel{d}{=} X_{1,2} + \xi. \tag{5}$$

Симметрия относительно нуля плотности стандартного логистического распределения позволяет переписать (4) в виде

$$X \stackrel{d}{=} X_{n,n} - \xi_{n-1,n-1}, \tag{6}$$

а (5) как

$$X \stackrel{d}{=} X_{2,2} - \xi. \tag{7}$$

В работе [1] было показано, что при любом $n \geqslant 2$ соотношения

$$X \stackrel{d}{=} X_{2,n} + \xi_1 + \frac{\xi_2}{2} + \cdots + \frac{\xi_{n-2}}{n-2} - \xi_{n-1} \tag{8}$$

также характеризуют логистические распределения с ф.р. $H(x-\mu)$, $-\infty < \mu < \infty$.

Отметим, что (8) при $n = 2$ совпадает с равенством (7).

Еще одно более общее, чем (7), равенство было рассмотрено в работе [4]. Было показано, что соотношение

$$X \stackrel{d}{=} X_{n,n} - \xi, \quad n = 2, 3, \tag{9}$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$F(x) = \left(1 + \exp\{-(n-1)(x-\mu)\}\right)^{-1/(n-1)},$$
$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < \mu < \infty. \tag{10}$$

Если взять $n = 2$ в равенстве (10), то получим, что $F(x) = H(x-\mu)$. Казалось бы, соотношение (9) и аналогичное равенство

$$X + \xi \stackrel{d}{=} X_{n,n} \tag{11}$$

должны характеризовать одинаковые типы распределений, но в [4] было показано, что (11) при $n \geqslant 2$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$F(x) = \left(1 - \exp\left\{ - \frac{(n-1)(x-\mu)}{n} \right\}\right)^{1/(n-1)}, \quad x \geqslant \mu, \tag{12}$$

и

$$F(x) = 0, \quad \text{если} \quad x < \mu.$$

Видим, что (11) при $n = 2$ характеризует уже не логистическое, а экспоненциальное распределение с ф.р.

$$F(x) = \left(1 - \exp\left\{ - \frac{x-\mu}{2} \right\}\right), \quad x \geqslant \mu. \tag{13}$$

Мы рассмотрим еще одну аналогичную схему, в которой характеризации распределений основаны уже на соотношениях вида

$$X_{n,n} - \xi_{r,r} \stackrel{d}{=} X_{m,m} - \xi_{r-1,r-1}, \quad 1 \leqslant m < n, \quad r \geqslant 1. \tag{14}$$

Отметим, что частный случай (14) при $r = 1$ и $m = 1$ соответствует равенству (10).

Справедлив следующий результат.

Теорема 1. *Пусть независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ имеют общую непрерывную функцию распределения F. Равенство (14) имеет место для некоторых $1 \leqslant m < n$, $r \geqslant 1$ тогда и только тогда, когда*

$$F(x) = \left(1 + \exp\left\{ - \frac{r(n-m)}{m}(x-\mu) \right\}\right)^{-1/(n-m)},$$
$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < \mu < \infty. \tag{15}$$

Следствие 1. *Если рассмотреть частный случай теоремы 1 при $n = 3$, $m = 2$ и $r = 2$, то получаем, что равенство*

$$X_{2,2} - \xi \stackrel{d}{=} X_{3,3} - \xi_{2,2} \tag{16}$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$F(x) = \big(1 + \exp\big\{ - (x-\mu)\big\}\big)^{-1},$$
$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < \mu < \infty, \tag{17}$$

т.е. соотношение (16) характеризует логистические распределения с ф.р. $H(x-\mu)$, $-\infty < \mu < \infty$.

Доказательство теоремы 1. Принимая во внимание представление (3), видим, что (14) эквивалентно соотношению

$$X_{n,n} - \frac{\xi}{r} \stackrel{d}{=} X_{m,m}. \tag{18}$$

Рассмотрим с.в. $Y_k = rX_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и соответствующие порядковые статистики

$$Y_{1,m} \leqslant Y_{2,m} \leqslant \ldots \leqslant Y_{m,m} \quad \text{и} \quad Y_{1,n} \leqslant Y_{2,n} \leqslant \ldots \leqslant Y_{n,n}.$$

Из (18) следует, что

$$Y_{n,n} - \xi \stackrel{d}{=} Y_{m,m}. \tag{19}$$

Пусть $R(x) = F(x/r)$ обозначает функцию распределения с.в. Y_k, $k = 1, 2, \ldots$. Из равенства (19) получаем следующее соотношение для $R(x)$:

$$e^x \int_x^\infty e^{-v} R^n(v)dv = R^m(x). \tag{20}$$

Для удобства обозначим $T(x) = R^m(x)$. Тогда $R^n(x) = T^\alpha(x)$, где $\alpha = \frac{n}{m}$, и (20) перепишется как

$$e^x \int_x^\infty e^{-v} T^\alpha(v)dv = T(x). \tag{21}$$

Из непрерывности функции $e^{-v}T^\alpha(v)$ следует возможность дифференцирования в равенстве (21), после которого получаем, что

$$T(x) - T^\alpha(x) = T'(x)$$

и

$$\frac{T'(x)}{T(x)(1 - T^{\alpha-1}(x))} = 1. \tag{22}$$

Из (22) следует, что

$$\frac{T^{\alpha-1}(x)}{1 - T^{\alpha-1}(x)} = \exp\{(\alpha - 1)x + C\}, \tag{23}$$

где в качестве C можно взять любую константу. Принимая во внимание, что

$$T(x) = F^m(x/r),$$

получаем, что ф.р. F имеет вид (17).

Вернемся к соотношению (14). Отметим, что при $r = 1$ оно переписывается как

$$X_{n,n} - \xi \stackrel{d}{=} X_{m,m}.$$

Очевидно, что (14) эквивалентно равенству

$$\exp\{X_{n,n}\}\exp\{-\xi_{r,r}\} \stackrel{d}{=} \exp\{X_{m,m}\}\exp\{-\xi_{r-1,r-1}\}. \tag{24}$$

Рассмотрим равномерные порядковые статистики $U_{k,n}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, соответствующие равномерному на интервале [0,1] распределению. Нетрудно убедиться, что

$$\exp\{-\xi_{r,r}\} \stackrel{d}{=} U_{1,r} \quad \text{и} \quad \exp\{-\xi_{r-1,r-1}\} \stackrel{d}{=} U_{1,r-1}.$$

Это значит, что (24) можно переписать в виде

$$V_{n,n}U_{1,r} \stackrel{d}{=} V_{m,m}U_{1,r-1}, \tag{25}$$

где

$$V_{j,j} = \max\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

и с.в.

$$V_k = \exp\{X_k\}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

имеют ф.р.

$$P\{V_k < x\} = P\{X_k < x\} = F(\ln(x)). \tag{26}$$

Если $r = 1$, то (25) сводится к равенству

$$V_{n,n}U_1 \stackrel{d}{=} V_{m,m}.$$

Учитывая утверждение теоремы 1 и равенство (26), получаем следующий результат. □

Теорема 2. *Пусть независимые случайные величины $V_1, V_2, \ldots$ имеют общую непрерывную функцию распределения $V(x)$. Равенство (25) имеет место для некоторых $1 \leqslant m < n$, $r \geqslant 1$ тогда и только тогда, когда*

$$V(x) = (1 + Cx^{\frac{r(m-n)}{m}})^{-\frac{1}{n-m}}, \quad x > 0,$$

и

$$V(x) = 0, \quad x \leqslant 0,$$

где C – произвольная положительная константа.

Если рассмотреть частный случай ($r = m = n - 1$) теоремы 2, то получаем, что соотношение

$$V_{n,n}U_{1,n-1} \stackrel{d}{=} V_{n-1,n-1}U_{1,n-2} \tag{27}$$

справедливо тогда и только тогда, когда

$$V(x) = \frac{x}{x + C}, \quad 0 \leqslant x < \infty,$$

и

$$V(x) = 0, \quad x < 0,$$

где в качестве C можно взять любую положительную константу.

Отметим, что при $n = 3$ равенство (27) принимает вид

$$V_{3,3}U_{1,2} \stackrel{d}{=} V_{2,2}U_1.$$

Литература

1. M. Ahsanullah, G. P. Yanev, *Characterizations of logistic distribution by properties of order statistics.* (принята к печати в журнале Sankhya).
2. E. O. George, G. S. Mudholkar, *A characterization of the logistic distribution by a sample median.* — Ann. Inst. Statist. Math. **33**, Part A (1981), 125–129.
3. G. D. Lin, C.-Y. Hu, *On characterizations of the logistic distribution.* — J. Statist. Plann. Inference **138** (2008), 1147–1156.
4. В. О. Зыков, В. Б. Невзоров, *О некоторых характеризациях семейств распределений, включающих логистическое или экспоненциальное, свойствами порядковых статистик.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **384** (2010), 176–181.
5. В. Б. Невзоров, *Рекорды. Математическая теория.* Фазис, М., 2000.

Berred A., Nevzorov V. B. On characterizations of families of distributions, including logistic, by properties of order statistics.

The logistic distribution or in general a family of distributions including it are characterized through the assumption on order statistics of the original random variables and the exponential random variables.

U.F.R. des Sciences Techniques
Universite' du Havre, Le Havre, France
E-mail: alexandre.berred@univ-lehavre.fr

Поступило 12 сентября 2011 г.

С.-Петербургский государственный
университет, Университетский пр. 28,
Санкт-Петербург 198504, Россия
E-mail: vanev@mail.ru