Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 396, 2011 г.

Я. И. Белопольская, В. А. Войчинский

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ ВЯЗКОСТНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ ПОЛНОСТЬЮ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

§1. Введение

Квазилинейные параболические уравнения и системы возникают в разных задачах теории управления, дифференциальной геометрии, финансовой математики и других. В общей постановке задачу Коши для такой системы не удается свести к решению соответствующей стохастической задачи даже в линейной случае, т.е. для системы вида

$$\frac{\partial u_l}{\partial s} + \frac{1}{2} F_{ij}^{ml}(x) \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad u_l(T,x) = u_{0l}(x), \tag{1.1}$$
$$i,j = 1,\dots,d, \quad l = 1,\dots,d_1.$$

Здесь и ниже, если не оговорено противное, мы будем подразумевать, что выполняется соглашение о суммировании по повторяющимся индексам (вне зависимости от того, являются они верхними или нижними) и опускать знак суммирования.

Однако, существуют частные случаи, когда вероятностный подход к решению задачи Коши для нелинейной системы параболических уравнений оказывается возможным.

Например, задача Коши для системы семилинейных параболических уравнений

$$\frac{\partial u_l}{\partial s} + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} A^*(x,u) \nabla^2 u_l A(x,u) + \langle a(x,u), \nabla u_l \rangle \tag{1.2}$$
$$+ B_{lm}^i(x,u) \nabla_i u_m + c_{lm}(x,u) u_m + g_l(x,u) = 0,$$
$$u_l(T,x) = u_{0l}(x), \quad l = 1,\dots,d_1$$

Ключевые слова: связанные прямые и обратные стохастические уравнения, вязкостные решения, полностью нелинейные и квазилинейные системы параболических уравнений.

Работа частично поддержана грантом НШ-4472.2010.1, грантом СПбГАСУ No. 4-Ф-11 и грантом DFG RUS 113/823.

или задача Коши для системы полностью нелинейных параболических уравнений

$$\frac{\partial u_l}{\partial s} + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} A^*(x,u,\nabla u)\nabla^2 u_l A(x,u,\nabla u) + \langle a(x,u,\nabla u), \nabla u_l\rangle \tag{1.3}$$
$$+B^i_{lm}(x,u,\nabla u)\nabla_i u_m + c_{lm}(x,u,\nabla u)u_m + g(x,u,\nabla u,\nabla^2 u_l) = 0,$$
$$u_l(T,x) = u_{0l}(x), \quad l = 1,\dots,d_1,$$

где g – ограниченная скалярная функция, $*$ обозначает транспонирование,

$$\operatorname{Tr} A^*\nabla^2 u_l A = \sum_{i,j,k=1}^{d} A^k_i \nabla_i\nabla_j u_l A^k_j \quad \text{и} \quad \langle h,u\rangle = h_m u_m$$

обозначает скалярное произведение в соответствующем пространстве.

В этой работе мы построим вязкостное решение задачи (1.3), используя вероятностную интерпретацию этого решения. Заметим, что вероятностная модель, ассоциированная с решением задачи (1.3), существенно зависит от того, в каком смысле понимается это решение. Точнее говоря, структура стохастической задачи, ассоциированной с (1.3) существенно зависит от того, в каком смысле будет пониматься решение (1.3). Поясним это на более простом примере задачи Коши (1.2).

Пусть X, Y – пара евклидовых пространств размерности d и d_1 соответственно, где d и d_1 – натуральные числа, Пусть $(\Omega,\mathcal{F},P)$ – заданное вероятностное пространство, $w(t)\in X$ – стандартный винеровский процесс, $\mathcal{F}_t$ – порожденный им поток σ-алгебр. Для того, чтобы построить классическое решение задачи (1.2), сведем ее к следующей стохастической задаче. Рассмотрим систему стохастических уравнений вида

$$d\xi(t) = a(\xi(t),u(t,\xi(t))\,dt + A(\xi(t),u(t,\xi(t))\,dw(t), \quad \xi(s) = x\in X, \tag{1.4}$$

$$d\eta(t) = c(\xi(t),u(t,\xi(t))\eta(t)\,dt + C(\xi(t),u(t,\xi(t))(\eta(t),\,dw(t)), \tag{1.5}$$
$$\eta(s) = h \in Y,$$

$$\langle h, u(s,x))\rangle = \mathbf{E}[\langle \eta(T), u_0(\xi(T))\rangle + \int_s^T \langle \eta(\theta), g(\xi(\theta),u(\theta,\xi(\theta)))\rangle\,d\theta], \tag{1.6}$$

где коэффициенты B и C в (1.2) и (1.5) связаны соотношением $B^l_{im} = C^l_{km}A^k_i$. Системы такого вида были изучены в [1, 3], где было показано, что при достаточной гладкости коэффициентов системы (1.4), (1.5) и функций u_0, g, а также при соответствующих ограничениях на их рост существует единственное решение системы (1.4)–(1.6), и $u(s,x)$ является ограниченной непрерывной функцией. Однако, если мы хотим воспользоваться решением системы (1.4)–(1.6) для построения классического решения задачи (1.2), необходимо проверить, что функция $u(s,x)$, заданная соотношением (1.6), обладает двумя непрерывными ограниченными производными. Для того, чтобы доказать, что $u(s,x)$ дифференцируема по x, достаточно доказать существование и единственность расширенной стохастической системы, состоящей из (1.4)–(1.6) и уравнений

$$d\zeta(t) = \nabla a(\xi(t), u(t,\xi(t))\zeta(t)\,dt + \nabla A(\xi(t), u(t,\xi(t))(\zeta,\, dw(t)), \qquad (1.7)$$

$$\zeta(s) = y,$$

$$d\kappa(t) = c(\xi(t), u(t,\xi(t))\kappa(t)\,dt + C(\xi(t), u(t,\xi(t))(\kappa(t),\, dw(t)) \qquad (1.8)$$

$$+\nabla c(\xi(t), u(t,\xi(t))(\eta(t),\zeta(t))\,dt + \nabla C(\xi(t), u(t,\xi(t)))(\eta(t),\zeta(t),\, dw(t)),$$

$$\kappa(s) = 0,$$

$$\langle h, \nabla_y u(s,x)\rangle = \mathbf{E}[\langle \kappa(T), u_0(\xi(T))\rangle + \int_s^T \langle \kappa(\theta), g(\xi(\theta), u(\theta,\xi(\theta)))\rangle] \qquad (1.9)$$

$$+\mathbf{E}\left[\langle \eta(T), \nabla_{\zeta(T)} u_0(\xi(T))\rangle + \int_s^T \langle \eta(\theta), \nabla_{\zeta(\theta)} g(\xi(\theta), u(\theta,\xi(\theta)))\rangle\, d\theta\right].$$

Как нетрудно заметить, система (1.4)–(1.9) имеет такую же структуру, как и исходная система (1.4)–(1.6), и ее решение, при соответствующих условиях на коэффициенты и функции u_0 и g, строится так же, как и решение исходной системы. Это позволяет доказать, что $u(s,x)$ дифференцируема и соотношение (1.9) дает вероятностное представление для $\nabla u(s,x)$. Описанную выше процедуру можно итерировать с тем, чтобы получить вероятностное представление для второй производной функции $u(s,x)$. Отметим также, что система (1.4)–(1.9) связана с так называемым дифференциальным продолжением параболической системы (1.2) (см. [4]). А именно, рассмотрим, наряду с

(1.2), параболическую систему, полученную из нее в результате дифференцирования по переменной x, (если это допустимо) и предположим, что существует классическое решение у этой новой расширенной системы, которую называют первым дифференциальным продолжением системы (1.2). Тогда функция $U(s,x) = (u(s,x), \nabla_y u(s,x)$, где $u(s,x)$ и $\nabla_y u(s,x)$ заданы соответственно соотношениями (1.6) и (1.9), задает вероятностное представление задачи Коши для первого дифференциального продолжения системы (1.2).

При переходе от семилинейной системы вида (1.2) к квазилинейной системе

$$\frac{\partial u_l}{\partial s} + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} A^*(x,u,\nabla u)\nabla^2 u_l A(x,u) + \langle a(x,u,\nabla u), \nabla u_l\rangle \tag{1.10}$$
$$+B^i_{lm}(x,u,\nabla u)\nabla_i u_m + c_{lm}(x,u,\nabla u)u_m + g_l(x,u,\nabla u) = 0,$$
$$u_l(T,x) = u_{0l}(x) \quad l = 1,\dots,d_1,$$

можно применить описанную выше процедуру дифференцирования для того, чтобы свести систему (1.10) к соответствующей семилинейной системе параболических уравнений вида (1.2) относительно новой функции $U(s,x,y) = (u(s,x), \nabla_y u(s,x))$, а затем воспользоваться описанным выше подходом. На этом пути можно построить также вероятностное представление для решения полностью нелинейной системы параболических уравнений вида

$$\frac{\partial u_l}{\partial s} + F(x,u,\nabla u,\nabla^2 u_l) = 0, \quad u_l(T,x) = u_{0l}(x), \quad l = 1,\dots,d_1, \tag{1.11}$$

где F – скалярная функция (см. работы [3, 5]). В этом случае, после трехкратного дифференцирования, исходную полностью нелинейную систему вида удается включить в систему вида (1.2) относительно функции $U = (u, \nabla u, \nabla^2 u, \nabla^3 u)$.

Для того, чтобы построить вязкостное решение задачи (1.3), воспользуемся другим подходом, основанным на теории обратных СДУ или ОСДУ. Развитие этого подхода было начато в работах [6–8] и продолжено в большом количестве работ (см. монографии [9,10] и ссылки, приведенные в них). Подход, основанный на ОСДУ, позволяет построить случайные процессы, ассоциированные с вязкостным решением задачи (1.10). Сравнительно недавно (см. [11]) этот подход был обобщен на случай задачи Коши для скалярного полностью нелинейного параболического уравнения вида

$$v_s + F(x,v,\nabla v,\nabla^2 v) = 0, \quad v(T,x) = v_0(x) \in R^1. \tag{1.12}$$

Напомним определение вязкостного решения полностью нелинейного параболического уравнения [12]. Пусть $M_X^+ \subset X \otimes X$ обозначает множество положительно определенных матриц. Пусть $G \subseteq X$, $u : G_T = [0,T] \times G \to R^1$. Обозначим $\mathcal{P}_G^{2,+}u(\widehat{s},\widehat{x})$ суперджет функции u в точке $(\widehat{s},\widehat{x}) \in G_T$

$$\mathcal{P}_G^{2,+}u(\widehat{s},\widehat{x}) = \{(a,p,q) \in R^1 \times X \times M_X^+ : u(s,x) \leqslant u(\widehat{s},\widehat{x}) + a(s-\widehat{s})$$
$$+\langle p, x-\widehat{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle q(x-\widehat{x}), x-\widehat{x}\rangle + o(|s-\widehat{s}| + \|x-\widehat{x}\|^2),$$
$$G_T \ni (s,x) \to (\widehat{s},\widehat{x}) \in G_T\}.$$

Субджет второго порядка функции u в точке $(\widehat{t},\widehat{x}) \in G_T$ относительно G_T задается соотношением

$$\mathcal{P}_G^{2,-}u(\widehat{s},\widehat{x}) = \{(a,p,q) \in R^1 \times X \times M_1^+ : u(s,x) \geqslant u(\widehat{s},\widehat{x}) + a(s-\widehat{s})$$
$$+\langle p, x-\widehat{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle q(x-\widehat{x}), x-\widehat{x}\rangle + o(|s-\widehat{s}| + \|x-\widehat{x}\|^2),$$
$$G_T \ni (s,x) \to (\widehat{s},\widehat{x}) \in G_T\}.$$

Обозначим $USC(G) = \{$множество полунепрерывных сверху функций $u : G \to R^1\}$ и $LSC(G) = \{$множество полунепрерывных снизу функций $u : G \to R^1\}$. Функция $u(s,x)$ называется субрешением задачи (1.12), если $u \in USC(G_T)$ и

$$a + F(x, u(s,x), p, q) \leqslant 0 \quad \text{для} \quad (s,x) \in G_T, \quad (a,p,q) \in \mathcal{P}_G^{2,+}u,$$

и суперрешением задачи (1.12), если $u \in LSC(G_T)$ и

$$a + F(x, u(s,x), p, q) \geqslant 0, \quad \text{для} \quad (s,x) \in G_T, \quad (a,p,q) \in \mathcal{P}_G^{2,-}u.$$

Функция называется вязкостным решением задачи (1.12), если она является как субрешением, так и суперрешением этой задачи.

Целью настоящей работы является развитие вероятностного подхода к построению вязкостного решения задачи Коши для системы полностью нелинейных параболических уравнений вида

$$\frac{\partial u^l}{\partial s} + [\mathcal{B}(x,u,\nabla u)u]^l + F(x,u,\nabla u,\nabla^2 u^l) = 0, \tag{1.13}$$
$$u^l(T,x) = u_0^l(x), \quad l = 1, \dots d,$$

где $F : X \times Y \times X \otimes Y \times X \otimes X \to R^1, u_0^l : X \to R^1, l = 1, \dots, d$. При этом возникает необходимость рассматривать не только ОСДУ, но и полностью связанные системы прямых и обратных стохастических дифференциальных уравнений (ПОСДУ). В этой работе мы распространим результаты нашей предыдущей работы [13], в которой предполагалось, что $u_0 : X \to X$ на случай $u_0 : X \to Y$ при условии, что линейные пространства X и Y изоморфны.

Развиваемый в этой работе подход к построению вязкостного решения системы (1.13) состоит их трех этапов. На первом этапе рассматриваемую полностью нелинейную систему параболических уравнений мы включим в квазилинейную систему большей размерности, на втором этапе рассмотрим ПОСДУ, ассоциированные с задачей Коши для полученной квазилинейной системы, и докажем существование и единственность решения ПОСДУ, а на третьем этапе покажем, что решение ПОСДУ порождает вязкостное решение исходной задачи (1.13).

Далее структура статьи имеет следующий вид. В параграфе 2 мы напомним ряд фактов из теории СДУ, связанных с системами семилинейных параболических уравнений, основанных на свойствах мультипликативных операторных функционалов (МОФ) марковских процессов. В параграфе 3 мы получим, используя свойства МОФ, соответствующие факты для ОСДУ, связанных с квазилинейными системами. В параграфе 4 рассмотрена система ПОСДУ, ассоциированная с системой (1.13), построено ее решение, а также показано, что решение ПОСДУ порождает вязкостное решение системы (1.13) в классе дифференцируемых функций.

§2. СДУ и системы параболических уравнений

В этом параграфе мы введем необходимые объекты и приведем в удобном для дальнейшего виде, но без доказательства, ряд результатов теории СДУ, ассоциированных с системами параболических уравнений.

Обозначим $M_X = X \otimes X$ – пространство ограниченных линейных отображений в X с нормой $|A| = \big[\sum\limits_{k=1}^{d} \langle Ae_k, Ae_k\rangle\big]^{\frac{1}{2}}$, где $\{e_k\}$ – ортобазис в X, и пусть $M = Y \otimes X$. Ниже нам понадобится также ряд функциональных пространств. Пусть $C^k(X,Y)$ – пространство k раз дифференцируемых функций $f : X \to Y$, $C^{1,2}([0,T] \times X, Y)$ – пространство функций один раз дифференцируемых по $t \in [0,T]$ и дважды дифференцируемых по $x \in X$. Мы будем использовать также обозначения вида C^k и $C^{1,2}$, если это не будет приводить к недоразумениям.

Для заданных функций $a(x) \in X$, $A(x) \in M_X$, $c(x) \in M_Y$, $C(x) \in M_Y \otimes X$, $x \in X$ и $u_0 : X \to Y$ обозначим

$$[\mathcal{B}(x)u]^l(x) = \langle \nabla u^l, a(x) \rangle + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} A^*(x) \nabla^2 u^l A(x) + B^{lk}_m(x) \nabla_k u^m + c^l_m(x) u^m \tag{2.1}$$

и рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u^l}{\partial s} + [\mathcal{B}(x)u]^l + g^l(x,u) = 0, \quad u(T,x) = u_0(x), \quad 0 \leqslant s \leqslant T. \tag{2.2}$$

Здесь $x \in X, u : [0,T] \times X \to Y$, $g : X \times Y \to Y$ и $\operatorname{Tr} A^* \nabla^2 u A \in Y$.

Рассмотрим (прямое) СДУ относительно процесса $\gamma(t) = (\xi(t), \eta(t)) \in X \times Y$

$$d\xi(t) = a(\xi(t))\, dt + A(\xi(t))\, dw(t), \quad \xi(s) = x \in X, \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, \tag{2.3}$$

$$d\eta(t) = c(\xi(t))\eta(t)\, dt + C(\xi(t))(\eta(t),\, dw(t)), \quad \eta(s) = h \in Y, \tag{2.4}$$

и скалярную функцию $\Phi(s,\gamma) = \langle h, u(s,x) \rangle \in C^{1,2}([0,T] \times (X \times Y))$, $\gamma = (x,h)$, где $u(s,x)$ является классическим решением задачи (2.2), а коэффициенты B в (2.2) и C в (2.4) связаны соотношением $B = CA$.

Будем говорить, что выполнено условие **C 2.1**, если коэффициенты $a(x) \in X, A(x) \in M_X, x \in X$ неслучайны, липшицевы и имеют рост не выше линейного, а коэффициенты $c(x) \in M_Y, C(x) \in M_Y \otimes X$ неслучайны, непрерывны и ограничены.

Из классических результатов теории СДУ вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* **C 2.1**. *Тогда существует единственное решение системы* (2.3)–(2.4), *где* $\xi(t) \in X$ – *диффузионный процесс, а компонента* $\eta(t) \in Y$ *процесса* $\gamma(t)$ *порождает мультипликативный операторный функционал* $\Gamma(t,s) \in M_Y$ *процесса* $\xi(t)$ *по формуле* $\eta(t) = \Gamma(t,s)h$.

Заметим, что систему (2.3)–(2.4) можно переписать в виде

$$d\gamma(t) = n(\gamma(t))\, dt + N(\gamma(t))\, dW(t)), \quad \gamma(s) = \gamma, \tag{2.5}$$

где
$$n(\gamma)=\begin{pmatrix} a(x) & 0\\ 0 & c(x)h\end{pmatrix},\quad N(\gamma)=\begin{pmatrix} A(x) & 0\\ 0 & C(x)h\end{pmatrix},$$
$$W(t)=\begin{pmatrix} w(t)\\ w(t)\end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Для доказательства теоремы 2.1 остается лишь проверить справедливость условий классической теоремы о существовании и единственности решения СДУ и воспользовваться свойствами решения СДУ.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия* **C 2.1**, *случайный процесс* $\gamma(t)=(\xi(t),\eta(t))$ *удовлетворяет системе* (2.3)–(2.4), *и* $u_0: X\to Y, g: X\times Y\to Y$ *– ограниченные дифференцируемые функции. Тогда существует единственная функция* $u(s,x)$ *такая, что для любого* $h\in Y$
$$\langle h,u(s,x)\rangle=\mathbf{E}\Bigg[\langle\eta(T),u_0(\xi(T))\rangle + \int_s^T\langle\eta(\theta),g(\xi_{s,x}(\theta),u(\theta,\xi_{s,x}(\theta)))\rangle\,d\theta\Bigg] \tag{2.7}$$
или, эквивалентно, существует единственное решение уравнения
$$u(s,x)=\mathbf{E}\Bigg[\Gamma^*(s,T)u_0(\xi(T))+\int_s^T\Gamma^*(s,\theta)g(\xi_{s,x}(\theta),u(\theta,\xi_{s,x}(\theta)))\,d\theta\Bigg]. \tag{2.8}$$

Пусть коэффициенты уравнений (2.3)–(2.4) принадлежат классу C^1. Наряду с задачей Коши (2.3)–(2.4) рассмотрим задачу Коши для системы СДУ
$$d\zeta(t)=\nabla a(\xi(t))\zeta(t)\,dt+\nabla A(\xi(t))(\zeta(t),\,dw(t)), \tag{2.9}$$
$$d\kappa(t)=c(\xi(t)\kappa(t)\,dt+C(\xi(t)(\kappa(t),\,dw(t))+\nabla c(\xi(t))(\zeta(t),\eta(t))\,dt$$
$$+\nabla C(\xi(t))(\zeta(t),\eta(t),\,dw(t)), \tag{2.10}$$
относительно процессов $\zeta(t)=\nabla_y\xi(t)$ и $\kappa(t)=\nabla_y\eta(t)$ при условии $\zeta(s)=y,\kappa(s)=0$. Здесь процессы $\zeta(t)$, $\kappa(t)$ – это среднеквадратичные производные по параметру x процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$, удовлетворяющих соответственно (2.3) и (2.4), по направлению $y\in X$.

Покажем, что система уравнений (2.3), (2.4), (2.9), (2.10) обладает структурой, аналогичной структуре системы (2.3), (2.4).

Пусть $\Theta = Y \oplus X \diamond Y$ так, что $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \Theta$ имеет вид $\gamma_1 = h$, $\gamma_2 = y \diamond \kappa$ и рассмотрим (2.3), (2.4), (2.9), (2.10) как систему, состоящую из уравнения (2.3) и линейного уравнения вида

$$d\lambda = m(\xi(t))\lambda(t)\,dt + M(\xi(t))(\lambda(t), d\widetilde{W}(t)), \quad \lambda(s) = \lambda \in \Theta, \tag{2.11}$$

где $\widetilde{W}(t) = (w(t), w(t) \diamond w(t))^*$. Процесс $\gamma(t)$ представляет собой случайный процесс со значениями в пространстве Θ. Для того, чтобы определить явный вид коэффициентов уравнения (2.11), зададим тензорную сумму операторов $K \oplus H = K \diamond I + I \diamond H$ как оператор, действующий в пространстве Θ по правилу

$$(K \oplus H)(\lambda) = K\lambda_1 \diamond \lambda_2 + \lambda_1 \diamond H\lambda_2,$$

и определим операторы $m(x)$ и $M(x)$ соотношениями

$$\begin{aligned} m(x)\begin{pmatrix} \kappa \\ \zeta \diamond \eta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c(x)\kappa + \nabla c(x)\zeta\eta \\ \nabla a(x)\zeta \diamond \eta + \zeta \diamond c(x)\eta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c(x) & \widehat{\nabla} c(x) \\ 0 & \nabla a(x) \oplus c(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa \\ \zeta \diamond \eta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(x)\begin{pmatrix} \kappa \\ \zeta \diamond \eta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C(x)\eta + \nabla C(x)\zeta \\ \nabla C(x)\zeta \diamond \eta + \zeta \diamond C(x)\eta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C(x) & \widehat{\nabla} C(x) \\ 0 & \nabla C(x) \oplus C(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa \\ \zeta \diamond \eta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $\widehat{\nabla} c(x)\zeta \diamond \kappa = \nabla c(x)(\zeta, \eta)$, $\widehat{\nabla} C(x)\zeta \diamond \kappa = \nabla C(x)(\zeta, \eta)$.

Будем говорить, что выполнено условие **C 2.1,k**, если выполнено условие **C 2.1** и все коэффициенты a, A, c, C принадлежат классу C^k.

Теорема 2.3. *Пусть выполняется условие* **C 2.1,1**. *Тогда теорема* 2.1 *справедлива для системы* СДУ (2.3), (2.11).

Замечание 2.4. Если коэффициенты уравнений (2.3), (2.4) достаточно гладкие, то процедуру дифференцирования СДУ можно применить к системе (2.3), (2.11). В результате можно доказать, что, если коэффициенты уравнений (2.3), (2.4) и функция $u_0 : X \to Y$ принадлежат классу C^3, то функция

$$\Phi(s, x, h) = \langle h, u(s, x) \rangle = \mathbf{E}\langle \eta_{s,h}(T), u_0(\xi_{s,x}(T)) \rangle \tag{2.12}$$

удовлетворяет задаче Коши для скалярного параболического уравнения

$$\frac{\partial \Phi(s,\gamma)}{\partial s} + \langle n(\gamma), \nabla\Phi(s,\gamma)\rangle + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} N^*(\gamma)\nabla^2\Phi(s,\gamma)N(\gamma) = 0,$$

$$\Phi(T,\gamma) = \langle h, u_0(x)\rangle, \tag{2.13}$$

а функция $u(s,x) \in Y$, определяемая соотношением (2.12), является классическим решением (2.2) при $g \equiv 0$.

Будем говорить, что выполнено условие **C 2.2,k**, если выполнено условие **C 2.1,k** и, кроме того, $u_0 \in C^k(X,Y)$, $g(x,u) \in C^k(X\times Y, Y)$.

Обозначим

$$U_0(x,y) = (u_0(x), \nabla_y u_0(x)), \quad G(x,y,U(x,y)) = (g(x,u(x)),$$
$$\nabla_y g(x,u(x))), \quad x,y \in X.$$

Наряду с задачей Коши (2.2) рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial v_i^l}{\partial s} + [\mathcal{B}(x)v]_i^l + [[\nabla_i\mathcal{B}]u]^l + \nabla g^l(x,u) = 0, \quad v_i^l(T,x) = \nabla_i u_0^l(x) \tag{2.14}$$

относительно функций $v_i^l = \nabla_i u^l$, где

$$[[\nabla_i\mathcal{B}]u]^l = v_k^l\nabla_i a^k(x)\rangle + \operatorname{Tr}\nabla_i A(x)\nabla v^l A(x) + \nabla_i B_m^{lk} v_k^m + \nabla_i c_m^l u^m, \tag{2.15}$$
$$\nabla_i g(x,u) = g_i^1(x,u) + g_m^2(x,u)\nabla_i u^m$$

и

$$g^k(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{\partial g^k(\alpha_1,\alpha_2)}{\partial \alpha_k}, \quad k = 1,2.$$

Заметим, что, как упоминалось во введении, систему (2.2), (2.14) можно рассматривать как семилинейную систему относительно функции $U(t,x,y) = (u(t,x), \nabla_y u(t,x))$ и в том случае, когда функция g зависит от x, u и $\nabla_y u$.

Ниже нам понадобится еще одна интерпретациия системы (2.3), (2.4), (2.9), (2.10).

Пусть $H_1 = X\times X$, $H_2 = Y\times Y$, $\chi = (x,y) \in H_1$, $\beta = (h,\kappa) \in H_2$

$$U(t,\chi) = (u(t,x), \nabla_y u(t,x)), \quad U(t,\chi(t)) = (u(t,\xi(t)), \nabla_{\zeta(t)} u(t,\xi(t))),$$
$$\chi(t) = (\xi(t),\zeta(t)) \in H_1, \quad \beta(t) = (\eta(t),\kappa(t)) \in H_2$$

и

$$\widetilde{Y}(t) = \Psi(t,\chi(t)) = \langle \beta(t), U(t,\chi(t))\rangle$$
$$= \langle \eta(t), u(t,\xi(t))\rangle + \langle \kappa(t), u(t,\xi(t))\rangle + \langle \eta(t), \nabla_{\zeta(t)} u(t,\xi(t))\rangle.$$

Рассмотрим стохастическое уравнение

$$d\chi(t) = b(\chi(t))\,dt + B(\chi(t))\,dW(t), \quad \chi(s) = \chi = (x, y) \in H_1, \tag{2.16}$$

где $b(\chi) = (a(x), \nabla_y A)^*$, $B(\chi) = (A(x), \nabla_y A(x))^*$, $W(t) = (w(t), w(t))^*$ и запишем систему уравнений (2.4), (2.10)) в виде

$$d\beta(t) = q(\chi(t))\nu(t)\,dt + Q(\chi(t))\beta(t)\,dW(t), \quad \beta(s) = \beta = (0, h) \in H_2, \tag{2.17}$$

где

$$q(\chi)\begin{pmatrix} h \\ \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(x)h \\ c(x)\kappa + \nabla_y c(x)h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(x) & 0 \\ \nabla_y c(x) & c(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ \kappa \end{pmatrix},$$

$$Q(\chi)\begin{pmatrix} h \\ \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(x)h \\ C(x)\kappa + \nabla_y C(x)h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(x) & 0 \\ \nabla_y C(x) & C(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ \kappa \end{pmatrix}.$$

Решение линейного стохастического уравнения (2.17) порождает мультипликативный операторный функционал процесса $\chi(t)$ по формуле $\beta(t) = \Xi(t, s)\beta$.

Таким образом, для системы СДУ, при выполнении соответствующих условий, справедливы выводы теорем 2.1–2.3 и замечания 2.4.

Пусть случайные процессы $\xi(t), \zeta(t), \eta(t), \kappa(t)$ удовлетворяют системе (2.3), (2.4), (2.9), (2.10) и $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t)) = (\kappa(t), \eta(t))$. Используя формулу Ито, нетрудно проверить, что, если функция $U(s, x, y) = (u(s, x), \nabla_y u(s, x))$, заданная соотношениями

$$\langle h, u(s, x)\rangle = \mathbf{E}\Big[\langle \eta_{s,h}(T), u_0(\xi_{s,x}(T)\rangle + \int_s^T \langle \eta_{s,h}(\theta), g(\xi_{s,x}(\theta), u(\theta, \xi_{s,x}(\theta)))\rangle\,d\theta\Big], \tag{2.18}$$

$$\langle h, \nabla_y u(s, x)\rangle = \mathbf{E}[\langle \kappa_{s,0}(T), u_0(\xi_{s,x}(T))\rangle + \langle \eta_{s,h}(T), \nabla u_0(\xi_{s,x}(T))\zeta_{s.y}(T)\rangle] + \mathbf{E}\Big[\int_s^T [\langle \kappa_{s,0}(\theta), g(\xi_{s,x}(\theta), u(\theta, \xi_{s,x}(\theta)))\rangle + \langle \eta_{s,h}(\theta), \nabla_{\zeta_{s,y}(\theta)} g(\xi_{s,x}(\theta), u(\theta, \xi_{s,x}(\theta)))\rangle]\,d\theta\Big], \tag{2.19}$$

принадлежит классу $C^{1,2}$, то ее компоненты удовлетворят системе (2.2), (2.14).

§3. ОСДУ и системы параболических уравнений

В этом параграфе мы введем необходимые объекты и приведем в удобном для дальнейшего виде, но без доказательства, ряд классических результатов теории ОСДУ, ассоциированных с системами квазилинейных параболических уравнений. Соответствующие доказательства можно найти в большом количестве работ, начиная с работ Парду и Пенга [6, 7], и в ряде монографий, например, [9, 10].

Обозначим $\mathcal{M}^2([0,T];X)$ множество прогрессивно измеримых квадратично интегрируемых случайных процессов $\xi(t) \in X$,

$$\mathbf{E}\bigg[\int\limits_0^T \|\xi(\tau)\|^2\,d\tau\bigg] < \infty,$$

и пусть $\mathcal{S}^2([0,T],X)$ обозначает множество семимартингалов $\eta(t) \in X$, удовлетворяющих оценке

$$\mathbf{E}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\eta(t)\|^2\right] < \infty.$$

Пусть случайный процесс $\gamma(t) = (\xi(t), \eta(t))$ удовлетворяет СДУ (2.5) или, эквивалентно, системе (2.3), (2.4). Если $u \in C^{1,2}$, то из формулы Ито следует, что стохастический дифференциал процесса $\Pi(t) = \Phi(t, \gamma(t)) = \langle \eta(t), u(t, \xi(t))\rangle$ имеет вид

$$d\Pi(t) = [\Phi_t + \widetilde{\mathcal{B}}\Phi](t, \gamma(t))\,dt + \langle \nabla_\gamma \Phi(t, \gamma(t)), N(\gamma(t))\,dW(t)\rangle, \tag{3.1}$$

где $\widetilde{\mathcal{B}}\Phi(x,h) = \langle h, \mathcal{B}u(x)\rangle$,

$$\begin{aligned}
&\langle \nabla_\gamma \Phi(t,\gamma(t)), N(t,\gamma(t))\,dW(t)\rangle \\
&= \langle \eta(t), [C^*(\xi(t))u(t,\xi(t)) + \nabla u(t,\xi(t))A(\xi(t))]\,dw(t)\rangle \\
&= \langle h, \Gamma^*(s,t)[C^*(\xi(t))u(t,\xi(t)) + \nabla u(t,\xi(t))A(\xi(t))]\,dw(t)\rangle.
\end{aligned}$$

Пусть

$$Z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Gamma^*(s,t)[\nabla u(t,\xi(t))]A(\xi(t)) \\ \Gamma^*(s,t)C^*(\xi(t))u(t,\xi(t))\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{Z}(t) = \begin{pmatrix}\langle \eta(t), z_1(t)\rangle \\ \langle \eta(t), z_2(t)\rangle\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
&\widetilde{G}^1(\gamma(t), u(t,\xi(t)) = \langle \eta(t), g(\xi(t), u(t,\xi(t)))\rangle \\
&= \langle h, \Gamma^*(s,t)g(\xi(t), u(t,\xi(t)))\rangle = \langle h, G^1(\xi(t), u(t,\xi(t)))\rangle.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Поскольку u удовлетворяет (2.2), то из (2.3), (2.4) следует, что скалярный процесс $\Pi(t)$ удовлетворяет стохастической задаче Коши

$$d\Pi(t) = -\widetilde{G}^1(\gamma(t), \Pi(t, \gamma(t)))\,dt + \langle \nabla\Pi(t, \gamma(t)), N(t, \gamma(t))\,dW(t)\rangle, \quad (3.3)$$
$$\Pi(T) = \langle \eta(T), u_0(\xi(T))\rangle.$$

При этом, в силу линейности (3.3) относительно h, мы приходим к уравнению

$$dy(t) = -G^1(\xi(t), y(t))\,dt + z\,dw(t)\rangle, \quad y(T) = \Gamma^*(s, T)u_0(\xi(T)), \quad (3.4)$$

где процесс $z(t)$ задается соотношением

$$\langle h, z(t)\rangle = \langle \eta(t), [\nabla u(t, \xi(t))]A(\xi(t)) + C^*(\xi(t))u(t, \xi(t))]\rangle.$$

Аналогичные результаты можно получить и в том случае, когда функция g зависит от x, u и ∇u. При этом уравнение (3.4) переходит в уравнение вида

$$dy(t) = -G^1(\xi(t), y(t), z(t))\,dt + z\,dw(t)\rangle, \quad y(T) = \Gamma^*(s, T)u_0(\xi(T)). \quad (3.5)$$

Эти наблюдения приводят к соответствующим абстрактным результатам [6], которые будут здесь представлены в удобном для дальнейшего виде.

Пусть задана детерминированная функция $g : X \times Y \times M \to Y$ и случайная функция $f : [0, T] \times Y \times M \to Y$ определена соотношением

$$\langle h, f(t, y(t), z(t))\rangle = \langle \eta(t), g(\xi(t), u(t, \xi(t)), \nabla u(t, \xi(t)))\rangle$$

для любого $h \in Y$.

Рассмотрим ОСДУ

$$dy(t) = -f(t, y(t), z(t))\,dt + z(t)\,dw(t), \quad y(T) = \eta, \quad (3.6)$$

где $\eta \in Y$ – $\mathcal{F}_T$-измеримый вектор, $z(t) \in M$.

Решением ОСДУ (3.6) называют пару прогрессивно измеримых случайных процессов $(y(t), z(t))$ со значениями в $Y \times M$ таких, что

1) $\mathbf{E}\int\limits_0^T |z(t)|^2\,dt < \infty$, $\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} \mathbf{E}\|y(t)\|^2 < \infty$;

2) $y(t) = \eta + \int\limits_t^T f(s, y(s), z(s))\,ds - \int\limits_t^T z(s)\,dw(s)$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Приведем условия, при которых существует единственное решение $(y(t), z(t))$ ОСДУ (3.6).

Будем говорить, что выполнено условие **C 3.1**, если $f : \Omega \times [0, T] \times Y \times M \to Y$ обладает следующими свойствами:

1) $f(\cdot, t, y, z)$ прогрессивно измерима $\forall t$ для всех (y, z) со значениями в $Y \times M$;

2) $\mathbf{E}\|\overline{f}(t)\| < \infty, \quad \overline{f}(t) = f(t, 0, 0)$;

3) существует константа μ и положительные константы K, L такие, что

$\|f(t, y, z)\| \leqslant \overline{f}(t) + K[\|y\| + |z|]$ $\forall t \in [0, T]$, $y \in Y, z \in M$, P-п.н.;

4) $\|f(t, y, z) - f(t, y, z_1)\| \leqslant L|z - z_1|$, $\forall t \in [0, T]$, $y \in Y$, z, $z_1 \in M$, P-п.н.;

5) $\langle y - y_1, f(t, y, z) - f(t, y_1, z)\rangle \leqslant \mu\|y - y_1\|^2$, $\forall t \in [0, T]$, $y, y_1 \in Y$, $z \in M$, P-п.н.;

6) $\|f(t, y, z) - f(t, y_1, z)\| \leqslant L\|y - y_1\|$, $\forall t \in [0, T]$, $y, y_1 \in Y$, $z \in M$, P-п.н.

Обозначим $\mathcal{H} = \mathcal{S}^2([0, T]; Y) \times \mathcal{M}^2([0, T]; M)$ и определим отображение $\Phi(u, v) = (y, z)$, действие которого в $\mathcal{H}$ задается следующим образом. Для заданных $(u(t), v(t))$ определим процесс $y(t)$ соотношением

$$y(t) = \mathbf{E}\left[\eta + \int_t^T f(s, u(s), v(s))\, ds|\mathcal{F}_t\right], \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3.7}$$

а процесс $Z(t)$ однозначно определим с помощью теоремы Ито о мартингальном представлении. Действительно, поскольку векторнозначная случайная величина

$$\kappa = \eta + \int_0^T f(s, u(s), v(s))\, ds$$

квадратично интегрируема, то, в силу теоремы Ито о мартингальном представлении, существует такой случайный процесс $z(s) \in M$, что

$$\kappa = \mathbf{E}[\kappa] + \int_0^T z(s)\, dw(s).$$

Воспользовавшись соотношением

$$y(0) = \mathbf{E}\left[\eta + \int_0^T f(s, u(s), v(s))\, ds\right] = \mathbf{E}[\kappa],$$

получим

$$y(0)=\kappa-\int_0^T z(s)\,dw(s)=\eta+\int_0^T f(s,u(s),v(s))\,ds-\int_0^T z(s)\,dw(s). \quad (3.8)$$

Заметим, что $y(0)-\int_0^t f(s,u(s),v(s))\,ds+\int_0^t z(s)\,dw(s)$ – $\mathcal{F}_t$-измеримая случайная величина и перепишем (3.8) в виде

$$\begin{aligned} y(0)-\int_0^t f(s,u(s),v(s))\,ds+\int_0^t z(s)\,dw(s) \quad (3.9)\\ =\eta+\int_t^T f(s,u(s),v(s))\,ds-\int_t^T z(s)\,dw(s). \end{aligned}$$

Вычисляя условное математическое ожидание $\mathbf{E}[\cdot|\mathcal{F}_t]$ левой и правой части (3.9) и принимая во внимание соотношения (3.7) и (3.8), получим

$$y(t)=\eta+\int_t^T f(s,u(s),v(s)) \quad -\int_t^T z(s)\,dw(s). \quad (3.10)$$

Существование, единственность и свойства решений ОСДУ, а также связь этих решений с вязкостными решениями систем квазилинейных уравнений вытекают из следующих утверждений.

Теорема 3.1. *Пусть выполняется условие* **C 3.1**. *Тогда существует единственное решение* $(y,z)\in\mathcal{H}$ ОСДУ (3.5).

Пусть $\mathcal{B}$ имеет вид (2.1), $\gamma_{s,\gamma}(t)$ удовлетворяет (2.6) и $\widetilde{G}^1$ задана соотношением вида (3.2), где g зависит от x,u и ∇u. Предположим, что случайная функция $G^1(t,y,z)$, определяемая соотношением $\langle h,G^1(t,y,z)\rangle=\widetilde{G}^1(\gamma_{s,\gamma}(t),y,z)$, удовлетворяет **C 3.1**. Тогда, в силу теоремы 3.1, существует пара процессов $(y(t),z(t))$, удовлетворяющих ОСДУ (3.5). Покажем, что функция $u(s,x)=y(s)$ является вязкостным решением следующей задачи Коши

$$\frac{\partial u^l}{\partial s}+[\mathcal{B}u]^l+g^l(x,u,\nabla u)=0, \quad u^l(T,x)=u_0^l(x), \quad l=1,\dots,d. \quad (3.11)$$

Напомним одно полезное утверждение [12], которое позволяет конструктивно проверять, что процесс $y(t)$, удовлетворяющий ОСДУ

(3.5), задает вязкостное решение $u(s,x)$ задачи (3.11) с помощью соотношения $u(s,x) = y(s)$.

Лемма 3.2. *Пусть* $(\widehat{s},\widehat{x}) \in G_T$ *и* $u^l \in C(G_T)$, *тогда*

$$\mathcal{P}_G^{2,+}u^l(\widehat{s},\widehat{x}) = \{(\phi_s^l(\widehat{s},\widehat{x}), \nabla\phi^l(\widehat{s},\widehat{x}), \nabla^2\phi^l(\widehat{s},\widehat{x})) : \phi^l \in C^{1,2},$$

$$u^l - \phi^l \quad \text{имеет локальный максимум в точке} \quad (\widehat{s},\widehat{x}) \in G_T\},$$

и

$$\mathcal{P}_G^{2,-}u^l(\widehat{s},\widehat{x}) = \{(\phi_s^l(\widehat{s},\widehat{x}), \nabla\phi^l(\widehat{s},\widehat{x}), \nabla^2\phi^l(\widehat{s},\widehat{x})) : \phi^l \in C^{1,2},$$

$$u^l - \phi^l \quad \text{имеет локальный минимум в точке} \quad (\widehat{s},\widehat{x}) \in G_T\}.$$

Для того, чтобы доказать, что $u(s,x)$ является субрешением (3.11), в силу леммы 3.2 достаточно проверить, что $u^l(T,x) \leqslant u_0^l(x)$, и для любой функции $\phi^l \in C^{1,2}([0,T]\times X)$, $l = 1,\dots,d$, и любой точки $(s,x) \in [0,T]\times X$, в которой достигается локальный максимум функции $u^l - \phi^l$, справедливо неравенство

$$\frac{\partial\phi^l}{\partial s} + [\mathcal{B}\phi]^l + g^l(x,u,\nabla\phi) \leqslant 0. \tag{3.12}$$

Аналогично, $u(s,x)$ является суперрешением (3.11), если $u(T,x) \geqslant u_0(x)$ покомпонентно, и для любой функции $\phi \in C^{1,2}([0,T]\times X)$ и любой точки $(s,x) \in [0,T]\times X$, в которой достигается локальный минимум функции $u^l - \phi^l$, справедливо неравенство

$$\frac{\partial\phi^l}{\partial s} + [\mathcal{B}\phi]^l + g^l(x,u,\nabla\phi) \geqslant 0. \tag{3.13}$$

Наконец, функция u является вязкостным решением (3.11), если она является как субрешением, так и суперрешением задачи (3.11).

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия* **C 3.1** *и пара* (y,z) *удовлетворяет* (3.5). *Тогда функция* $u(s,x) = y(s)$ *является непрерывным вязкостным решением задачи Коши* (3.11).

Доказательство. Поскольку в условиях теоремы 3.1 решение уравнения (3.5) непрерывно в среднеквадратичном, то функция $u(s,x)$ непрерывна. Для того, чтобы проверить, что функция $u(s,x)$ является вязкостным решением задачи (3.11), выберем вектор-функцию $\varphi \in C^{1,2}$ и точку $(s,x) \in [0,T]\times X$ так, чтобы в точке (s,x) функция $u^l - \varphi^l$ имела локальный максимум. Пусть $\Psi(s,\gamma) = \langle h, u(s,x)\rangle$ и $\Phi(s,\gamma) = \langle h, \varphi(s,x)\rangle$. Тогда в точке (s,γ) функция $\Psi(s,\gamma) - \Phi(s,\gamma)$ также имеет локальный максимум при $h = \widetilde{e}^l$, где $\{\widetilde{e}_l\}_{l=1}^d$ – ортобазис в Y. Без потери общности мы предположим, что $u^l(s,x)=\varphi^l(s,x)$. Пусть случайный процесс $\gamma(t)=(\xi(t),\eta(t))$ удовлетворяет СДУ (2.5) или, эквивалентно, процессы $\xi(t),\eta(t)$ удовлетворяют системе (2.3), (2.4). Тогда в любой момент остановки τ покомпонентно справедливы оценки

$$\Gamma^*(s,\tau)[u(\tau,\xi_{s,x}(\tau))-\varphi(\tau,\xi_{s,x}(\tau))]\leqslant 0, \tag{3.14}$$

Применяя формулу Ито к функции $\Phi(t,\gamma)=\langle h,\varphi(t,x)\rangle$, где φ принадлежит классу $C^{1,2}$ и процессу $\gamma(t)=(\xi(t),\eta(t))$, получим

$$\Phi(\tau,\gamma(\tau))=\Phi(s,\gamma)+\int\limits_s^\tau\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}+\widetilde{\mathcal{B}}\Phi\right](\theta,\gamma(\theta))\,d\theta$$
$$+\int\limits_s^\tau\langle\nabla\Phi(\theta,\gamma(\theta)),N(\gamma(\theta))\,dW(\theta)\rangle.$$

С другой стороны, в силу (3.5),

$$y(s)=\Gamma^*(s,T)u_0(\xi(T))+\int\limits_s^T F(\xi(\theta),y(\theta),z(\theta))\,d\theta-\int\limits_s^T z(\theta)\,dw(\theta).$$

Поскольку $y(t)=u(t,\xi(t))$, то, в силу формулы Ито, для функции $\Psi(s,\gamma)=\langle h,u(t,x)\rangle$ справедливо соотношение

$$\Psi(s,\gamma)=\Psi(\tau,\gamma(\tau))+\int\limits_s^\tau\langle h,\Gamma^*(s,\theta)g(\xi(\theta),y(\theta),z(\theta))\rangle\,d\theta-\int\limits_s^\tau\langle h,z(\theta)\,dw(\theta)\rangle$$

$$=\langle h,[\Gamma^*(s,\tau)u(\tau,\xi(\tau))+\int\limits_s^\tau\Gamma^*(s,\theta)g(\xi(\theta),y(\theta),z(\theta))\,d\theta-\int\limits_s^\tau z(\theta)\,dw(\theta)]\rangle.$$

Из последнего соотношения и (3.14) следует, что

$$0\geqslant[\Gamma^*(s,\tau)u]^l(\tau,\xi(\tau))-[\Gamma^*(s,\tau)\varphi]^l(\tau,\xi(\tau))$$
$$=u^l(s,x)-\varphi^l(s,x)-\int\limits_s^\tau\left[\frac{\partial\varphi^l}{\partial\theta}+\left[\mathcal{B}\varphi\right]^l\right](\theta,\xi(\theta))\,d\theta \tag{3.15}$$
$$+\int\limits_s^\tau[\Gamma^*(s,\theta)g]^l(\xi(\theta),y(\theta),z(\theta))\,d\theta-\int\limits_s^\tau z^l(\theta)\,dw(\theta)-\int\limits_s^\tau\mathcal{N}^l(\xi(\theta))\,dw(\theta),$$

где
$$\mathcal{N}^l(\xi(\theta)) = \nabla\varphi^l(\theta,\xi(\theta))A(\xi(\theta)) + C^l_m(\xi(\theta))\varphi^m(\xi(\theta)).$$
Поскольку, по предположению, $u^l(s,x) - \varphi^l(s,x) = 0$ в точке (s,x), то, вычисляя математическое ожидание левой и правой части неравенства (3.15), получим оценку
$$\mathbf{E}\Bigg[\int\limits_s^{\tau}\Bigg(\Bigg[\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \mathcal{B}\varphi\Bigg]^l(\theta,\xi(\theta)) - [\Gamma^*(s,\theta)g]^l(\xi(\theta),y(\theta),z(\theta))\Bigg)\,d\theta\Bigg] \geqslant 0, \tag{3.16}$$
$$l = 1,\dots,d.$$

Для того, чтобы проверить, что $u^l(s,x)$ является субрешением задачи (3.11) нужно показать, что
$$\Lambda^l(\xi(\theta),y(\theta),z(\theta)) = \Bigg[\frac{\partial\varphi^l}{\partial\theta} + [\mathcal{B}\varphi]^l\Bigg](\theta,\xi(\theta)) \\ - [\Gamma^*(s,\theta)g]^l(\xi(\theta),y(\theta),z(\theta)) \geqslant 0.$$

Предположим обратное, то есть пусть существует такое число $\delta_0 < 0$, что $\Lambda^l \leqslant \delta_0$ для любого $l = 1,\dots,d$, и пусть
$$\tau_1 = \inf\big\{\theta > s : \Lambda^l(\xi(\theta),y(\theta),z(\theta)) \leqslant \delta_0\big\} \wedge T.$$
По определению, неравенство (3.16) выполняется для любого момента остановки и, следовательно, для момента $\tau_1 > s$. Таким образом, мы приходим к противоречию
$$0 \geqslant \mathbf{E}\Bigg(\int\limits_s^{\tau_1}\Lambda^l(\xi(\theta),y(\theta),z(\theta))\,d\theta\Bigg) \leqslant \delta_0\mathbf{E}(\tau_1 - s) \leqslant 0,$$
откуда вытекает, что $u^l(s,x)$ является субрешением (3.11). Аналогично можно показать, что $u(s,x)$ является суперрешением уравнения (3.11), откуда вытекает, что $u(s,x)$ является вязкостным решением уравнения (3.11). Таким образом, мы доказали существование вязкостного решения задачи (3.11) в классе непрерывных ограниченных функций. □

Повторяя рассуждения, приведенные в начале этого параграфа, с учетом результатов параграфа 2, можно показать, что с системой уравнений вида (2.14) также ассоциированы ОСДУ вида (3.5)
$$dY(t) = -F(t,Y(t),Z(t))\,dt + Z\,dW(t)\rangle,$$

$$Y(T) = \Xi^*(s,T)U_0(\chi(T)) \tag{3.17}$$

относительно новой пары процессов $Y(t)$ и $Z(t)$.

Обозначим $\lambda(t) = (\xi(t), \zeta(t), \eta(t), \kappa(t))$, $\chi(t) = (\xi(t), \zeta(t))$ и рассмотрим функцию $\Phi(t, \lambda(t))$ вида $\Phi(t,\lambda(t)) = \Phi_1^h(t, \xi(t)) + \Phi_2^h(t, \chi(t))$, где

$$\Phi_1^h(t,\xi(t)) = \langle \eta_{s,h}(t), u(t,\xi(t))\rangle,$$
$$\Phi_2^h(t,\chi(t)) = \langle \kappa(t), u(t,\xi(t))\rangle + \langle \eta_{s,h}(t), \nabla u(t,\xi(t))\zeta(t)\rangle.$$

Поскольку двухкомпонентный процесс

$$\Pi^h(t) = (\Pi_1(t), \Pi_2(t)) = (\Phi_1^h(t,\xi(t)), \Phi_2^h(t,\chi(t)))$$

линейно зависит от параметра h, то, применяя формулу Ито, можно показать, что его вторая компонента $\Pi_2(t)$ имеет стохастический дифференциал вида

$$d\Pi_2(t) = -\widetilde{G}_2(t, V(t,\chi(t)), Z(t))\,dt + \langle Z(t)\,dW(t)\rangle$$

и удовлетворяет условию

$$\begin{aligned}\langle h, \Pi_2(T)\rangle &= \langle \kappa(T), u_0(\xi(T))\rangle + \langle \eta(t), \nabla u_0(\xi(T)\zeta(T)\rangle \\ &= \langle h, \Xi^*(s,T)V_0(\chi(T))\rangle.\end{aligned}$$

При рассмотрении ОСДУ, связанных с системой сильно нелинейных параболических уравнений, наряду с системой вида

$$d\chi(t) = q(\chi(t))\,dt + Q(\chi(t))\,dW(t)\rangle, \quad \chi(s) = \chi \in Y \times Y, \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} dY(t) &= -F(\chi(t), Y(t), Z(t))\,dt + Z\,dW(t)\rangle, \\ Y(T) &= \Xi^*(s,T)V_0(\chi(T)),\end{aligned} \tag{3.19}$$

нам понадобится еще один класс ПОСДУ, а именно, система связанных прямых и обратных уравнений вида

$$\begin{aligned} &d\widehat{\chi}(t) = n(\widehat{\chi}(t), \widehat{Y}(t), \widehat{Z}(t))\,dt + N(\widehat{\chi}(t), Y(t), Z(t))\,d\widehat{W}(t), \\ &\widehat{\chi}(s) = \chi \in X \times X \times X,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\widehat{Y}(t) = -F(\widehat{\chi}(t), \widehat{Y}(t), \widehat{Z}(t))\,dt + \widehat{Z}(t)\,d\widehat{W}(t), \\ &\widehat{Y}(T) = (\Gamma^*(s,T)u_0(\xi(T)), \Xi^*(s,T)V_0(\chi(T))) \in Y \times Y \times Y.\end{aligned}$$

При этом мы воспользуемся результатами [14] (см. также монографию [9]), где была развита теория ПОСДУ.

§4. ПОСДУ и задача Коши для системы полностью нелинейных параболических уравнений

Пусть X и Y – пара изоморфных d-мерных линейных пространств и $N \in M$ – обратимое отображение, так что для $Q = N^{-1}$ справедлива оценка $|Q| \leqslant R < \infty$.

Пусть задана функция $g(x,u,p,q) \in R^1$, $x \in X$, $u \in Y$, $p \in M$, $q \in M_X$ и оператор $\mathcal{B}$ вида (2.1), коэффициенты a, A, B, c которого зависят от $x, u, \nabla u$.

Рассмотрим задачу Коши для системы

$$\frac{\partial u_l}{\partial s} + [\mathcal{B}(x)u]_l + g(x,u,\nabla u,\nabla^2 u_l) = 0, \tag{4.1}$$
$$u_l(T,x) = u_{0l}(x) \in Y, x \in X, s \in [0,T],$$

и ее первое дифференциальное продолжение

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_{li}}{\partial s} + [\mathcal{B}(x)p]_{li} + [[\nabla_i \mathcal{B}]u]_l + G_i^1(x,u,\nabla u,\nabla p_l)&\\ +g_{kj}^4(x,u,\nabla u,\nabla p_l)\nabla_{kj}^2 p_{li} = 0,&\\ p_{li}(T,x) = \nabla_i u_{0l}(x),&\end{aligned} \tag{4.2}$$

где

$$\begin{aligned}G_i^2(x,u,\nabla u,\nabla p_l) = g_i^1(x,u,\nabla u,\nabla p_l) + g_m^2(x,u,\nabla u,\nabla p_l)p_{mi}&\\ +g_{km}^3(x,u,\nabla u,\nabla p_l)\nabla_k p_{mi}.&\end{aligned} \tag{4.3}$$

Здесь

$$p_{li} = \nabla_i u_l, \quad g_i^1 = \frac{\partial g}{\partial x_i}, \quad g_m^2 = \frac{\partial g}{\partial u_m}, \quad g_{mk}^3 = \frac{\partial g}{\partial p_{mk}}, \quad g_{kj}^4 = \frac{\partial g}{\partial q_{kj}}.$$

Будем говорить, что выполнено условие **C 4.1**, если функция $g : X \times Y \times M \times M_X \to R^1$ дифференцируема по всем переменным, $\mathcal{M}^*\mathcal{M} = g^4 + A^*A$ – положительно определенная невырожденная матрица.

Перепишем уравнение (4.1) в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_l}{\partial s} + [\mathcal{B}(x)u]_l + g(x,u,p,\nabla p_l) + g^4(x,u,p,\nabla p_l)\nabla^2 u_l&\\ -g^4(x,u,p,\nabla p_l)\nabla p_l = 0, \quad l = 1,\dots,d,&\end{aligned} \tag{4.4}$$

обозначим

$$U(s,x,y) = (u(s,x),\nabla_y u(s,x))^*, \quad U(T,x,y) = (u_0(x),\nabla_y u_0(x))^*$$

и представим систему уравнений (4.2), (4.4) в виде

$$\frac{\partial U_m(s,x,y)}{\partial s}+\mathcal{G}U_m(s,x,y)$$

$$+\widehat{B}^i_{qm}\mathcal{M}^k_i\nabla_k U_q(s,x,y)+\widehat{c}_{qm}U_q(s,x,y)+G_m(x,y,U,\nabla U)=0, \qquad (4.5)$$

где

$U(s,x,y)=(u(s,x),p(s,x,y))$, $p(s,x,y)=\langle y,\nabla u(s,x)\rangle$, $m=1,\dots,d_2=2d$.

Здесь

$$\mathcal{G}U_m=\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\mathcal{M}^*(x,U,\nabla U)\nabla^2 U_m\mathcal{M}(x,U,\nabla U)$$

$$+\langle m(x,U,\nabla U),\nabla U_m\rangle, \qquad (4.6)$$

$$m=\begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix},\quad \frac{1}{2}[\mathcal{M}^*\mathcal{M}]_{jk}=\begin{pmatrix}A_{jk}+\frac{\partial g}{\partial q_{jk}} & 0\\ 0 & A_{jk}+\frac{\partial g}{\partial q_{jk}}\end{pmatrix},$$

$$G(x,y,U,\nabla U_l)=\begin{pmatrix}G^1(x,y,u,p,\nabla p_l)\\G^2(x,y,u,p,\nabla p_l)\end{pmatrix},$$

$$G^1(x,y,u,p,\nabla p_l)=g(x,u,p,\nabla p_l)-g^4(x,u,p,\nabla p_l), \qquad (4.7)$$

а коэффициенты $\widehat{B}$ и $\widehat{c}$ зависят от B,c,a,A и их производных.

Пусть выполнено условие **C 4.1**, тогда система (4.4) описывает часть компонент системы (4.5), и обе системы имеют аналогичную структуру.

Рассмотрим задачу Коши для системы (4.5) с данными Коши

$$U(T,x,y)=U_0(x,y)=(u_0(x),V_0(x,y))=(u_0(x),\nabla_y u_0(x)). \qquad (4.8)$$

Обозначим $H_1=X\times X$, by $H_2=Y\times Y$, $H_3=M\times M_X$ и положим

$$\chi_2(t)=(\xi(t),\zeta(t))\in H_1,\quad \beta(t)=(\eta(t),\kappa(t))\in H_2,$$

$$Y(t)=(y(t),p(t))\in H_2,\quad Z(t)=(p(t),q(t))\in H_3.$$

Пусть случайный процесс $\lambda(t)$ удовлетворяет СДУ вида (2.11), ассоциированному с системой (4.2), (4.4). Рассмотрим случайный процесс $\Pi(t)=\Phi(t,\lambda(t))$, где

$$\Phi(t,\lambda(t))=\Phi^h_1(t,\xi(t))+\Phi^h_2(t,\chi(t)),\quad \Phi^h_1(t,\xi(t))=\langle\eta(t),u_0(\xi(t))\rangle,$$

$$\Phi^h_2(t,\chi(t))=\langle\kappa(t),u_0(\xi(t))\rangle+\langle\eta(t),\nabla_{\zeta(t)}u_0(\xi(t))\rangle$$

и заметим, что $\Phi_1^h(t,\chi(t))$ линейно зависит от h, а $\Phi_2^h(t,\chi(t))$ линейно зависит как от h, так и от y. Используя формулу Ито и уравнение (2.16), мы получим, что стохастический дифференциал процесса $\widetilde{Y}(t) = \Phi^h(t,\chi(t))$ имеет вид

$$\begin{aligned} d\widetilde{Y}(t) &= \widetilde{G}(\chi(t), U(t,\chi(t)), \nabla U(t,\chi(t))\zeta(t))\,dt \\ &\quad + \langle \nabla\Phi^h(t,\chi(t)), \mathcal{M}(\chi(t))\,dW(t)\rangle, \end{aligned} \tag{4.9}$$

где $G(\chi, U, \nabla U)$ имеет вид (4.3),

$$\begin{aligned} &\widetilde{G}^2(\chi(t), U(t,\chi(t)), \nabla_{\zeta(t)}U(t,\chi(t))) \\ &= \langle \beta_2, \Xi^*(s,t)G(\chi(t), U(t,\chi(t)), \nabla_{\zeta(t)}U(t,\chi(t)))\rangle, \\ &\langle \nabla\Phi(t,\chi(t)), \mathcal{M}(t,\chi(t))\,dW(t)\rangle = \langle \widetilde{Z},\, dW(t)\rangle \\ &= \langle \nabla C(\xi(t))(\zeta(t), \eta(t),\, dw(t)), u(t,\xi(t))\rangle \\ &\quad + \langle C(\xi(t))(\kappa(t),\, dw(t)), u(t,\xi(t))\rangle \\ &\quad + \langle \eta(t), \nabla u(t,\xi(t))\nabla\mathcal{M}(\xi(t))(\zeta(t), dw(t))\rangle. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Из соотношений (4.9), (4.10) следует, что процесс $Y(t)$ удовлетворяет стохастической задаче Коши

$$\begin{aligned} d\widetilde{Y}(t) &= -\widetilde{G}^2(\chi(t), \widetilde{Y}(t), \widetilde{Z}(t))\,dt + \langle \widetilde{Z}(t),\, dW(t)\rangle, \\ \widetilde{Y}(T) &= \langle \beta(T), U_0(\chi(T))\rangle. \end{aligned} \tag{4.11}$$

При этом, используя описанную в предыдущих параграфах структуру уравнения (4.11), мы приходим к уравнению

$$\begin{aligned} dY_2(t) &= -G^2(\chi(t), Y_2(t), Z(t))\,dt + Z\,dW(t), \\ Y_2(T) &= \Xi^*(s,T)U_0(\chi(T)), \end{aligned} \tag{4.12}$$

для процессов $Y_2(t) = (Y_2^1(t), Y_2^2(t))$, $Z(t) = (Z^1(t), Z^2(t))$, определяемых соотношениями

$$\begin{aligned} \widetilde{Y}_2(t) &= \langle \beta(t), Y_2(t)\rangle = \langle \beta, \Xi^*(s,t)Y_2(t)\rangle = \langle \kappa(t), Y_2^1(t)\rangle + \langle \eta(t), Y_2^2(t)\rangle \\ &= \langle \kappa, \Xi_1^*(s,t)Y_2^1(t)\rangle + \langle h, \Xi_2^*(s,t)Y_2^2(t)\rangle, \quad \widetilde{Z}(t) = \langle \beta, Z(t)\rangle \end{aligned}$$

и

$$\widetilde{G}^2(\chi(t), \widetilde{Y}_2(t), \widetilde{Z}(t)) = \langle \beta, G^2(\chi(t), Y_2(t), Z(t))\rangle.$$

Повторяя рассуждения предыдущих параграфов, можно показать, что с системой (4.2) связана следующая система ПОСДУ

$$\begin{aligned} d\chi_2(t) &= b_2(\chi_2(t), Y_2(t), Z_2(t))\,dt + B_2(\chi_2(t), Y_2(t), Z_2(t))\,dW(t), \\ \chi_2(s) &= \chi_2 \in H_1 = X \times X, \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$dY_2(t) = -G^2(\chi(t), Y_2(t), Z_2(t))\,dt + Z_2(t)\,dW,$$

$$\alpha = Y_2(T) = (\alpha_1, \alpha_2) \in H_2 = Y \times Y. \qquad (4.14)$$

Здесь $b_2 = (a, \nabla a)$, $B_2 = (\mathcal{M}, \nabla\mathcal{M})$, случайные процессы $Y_2(t) \in H_2$, $Z_2(t) \in H_3 = M \times M_X$ – $\mathcal{F}_t$-измеримы, причем $Y_2(T) \in \mathcal{M}^2([0,T]; H_2)$, $Z_2(T) \in \mathcal{M}^2([0,T]; H_3)$, $W(t) = (w(t), w(t))^*$.

Обозначим

$$\chi(t) = (\chi_1(t), \chi_2(t)), \quad Y(t) = (Y_1(t), Y_2(t)), \quad Z(t) = (Z_1(t), Z_2(t))$$

и пусть процессы $\chi_2(t), Y_2(t), Z_2(t)$ удовлетворяют (4.13), (4.14), а процессы $\chi_1(t) = \xi(t)$, $Y_1(t) = y(t), Z_1(t) = z(t)$, удовлетворяют ПОСДУ вида

$$d\xi(t) = a(\xi(t))\,dt + \mathcal{M}(\xi(t), y(t), Z_2(t))\,dw(t), \quad \xi(s) = x \in X, \qquad (4.15)$$

$$dy(t) = -G^1(\xi(t), y(t), Z_2(t))\,dt + z\,dw(t),$$

$$y(T) = \Gamma^*(s,T)u_0(\xi(T)) \in Y. \qquad (4.16)$$

Повторяя рассуждения предыдущих параграфов, можно показать, что с системой (4.2), (4.4) или, эквивалентно, с системой (4.5) связана следующая система ПОСДУ

$$d\chi(t) = b(\chi(t), Y(t), Z(t))\,dt + B(\chi(t), Y(t), Z(t))\,d\widehat{W}(t),$$

$$\chi(s) = \chi \in K_1 = X \times X \times X, \qquad (4.17)$$

$$dY(t) = -F(\chi(t), Y(t), Z(t))\,dt + Z(t)\,d\widehat{W},$$

$$\alpha = Y(T) = (\alpha_1, \alpha_2) \in K_2 = Y \times Y \times Y, \qquad (4.18)$$

где $\widehat{W}(t) = (w(t), w(t), w(t))^*$, $b = \begin{pmatrix} a \\ b_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \mathcal{M} \\ B_2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} G^1 \\ G^2 \end{pmatrix}$.

Сформулируем условия, которые позволят нам доказать существование и единственность решения системы (4.17), (4.18) и показать, что функция $U(s,\chi) = Y(s)$ с компонентами $U(s,\chi) = (u(s,x), \nabla_y u(s,x))$ является вязкостным решением системы (4.5) и, как следствие, ее компонента $u(s,x)$ является вязкостным решением системы (4.1).

Пусть $K_3 = M \times M \times M$, $U(T,\chi) = U_0(s,\chi) = (u_0(x), V_0(x,y))$,

$$\mathcal{K}_1 = \{\chi(t) \in K_1 : \mathbf{E} \sup_{t\in[0,T]} \|\chi(t)\|^2 < \infty\},$$

$$\mathcal{K}_2 = \{Y(t) \in K_2 : \mathbf{E} \sup_{t\in[0,T]} \|Y(t)\|^2 < \infty\},$$

$$\mathcal{K}_3 = \{Z(t) \in K_3 : \mathbf{E} \int_0^T |Z(t)|^2\, dt < \infty\}.$$

Обозначим $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2 \times \mathcal{K}_3$ и пусть $\|\cdot\|_{\mathcal{K}}$ обозначает норму в $\mathcal{K}$, т.е. для $\Theta = (\chi, Y, Z) \in \mathcal{K}$

$$\|\Theta\|^2_{\mathcal{K}} = \mathbf{E}\left[\sup_{[0,T]} \|\chi(t)\|^2_{K_1} + \sup_{[0,T]} \|Y(t)\|^2_{K_2} + \int_0^T |Z(t)|^2_{K_3}\, dt\right].$$

Если $\widehat{Q} : Y \to X$ – линейное обратимое отображение и $\widehat{Q}^{-1} = \widehat{N}$, то обозначим $N : X\times X\times X \to Y\times Y\times Y$ отображение вида $N(x_1,x_2,x_3) = (\widehat{N}x_1, \widehat{N}x_2, \widehat{N}x_3)$ и пусть $Q(y_1,y_2,y_3) = (\widehat{Q}y_1, \widehat{Q}y_2, \widehat{Q}y_3)$. Обозначим $D = K_1 \times K_2 \times K_3$ и пусть для $\Theta = (\chi, \kappa, \upsilon) \in D$

$$\Upsilon(\Theta) = (-F(\Theta), b(\Theta), B(\Theta)) \quad \widetilde{\Upsilon}(\Theta) = (-F(\Theta), Nb(\Theta), NB(\Theta)),$$

$$\widetilde{\Theta} = (N\chi, \kappa, \upsilon) \in \widetilde{D} = NK_1 \times K_2 \times K_3.$$

Пусть $\mathcal{M}^2(0,T;D)$ обозначает множество всех $\mathcal{F}_t$-прогрессивно измеримых процессов $\Theta(t)$ со значениями в D, $t \in [0,T]$ и $\mathcal{D} = \mathcal{M}^2(0,T; D) \cap \mathcal{K}$.

Мы будем полагать, что существует константа $C > 0$ такая, что функции $\Upsilon : D \to D$ и V_0 удовлетворяют оценкам

$$\|\widetilde{\Upsilon}(\Theta) - \widetilde{\Upsilon}(\Theta^1)\|_{\widetilde{D}} \leqslant C\|\Theta - \Theta^1\|_D, \quad \forall \Theta, \Theta^1 \in D, \quad P\text{-п.в.}$$

$$\|U_0(\chi) - U_0(\chi^1)\| \leqslant C\|\chi - \chi^1\|, \qquad \forall \chi, \chi^1 \in K_1, \quad P\text{-п.в..}$$

Мы будем говорить при этом, что выполнено условие **C 4.2**.

Мы будем говорить, что выполнено условие **C 4.3**, если существует такая константа $C_1 > 0$, что

$$\langle\langle \widetilde{\Upsilon}(\Theta) - \widetilde{\Upsilon}(\Theta^1), \widetilde{\Theta} - \widetilde{\Theta}^1 \rangle\rangle \leqslant -C_1\|\Theta - \Theta^1\|^2, \quad \forall \Theta, \Theta^1 \in D, \quad P\text{-п.в.},$$

где $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ – скалярное произведение в $\widetilde{D}$ и

$$\langle U_0(\chi) - U_0(\chi^1), N[\chi - \chi^1] \rangle \geqslant C_1\|\chi - \chi^1\|^2 \quad \chi, \chi^1 \in K_1, \quad P\text{-п.в..}$$

Мы будем говорить что выполнено условие **С 4.4**, если существует такая константа C_2, что

$$\langle\langle \widetilde{\Upsilon}(\Theta)-\widetilde{\Upsilon}(\Theta^1), \widetilde{\Theta}-\widetilde{\Theta}^1\rangle\rangle \leqslant -C_2\|\chi-\chi^1\|^2, \quad \forall \Theta, \Theta^1 \in D, \ \ P\text{-п.в.} \quad (4.19)$$

или

$$\langle\langle \widetilde{\Upsilon}(\Theta)-\widetilde{\Upsilon}(\Theta^1), \widetilde{\Theta}-\widetilde{\Theta}^1\rangle\rangle \leqslant -C_2\|Y-Y^1\|^2, \quad \forall \Theta, \Theta^1 \in D, \ \ P\text{-п.в.} \quad (4.20)$$

и

$$\langle U_0(\chi)-U_0(\chi^1), N[\chi-\chi^1]\rangle \geqslant 0 \quad \chi,\chi^1 \in K_1, \quad P\text{-п.в.} \qquad (4.21)$$

Решение системы ПОСДУ (4.17)–(4.18) – это тройка прогрессивно измеримых случайных процессов $\Theta(t)=(\chi(t),Y(t),Z(t)) \in \mathcal{D}$, таких, что P-п.в.

$$\chi(t)=\chi+\int\limits_0^t b(\chi(\theta),Y(\theta),Z(\theta))\,d\theta+\int\limits_0^t B(\chi(\theta),Y(\theta),Z(\theta))\,d\widehat{W}(\theta), \quad (4.22)$$

$$Y(t)=\alpha+\int\limits_t^T F(\chi(\theta),Y(\theta),Z(\theta))\,d\theta-\int\limits_t^T Z(\theta)\,d\widehat{W}(\theta), \qquad (4.23)$$

где $\alpha \in K_2$ – $\mathcal{F}_T$-измеримая случайная величина.

Покажем прежде всего, что система (4.17)–(4.18) имеет не более одного решения.

Лемма 4.1. *Пусть выполнены условия* **С 4.2**–**С 4.4**. *Тогда система* (4.17)–(4.18) *имеет не более одного решения.*

Доказательство. Предположим обратное, т.е. пусть существует два решения $\Theta^1(t)=(\chi^1(t),Y^1(t),Z^1(t))$ и $\Theta^2(t)=(\chi^2(t),Y^2(t),Z^2(t))$ системы (4.17)–(4.18). Введем обозначения $\overline{\chi}=\chi^1-\chi^2$, $\overline{\kappa}=\kappa^1-\kappa^2$, $\overline{\zeta}=\zeta^1-\zeta^2$ и

$$\overline{b}=b(\Theta^1)-b(\Theta^2), \quad \overline{B}=B(\Theta^1)-B(\Theta^2), \quad \overline{F}=F(\Theta^1)-F(\Theta^2).$$

Используя оценки условия **С 4.2**, нетрудно проверить, что процессы $\overline{\chi}(t)$, $\overline{Y}(t)$ непрерывны и подчиняются оценкам $\mathbf{E}\sup\limits_{t\in[0,T]}\|\overline{\chi}(t)\|^2<\infty$, $\mathbf{E}\sup\limits_{t\in[0,T]}\|\overline{Y}(t)\|^2<\infty$.

Вычислим с помощью формулы Ито скалярное произведение $\langle \overline{Y}(T), N\overline{\chi}(T)\rangle$

$$\langle \overline{Y}(T), N\overline{\chi}(T)\rangle = \int_0^T \langle \widetilde{\Upsilon}(\Theta^1(t)) - \widetilde{\Upsilon}(\Theta^2(t)), \widetilde{\Theta}^1(t) - \widetilde{\Theta}^2(t)\rangle\, dt \\ + \int_0^T \langle N\overline{\chi}(t), \overline{Z}(t) d\widehat{W}(t)\rangle + \int_0^T \langle \overline{Y}(t), N\overline{B}\widehat{W}(t)\rangle.$$

Отсюда вытекает равенство

$$\mathbf{E}\langle U_0(\chi^1(T)) - U_0(\chi^2(T)), N\overline{\chi}(T)\rangle \\ = \mathbf{E}\left[\int_0^T \langle \widetilde{\Upsilon}(\Theta^1(t)) - \widetilde{\Upsilon}(\Theta^2(t)), \widetilde{\Theta}^1(t) - \widetilde{\Theta}^2(t)\rangle\, dt\right].$$

Используя оценки из условий **C 4.2** и (4.19), (4.21) из **C 4.4**, мы получим неравенства

$$C_1\|\chi^1(T) - \chi^2(T)\|^2 \leqslant \langle U_0(\chi^1(T)) - U_0(\chi^2(T)), N\overline{\chi}(T)\rangle \\ \leqslant -C_1\int_0^T \mathbf{E}\|\Theta^1(t) - \Theta^2(t)\|^2\, dt,$$

откуда следует $\Theta^1 = \Theta^2$. □

Аналогично доказывается соответствующее утверждение при выполнении оценки (4.20) вместо (4.19) из условия **C 4.4**.

Для того, чтобы построить решение полностью связанной системы ПОСДУ (4.17)–(4.18), воспользуемся методом гомотопического продолжения (см. также [9, 14]).

Напомним, что метод гомотопического продолжения или метод продолжения по параметру сводится к следующему. Предположим, что нам нужно найти решение уравнения $g(x) = 0, x \in X$, где $g(x)$ – функция со значениями в линейном пространстве Z. Пусть $\Phi(\mu, x)$ – семейство функций со значениями в Z, где μ – числовой параметр, принимающий значения из интервала $[0, 1]$. Включим рассматриваемое уравнение $g(x) = 0$ в семейство уравнений вида $\Phi(\mu, x) = 0$, полагая, что $\Phi(\mu, x)$ имеет вид

$$\Phi(\mu, x) = \mu g(x) + (1-\mu)\widehat{N}(x - x_0),$$

где $\widehat{N} : X \to Z$ – линейное обратимое отображение. Зная решение уравнения $\Phi(x, \mu) = 0$ при $\mu = 0$ и используя свойства корней этого уравнения при $\mu \in [0, 1]$, можно построить его решение при $\mu = 1$.

Мы применим этом метод к построению решения системы (4.17)–(4.18), построив предварительно решение более простого ПОСДУ.

Лемма 4.2. *Пусть* $(b^0, F^0, B^0) \in \mathcal{D}$, $\kappa^0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$. *Тогда существует единственное решение* $(\chi, Y, Z) \in \mathcal{D}$ *системы* ПОСДУ

$$d\chi(t) = [QY(t) - b^0(t)]\,dt + [QZ(t) - B^0(t)]\,d\widehat{W}(t), \quad \chi(0) = \chi, \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned} dY(t) &= -[F^0(t) - N\chi(t)]\,dt + Z(t)\,d\widehat{W}(t), \\ Y(T) &= N\chi(T) + \alpha, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Доказательство. Рассмотрим ОСДУ

$$\widehat{Y}(t) = \alpha + \int\limits_t^T [\widehat{Y}(\theta) + F^0(\theta) - Nb^0(\theta)]\,d\theta - \int\limits_t^T [2\widehat{Z}(\theta) - NB^0(\theta)]d\widehat{W}(\theta), \tag{4.26}$$

$$0 \leqslant t \leqslant T.$$

Как следует из теоремы 2.1, это уравнение имеет единственное адаптированное решение $(\widehat{Y}, \widehat{Z}) \in \mathcal{M}^2(H_2) \times \mathcal{M}^2(H_3)$.

Рассмотрим далее прямое СДУ

$$\widehat{\chi}(t) = \chi + \int\limits_0^t [\widehat{\chi}(\theta) + Q\widehat{Y}(\theta) - b^0(\theta)]\,d\theta - \int\limits_0^t [Q\widehat{Z}(\theta) - B^0(\theta)]d\widehat{W}(\theta), \tag{4.27}$$

$$0 \leqslant t \leqslant T.$$

Обозначив $Y(t) = \widehat{Y}(t) + N\widehat{\chi}(t), Z(t) = \widehat{Z}(t)$ можно легко проверить, что

$$\begin{aligned} dY(t) &= d\widehat{Y}(t) + d[N\widehat{\chi}(t)] \\ &= [-\widehat{Y}(t) - F^0(t) + Nb^0(t) + N\widehat{\chi}(t) + \widehat{Y}(t) - Nb^0(t)]\,dt \\ &+ [2\widehat{Z}(t) - NB^0(t) - \widehat{Z}(t) + NB^0(t)]\,d\widehat{W}(t) \\ &= -[F^0(t) - N\widehat{\chi}(t)]\,dt - \widehat{Z}(t)\,d\widehat{W}(t) \end{aligned}$$

и
$$d\widehat{\chi}(t) = [QY(t) - b^0(t)]\,dt + [Q\widehat{Z}(t) - B^0(t)]\,d\widehat{W}(t).$$
Отсюда вытекает, что $\widehat{\chi}(t) = \chi(t)$ и тройка процессов $(\chi(t), Y(t), Z(t))$ удовлетворяет ПОСДУ (4.17)–(4.18). Единственность решения системы (4.17)–(4.18) вытекает из единственности решения (4.26)–(4.27). В свою очередь, единственность решения (4.26)–(4.27) следует из теоремы 4.1.

На следующем шаге для $\mu \in [0,1]$ рассмотрим функции
$$\begin{aligned} b^\mu(\chi, Y, Z) &= (1-\mu)QY - \mu b(\chi, Y, Z),\\ B^\mu(\chi, Y, Z) &= (1-\mu)Qz - \mu B(\chi, Y, Z),\\ F^\mu(\chi, Y, Z) &= (1-\mu)N\chi - \mu F(\chi, Y, Z),\\ U_0^\mu(\chi) &= \mu U_0(\chi) + (1-\mu)N\chi. \end{aligned}$$
Из лемм 4.1 и 4.2 следует, что существует единственное решение системы
$$\chi(t)=\chi+\int_0^t [b^\mu(\Theta(\tau))-b^0(\tau)]\,d\tau+\int_0^t [B^\mu(\Theta(\tau))-B^0(\tau)]\,d\widehat{W}(\tau), \quad (4.28)$$
$$Y(t)=(U_0^\mu(\chi(T))+\kappa^0)-\int_0^t [F^\mu(\Theta(\tau))-F^0(\tau)]\,d\tau-\int_0^t Z(\tau)\,d\widehat{W}(\tau), \quad (4.29)$$
по крайней мере при $\mu = 0$. □

Покажем теперь, что из существования единственного решения системы (4.28)–(4.29) для $\mu = \mu^0 \in [0,1)$ вытекает, что существует число $\delta_0 > 0$ такое, что существует единственное решение (4.28)–(4.29) и для $\mu = \mu^0 + \delta$, где $\delta \in [0, \delta_0]$.

Для $\Theta = (\chi, \alpha, v) \in D$ обозначим
$$\Upsilon^\mu(\Theta) = (-F^\mu(\Theta), b^\mu(\Theta), B^\mu(\Theta)) \in D.$$

Лемма 4.3. *Пусть выполнены условия* **C 4.2**–**C 4.4** *и при* $\mu = \mu_0 \in [0,1]$ *система* (4.28)–(4.29) *имеет адаптированное решение* $\Theta^{\mu_0}(t) = (\chi^{\mu_0}(t), Y^{\mu_0}(t), Z^{\mu_0}(t))$, *принадлежащее* $\mathcal{D}$ *для* $(b^\mu, B^\mu, F^\mu) \in \mathcal{D}$. *Тогда существует такая константа* $\delta_0 \in [0,1)$, *зависящая только от* C_1, C_2 *и* T, *что при* $\mu = \mu_0 + \delta$, *где* $\delta \in [0, \delta_0]$, *система* (4.28)–(4.29) *имеет адаптированное решение* $(\chi^\mu(t), Y^\mu(t), Z^\mu(t))$ *также принадлежащее* $\mathcal{D}$.

Доказательство. Пусть $\delta \in [0,1]$. По определению справедливы следующие равенства

$$b^{\mu_0+\delta}(\Theta) = b^{\mu_0}(\Theta) + \delta(QY + b(\Theta)), B^{\mu_0+\delta}(\Theta) = B^{\mu_0}(\Theta) + \delta(QZ + B(\Theta)),$$

$$F^{\mu_0+\delta}(\Theta) = F^{\mu_0}(\Theta) + \delta(N\chi + F(\Theta)), U_0^{\mu_0+\delta}(\chi) = U_0^{\mu_0}(\chi) + \delta(-N\chi + U_0(\chi)).$$

Рассмотрим систему ПОСДУ

$$\chi_{k+1}(t) = \chi + \int_0^t [b^{\mu_0}(\Theta_{k+1}(\tau)) + \delta[QY_k(\tau) + b(\Theta_k(\tau))] - b^0(\tau)]\, d\tau + \tag{4.30}$$

$$\int_0^t [B^{\mu_0}(\Theta_{k+1}(\tau)) + \delta[QZ_k(\tau) + B(\Theta_k(\tau))] - B^0(\tau)]\, d\widehat{W}(\tau),$$

$$Y_{k+1}(t) = [U_0^{\mu_0}(\chi_{k+1}(T)) + \delta[(-N\chi_k(T) + (U_0(\chi_k(T)))]$$

$$+ \int_t^T F^{\mu_0}(\Theta_{k+1}(\tau))\, d\theta + \int_t^T [\delta[N\chi_k(\tau) + F(\Theta_k(\theta))] - F^0(\tau)]\, d\tau \tag{4.31}$$

$$- \int_t^T Z_{k+1}(\tau)\, d\widehat{W}(\tau).$$

Обозначим $\overline{Y}_{k+1} = Y_{k+1} - Y_k$, $\overline{\chi}_{k+1} = \chi_{k+1} - \chi_k$ и, используя формулу Ито, вычислим $\mathbf{E}\langle \overline{Y}_{k+1}(t), N\overline{\chi}_{k+1}(t)\rangle$. При этом мы получим

$$\delta\, \mathbf{E}\langle U_0^{\mu_0}(\chi_{k+1}(T)) - U_0^{\mu_0}(\chi_k(T)), N\overline{\chi}_{k+1}(T)\rangle$$

$$+(1-\delta)\mathbf{E}\langle N\overline{X}_{k+1}(T), N\overline{\chi}_{k+1}(T)\rangle$$

$$= \mathbf{E}\int_0^T \langle \widetilde{\Upsilon}^{\mu_0}(\Theta_{k+1}(\tau)) - \widetilde{\Upsilon}^{\mu_0}(\Theta_k(\tau)), \widetilde{\Theta}_{k+1}(\tau) - \widetilde{\Theta}_k(\tau)\rangle\, d\tau$$

$$+\delta\, \mathbf{E}\int_0^T \langle \widetilde{\Theta}_k(\tau) + \widetilde{\Upsilon}^{\mu_0}(\Theta_k(\tau)) - \widetilde{\Upsilon}^{\mu_0}(\Theta_{k-1}(\tau)), \widetilde{\Theta}_{k+1}(\tau) - \widetilde{\Theta}_k(\tau)\rangle\, d\tau.$$

С учетом оценок из условий **C 4.3** и оценок (4.19), (4.21) из условия **C 4.4**, мы приходим к неравенству

$$\mathbf{E}\|\overline{\chi}_{k+1}(T)\|^2 + \mathbf{E}\int_0^T \|\overline{\Theta}_{k+1}(\tau)\|^2\, d\tau$$

$$\leqslant \frac{\delta(1+C)}{C_3}\left[\mathbf{E}\left[\|\overline{\chi}_k(T)\|\,\|\overline{\chi}_{k+1}(T)\|+\int\limits_0^T \mathbf{E}[\|\overline{\Theta}_{k+1}(\theta)\|\,\|\overline{\Theta}_k(\theta)\|\right]d\theta\right],$$

где $C_3=\min(1,C_1)$.

Используя элементарное неравенство $ab\leqslant \frac{a^2}{2\epsilon}+\frac{b^2\epsilon}{2}$ и выбирая $\epsilon=\frac{C_3}{\delta(1+C)}$, мы получим оценку

$$\mathbf{E}\|\overline{\chi}_{k+1}(T)\|^2+\mathbf{E}\int\limits_0^T\|\overline{\Theta}_{k+1}(\tau)\|^2\,d\tau$$

$$\leqslant\left[\frac{\delta(1+C)}{C_3}\right]^2\left[\mathbf{E}\|\overline{\chi}_k(T)\|^2+\mathbf{E}\int\limits_0^T\|\overline{\Theta}_k(t)\|^2\,dt\right]. \qquad (4.32)$$

Наконец, используя стандартную технику, выведем оценку для

$$\overline{\chi}_k(T)=\int\limits_0^T b^{\mu_0}(\Theta_k(\tau))-b^{\mu_0}(\Theta_{k-1}(\tau))+\delta(Q\overline{Y}_{k-1}(\tau)$$

$$+b(\Theta_{k-1}(\tau))-b(\Theta_{k-2}(\tau))]\,d\tau+\int\limits_0^T[B^{\mu_0}(\Theta_k(\tau))-B^{\mu_0}(\Theta_{k-1}(\tau))$$

$$+\delta(Q\overline{Z}_{k-1}(\tau)B(\Theta_{k-1}(\tau)))-B(\Theta_{k-2}(\tau))]\,d\widehat{W}(\tau).$$

Как и выше, используя оценки из условий **C 4.3** и **C 4.4**, нетрудно показать, что существует такая константа K, зависящая только от δ, R, T и C, что

$$\mathbf{E}\|\chi_k(T)-\chi_{k-1}(T)\|^2$$
$$\leqslant K\left[\int\limits_0^T\mathbf{E}[\|\widetilde{\Theta}_k(\tau)-\widetilde{\Theta}_{k-1}(\tau)\|^2+\|\widetilde{\Theta}_{k-1}(\tau)-\widetilde{\Theta}_{k-2}(\tau)\|^2]\,d\tau\right].$$

Из последнего неравенства и (4.32) следует, что существует такая константа K_1, зависящая только от C, C_1, R и T, что

$$\int_0^T \mathbf{E}\|\widetilde{\Theta}_{k+1}(\theta)) - \widetilde{\Theta}_k(\tau))\|^2\, d\tau$$

$$\leqslant K_1\delta^2 \left[\int_0^T \mathbf{E}[\|\widetilde{\Theta}_k(\tau) - \widetilde{\Theta}_{k-1}(\tau)\|^2 + \|\overline{\Theta}_{k-1}(\tau)\|^2]\, d\tau\right].$$

Таким образом, существует такая константа $\delta_0 \in (0,1)$, зависящая только от C, C_1 и T, что

$$\int_0^T \mathbf{E}\|\overline{\Theta}_{k+1}(\tau))\|^2\, d\tau \leqslant \frac{1}{4}\int_0^T \mathbf{E}\|\overline{\Theta}_k(\tau))\|^2\, d\tau + \frac{1}{8}\int_0^T \mathbf{E}\|\overline{\Theta}_{k-1}(\tau))\|^2\, d\tau \quad (4.33)$$

для любого $k \geqslant 1$ и $0 < \delta \leqslant \delta_0$.

Далее нам понадобится следующее легко проверяемое по индукции утверждение. Если $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ – последователнльость положительных вещественных чисел, подчиняющихся оценке

$$a_{k+1} \leqslant \frac{1}{4}a_k + \frac{1}{8}a_{k-1}, \quad k \geqslant 1,$$

то существует такая константа $L > 0$, что $a_k \leqslant L2^{-k}$.

Применяя эту оценку нетрудно показать, что $\Theta_k(\theta)$ представляет собой последовательность Коши в пространстве $\mathcal{D}$ и, следовательно, в силу полноты $\mathcal{D}$, существует предел этой последовательности, который мы обозначим $\Theta(t) = (\chi(t), Y(t), Z(t))$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ в соотношениях (4.30)–(4.31), покажем, что $\Theta(t)$ удовлетворяет системе (4.28), (4.29) для $\mu = \mu_0 + \delta$, где $0 < \delta \leqslant \delta_0$.

$\square$

Аналогично доказывается соответствующее утверждение при выполнении **C 4.2**–**C 4.3** и оценок (4.20), (4.21) из условия **C 4.4**.

Из лемм 4.1 и 4.3 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 4.4. *Пусть выполнены условия* **C 4.2**–**C 4.4**. *Тогда существует единственное адаптированное решение* (χ, Y, Z) *системы* (4.17)–(4.18).

Покажем наконец, что функция $U(s,\chi)=Y(s)$ является вязкостным решением системы (4.5).

Теорема 4.5. *Пусть выполнены условия* **С 4.1–С 4.4** *и случайный процесс* $\Theta(t)=(\chi(t),Y(t),Z(t))$ *удовлетворяет системе* (4.17)–(4.18). *Тогда функция* $U(s,\chi)=Y(s)$ *является непрерывным вязкостным решением задачи Коши* (4.5). *При этом первая компонента и функции* $U=(u,V)$ *является вязкостным решением задачи* (4.1).

Доказательство. Непрерывность функции

$$U(s,\chi)=(u(s,x),\nabla u(s,x)),$$

является следствием непрерывности в среднем квадратичном по начальным данным решения системы (4.17)–(4.18).

Для того, чтобы показать, что $U(s,\chi)=(u(s,x),V(s,x,y))^*$ – это вязкостное решение задачи Коши (4.5), рассмотрим скалярную функцию

$$\begin{aligned}\widetilde\Psi(t,\chi(t),\beta(t))&=\langle\beta(t),\widehat U(t,\chi(t))\rangle\\&=\langle\eta(t),u_0(\xi(t)\rangle+\langle\kappa(t),u(t,\xi(t))\rangle+\langle\eta(t),\nabla_{\zeta(t)}u(t,\xi(t))\rangle.\end{aligned}$$

Напомним, что процессы $\kappa(t)$ и $\eta(t)$, определенные в параграфе 2, линейно зависят от параметра $h\in Y$ и обозначим

$$\widetilde\Psi(t,\chi(t),\beta(t))=\langle\widetilde h,U(t,\chi(t))\rangle,\quad \widetilde h=(h,h,h)^*\in K_2.$$

Выберем функцию

$$\begin{aligned}\widetilde\Phi(t,\chi(t),\beta(t))&=\langle\beta(t),\widehat\Phi(t,\chi(t))\rangle\\&=\langle\eta(t),\phi(t,\xi(t))\rangle+\langle\kappa(t),\phi(t,\xi(t))\rangle+\langle\eta(t),\nabla_{\zeta(t)}\phi(t,\xi(t))\rangle\end{aligned}$$

из класса $C^{1,2}$ и точку $(s,\chi)\in[0,T]\times K_1$ так, чтобы в точке (s,χ) достигался локальный максимум функции $U^l(s,\chi)-\Phi^l(s,\chi)$, где

$$\widetilde\Phi(t,\chi(t),\beta(t))=\langle\widetilde h,\Phi(t,\chi(t))\rangle\quad\text{и}\quad\widetilde\Psi((t,\chi(t),\beta(t))=\langle\widetilde h,U(t,\chi(t)).$$

Без потери общности мы предположим, что $\Phi_l(s,\chi)=U_l(s,\chi)$. При этом для любого момента остановки τ мы получим оценку

$$U_l(\tau,\chi_{s,\chi}(\tau))-\Phi_l(\tau,\chi_{s,\chi}(\tau))\leqslant 0,\quad l=1,\dots,d_2.\tag{4.34}$$

Из формулы Ито и (4.17) вытекает, что

$$\Phi_l(\tau,\chi(\tau))=\Phi_l(s,\chi)+\int\limits_s^\tau\left[\frac{\partial\Phi_l}{\partial\theta}+\mathcal G\Phi_l+\widehat C^i_{ql}\mathcal M^k_i\nabla_k\overline\Phi_q+\widehat c_{lq}\Phi_q\right](\theta,\chi(\theta))\,d\theta$$

$$+\int\limits_s^\tau \langle \nabla\Phi_l(\theta,\chi(\theta)), B(\chi(\theta),Y(\theta),Z_l(\theta))\, d\widehat{W}(\theta)\rangle.$$

С другой стороны, процесс Y удовлетворяет ОСДУ

$$Y_l(s) = [\Pi^*(s,T)U_0]_l(\chi(T)) + \int\limits_s^T F(\chi(\theta),Y(\theta),Z_l(\theta))\, d\theta - \int\limits_s^T Z_l(\theta)\, d\widehat{W}(\theta),$$

где

$$\Pi^*(s,T)U_0(\chi(T)) = (\Gamma^*(s,T)u_0(\xi(T)), \Xi^*(s,T)V_0(\chi(T)))^*.$$

Поскольку решение $Y(t) = U(t,\chi(t))$ уравнения (4.18) единственно, то

$$U_l(s,\chi) = Y_l(s) = Y_l(\tau) + \int\limits_s^\tau F(\chi(\theta),Y(\theta),Z_l(\theta))\, d\theta - \int\limits_s^\tau Z_l(\theta)\, d\widehat{W}(\theta)$$

$$= U_l(\tau,\chi(\tau)) + \int\limits_s^\tau F(\chi(\theta),Y(\theta),Z_l(\theta))\, d\theta - \int\limits_s^\tau Z_l(\theta) d\widehat{W}(\theta).$$

Подставляя последнее соотношение в (4.34), получим, что для всех $l = 1,\dots,d_2$, справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
0 &\geqslant U_l(\tau,\chi(\tau)) - \Phi_l(\tau,\chi(\tau))\\
&= U_l(s,\chi) - \Phi_l(s,\chi) - \int\limits_s^\tau \left[\frac{\partial\Phi_l}{\partial\theta} + \mathcal{A}\Phi_l\right](\theta,\chi(\theta))\, d\theta\\
&+ \int\limits_s^\tau F(\chi(\theta),Y(\theta),Z_l(\theta))\, d\theta + \int\limits_s^\tau Z_l(\theta)\, d\widehat{W}(\theta)\\
&- \int\limits_s^\tau \langle \nabla\Phi_l(\theta,\chi\theta)), B(\chi(\theta),Y(\theta),Z_l(\theta))\, d\widehat{W}(\theta)\rangle,
\end{aligned}$$

где

$$(\mathcal{A}\Phi)_l = \mathcal{G}\Phi_l + \widehat{C}^i_{ql}\mathcal{M}^k_i\nabla_k\Phi_q + \widehat{c}_{lq}\Phi_q.$$

Поскольку, по предположению, $U_l(s,\chi) - \Phi_l(s,\chi) = 0$, то, вычисляя математическое ожидание в последнем неравенстве, получим оценку

$$\mathbf{E}\left(\int_s^\tau \Lambda_l(\theta,\chi(\theta),Y(\theta),Z_l(\theta))\,d\theta\right) \geqslant 0, \tag{4.35}$$

где

$$\Lambda_l(s,\chi,Y,Z_l) = \left[\frac{\partial\Phi_l}{\partial\theta} + \mathcal{A}\Phi_l\right](s,\chi) - F(\chi,Y,Z_l).$$

Для того, чтобы доказать, что $U(s,\chi)$ является субрешением (4.1) нужно доказать, что $\Lambda_l(s,\chi,Y,Z^l) \geqslant 0$. Предположим, что справедливо обратное утверждение, т.е., что существует такое число $\delta_0 < 0$, что $\Lambda_l(s,x,y,p,q_l) < \delta_0$. Пусть

$$\tau_1 = \inf\{\theta > s : \Lambda_l(\theta,\chi(\theta),Y(\theta),Z_l(\theta)) \leqslant \delta_0\} \wedge T.$$

По определению неравенство (4.35) выполняется для любого момента остановки, а следовательно и для момента $\tau_1 > s$. При этом мы приходим к противоречию, так как

$$0 > \delta_0\mathbf{E}(\tau_1 - s) \geqslant \mathbf{E}\left(\int_s^{\tau_1} \Lambda_l(\theta,\chi(\theta),Y(\theta),Z_l(\theta))\,d\theta\right) \geqslant 0,$$

и, следовательно, $\Lambda_l(s,\chi,Y,Z_l) \geqslant 0$. Отсюда вытекает, что $U(s,\chi)$ – это субрешение задачи (4.5), (4.8). Аналогично можно показать что $U(s,\chi) = (u(s,x),V(s,x,y))$ является суперрешением задачи (4.5), (4.8) и, следовательно, $U(s,x)$ является вязкостным решением этой задачи. Из полученных результатов немедленно следует, что компонента $u(s,x)$ решения $U(s,x,y)$ является вязкостным решением задачи Коши (4.1) □

В заключение отметим, что при применении подхода, основанного на ПОСДУ, к решению задачи Коши (4.1) нужно продифференцировать исходную задачу один раз, чтобы включить ее в квазилинейную систему нужной структуры. С другой стороны, для того, чтобы применить к (4.1) подход, основанный на СДУ [3], нужно включить ее в семилинейную систему, а для этого нужно продифференцировать исходную систему трижды. Естественно. что при этом требуется выполнение более жестких ограничений на данные задачи (4.1).

Литература

1. Я. И. Белопольская, Ю. Л. Далецкий, *Исследование задачи Коши для систем квазилинейных уравнений с помощью марковмких процессов.* — Изв. ВУЗ Математика No. 12 (1978), 6–17.
2. Ya. I. Belopolskaya, Yu. L. Dalecky, *Stochastic equations and differential geometry.* Kluwer (1990).
3. Я. И. Белопольская, Ю. Л. Далецкий, *Марковские процессы, ассоциированные с нелинейными параболическими системами.* — ДАН СССР **250**, No. 1 (1980), 521–524.
4. J. F. Pommaret, *Systems of partial differential equations and Lie pseudogroups.* Gordon and Breach Sci Publ. N.Y, 1978.
5. Ya. Belopolskaya, *Probability approach to solution of nonlinear parabolic equations.* — Problems Math. Anal. **13** (1992), 21–35.
6. E. Pardoux, S. Peng, *Adapted solution of a backward stochastic differential equation.* — Systems Control Lett. **14** (1990), 55–61.
7. E. Pardoux, S. Peng, *Backward stochastic differential equations and qasilinear parabolic partial differential equations.* — Lect. Notes CIS **176** Springer-Verlag (1992).
8. S. Peng *Probabilistic interpretation for systems of quasilinear parabolic partial differential equations.* — Stoch. Stoch. Rep. **37** (1991), 61–74.
9. J. Ma, J. Yong, *Forward-backward stochastic differential equations and their applications.* — Lect. Notes Math. **1702** Springer-Verlag (1999).
10. H. Pham, *Continuous-time stochastic control and optimization with financial applications.* Series Stochastic Modeling and Applied Probability **61** Springer-Verlag (2009).
11. P. Cheredito, H. Soner, N. Touzi, N. Victoir, *Second order backward stochastic differential equations and fully nonlinear parabolic PDEs.* — Comm. Pure Appl. Math. **60**, 7 (2007), 1081–1110.
12. M. Crandall, H. Ishii, P. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations.* — Bull. AMS **27**, No. 1 (1992), 1–67.
13. Ya. Belopolskaya, *Probabilistic approaches to nonlinear parabolic equations in jet-bundles.* — Global Stoch. Anal. **1**, No. 1 (2010), 3–40.
14. Y. Hu, S. Peng, *Solution of forward-backward stochastic differential equations.* — Probab. Theory Relat. Fields **103** (1995), 273–283.

Belopolskaya Ya. I., Woyczynski W. A. Probabilistic approach to viscosity solutions of the Cauchy problem for systems of fully nonlinear parabolic equations.

In this paper, we discuss a probabilistic approach to the construction of a viscosity solution of the Cauchy problem for a system of nonlinear parabolic equations. Our approach is based on a reduction of the original problem to a system of quasilinear parabolic equation in the first step and to a system of fully coupled forward-backward stochastic differential

equations in the second step. The solution of the stochastic problem allows us to construct a probabilistic representation of a viscosity solution of the original problem and state conditions to ensure the existence and uniqueness of this solution.

Поступило 23 ноября 2011 г.

С.-Петербургский Государственный
Архитектурно-Строительный Университет,
ул. 2-я Красноармейская 4,
Санкт-Петербург 190005, Россия
E-mail: yana@yb1569.spb.edu

Кэйз Вестерн Резерв Университет
США, OH 44106, Кливленд,
10900 Евклид Авеню
E-mail: waw@case.edu