Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 396, 2011 г.

Д. В. Батькович

ЛОКАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ

§1. Введение

Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ с нулевым средним и конечной дисперсией σ^2. В силу центральной предельной теоремы последовательность распределений нормированных сумм $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ слабо сходится к стандартному нормальному закону.

Для случая, когда у случайных величин нет вторых моментов, предельное поведение распределений нормированных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин описывает другой вид предельных теорем, в которых условием на случайную величину является правильное поведение хвостового распределения, именно:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\xi_1 < x) &= \frac{a_-}{|x|^{\alpha}}(1+g(x)), \qquad x<0, \\ \mathbf{P}(\xi_1 > x) &= \frac{a_+}{x^{\alpha}}(1+g(x)), \qquad x>0, \end{aligned} \tag{1}$$

где функция $g(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$, $\alpha \in (0,2)$. При этом условии распределения сумм $\frac{1}{n^{1/\alpha}}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ слабо сходятся к устойчивому распределению с показателем α.

Важно отметить, что, в отличие от центральной предельной теоремы, в предельной теореме о сходимости к устойчивому закону с показателем $\alpha \in (0,2)$ предельное распределение имеет такую же степенную асимптотику хвостового распределения, как и ξ_1, только с другой константой, зависящей от α, a_-, a_+.

Линник [1–3] первым начал изучать асимптотику больших уклонений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ в случае, когда нарушается условие Крамера

$$\mathbf{E}\, e^{t\xi_1} < \infty, \quad |t| < t_0.$$

Ключевые слова: большие уклонения, устойчивые случайные величины, предельные теоремы.

Метод Линника основан на прямом анализе характеристической функции и технически очень сложен. Позже этот метод был значительно упрощен в работе С. В. Нагаева [4], где одним из условий было (1), но при $\alpha > 2$. Для случайных величин, имеющих симметричное распределение и удовлетворяющих (1), в [5] был предложен новый подход к доказательству предельных теорем, основанный на доказательстве сходимости (в L_2) определенным образом скорректированных последовательностей нормированных сумм к невероятностным распределениям.

В данной работе мы будем использовать технику, предложенную в [5], но, в отличие от [5], мы не будем предполагать симметричность распределений случайных величин ξ_i. Как и в [5], основные утверждения будут сформулированы в терминах предельных теорем в пространстве L_2.

Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, удовлетворяющих (1) с $\alpha > 2$ и $\alpha \notin \mathbb{N}$. Для этой последовательности справедлива центральная предельная теорема, то есть последовательность распределений $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ слабо сходится к стандартному нормальному закону. Мы будем рассматривать распределения сумм с более слабой нормировкой $\frac{1}{n^{1/\alpha}}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$. Очевидно, что такая сумма не имеет слабого предела, но мы построим последовательность операторов (каждый оператор имеет вид свертки с быстро осциллирующей функцией) таким образом, что скорректированная этими операторами последовательность распределений нормированных сумм будет сходиться в L_2 к некоторой вещественнозначной функции q^α, преобразование Фурье которой имеет вид:

$$\widehat{q^\alpha} = \exp(c_0^{(\alpha)} p^\alpha), \quad p > 0,$$

или (в зависимости от α)

$$\widehat{q^\alpha} = \exp(c_0^{(\alpha)} p^\alpha - c_1^{(\alpha)} p^{4m}), \quad p > 0,$$

где $m \in \mathbb{N}$, причем $\alpha < 4m$. Отметим, что, в силу вещественнозначности, преобразование Фурье достаточно задать для положительных p. Используя доказанные теоремы о сходимости в L_2, мы получим локальные предельные теоремы для больших уклонений.

Далее мы рассмотрим случай, когда распределение случайных величин имеет более точную асимптотику хвостового распределения, именно

$$\mathbf{P}(\xi_1 < x) = \frac{a_-}{|x|^\alpha} + \frac{b_-}{|x|^\beta}(1 + g(x)), \quad x < 0,$$

$$\mathbf{P}(\xi_1 > x) = \frac{a_+}{x^\alpha} + \frac{b_+}{x^\beta}(1 + g(x)), \quad x > 0,$$

где $\beta > \alpha$, а $g(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$.

В этом случае, при некоторых дополнительных условиях, мы покажем, что при больших x, именно, когда

$$\sqrt{n}\frac{1}{xn^{1/\alpha}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

плотность $p_n(x)$ распределения суммы $\frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$ ведет себя как

$$\begin{aligned} p_n^{(\alpha)}(x) &= \frac{A_+}{x^{\alpha+1}} + \frac{n}{n^{\frac{[\alpha]+1}{\alpha}}} \frac{g_{[\alpha]+2}}{x^{[\alpha]+2}} \cdots + \frac{n}{n^{\frac{[\beta]}{\alpha}}} \frac{g_{[\beta]+1}}{x^{[\beta]+1}} \\ &\quad + \frac{n}{n^{\beta/\alpha}} \frac{B_+}{x^{\beta+1}} + O\left(\frac{n}{n^{\frac{[\beta]+1}{\alpha}}} \frac{1}{x^{[\beta]+2}}\right), \quad x > 0, \\ p_n^{(\alpha)}(x) &= \frac{A_-}{|x|^{\alpha+1}} + \frac{n}{n^{\frac{[\alpha]+1}{\alpha}}} \frac{f_{[\alpha]+2}}{|x|^{[\alpha]+2}} \cdots + \frac{n}{n^{\frac{[\beta]}{\alpha}}} \frac{f_{[\beta]+1}}{|x|^{[\beta]+1}} \\ &\quad + \frac{n}{n^{\beta/\alpha}} \frac{B_-}{|x|^{\beta+1}} + O\left(\frac{n}{n^{\frac{[\beta]+1}{\alpha}}} \frac{1}{|x|^{[\beta]+2}}\right), \quad x < 0, \end{aligned}$$

где числа g_j и f_j зависят от распределения случайной величины ξ_1.

§2. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин с нормировкой $n^{1/\alpha}$

Пусть $\{\xi_i\}_{i=0}^{\infty}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Мы предположим, что распределение случайной величины ξ_1 удовлетворяет условию (1). Положим $A_+ = \alpha a_+$ и $A_- = \alpha a_-$, данное обозначение будем использовать и далее.

Обозначим через $\mathbf{P}_1$ распределение случайной величины ξ_1, а через $f = f(p)$ – ее характеристическую функцию. Для $j < \alpha$ через $\mu_j = \mathbf{E}\,\xi_1^j$ обозначим момент порядка j случайной величины ξ_1, а через s_j – соответствующий семиинвариант.

Дополнительно мы предположим, что функция f для некоторых $K > 0$, $\delta > 0$ удовлетворяет условию

$$|f(p)| \leqslant \frac{K}{|p|^{\delta}}, \tag{2}$$

так что для $n > \frac{2}{\delta}$ распределение суммы $\sum\limits_{i=0}^{n} \xi_i$ имеет квадратично интегрируемую плотность.

Из (1) следует, что распределение $\mathbf{P}_1$ принадлежит области притяжения нормального закона [7]. В этом параграфе мы рассмотрим распределения нормированных сумм

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \sum_{i=0}^{n} \xi_i$$

случайных величин ξ_i с более слабой нормировкой $n^{\frac{1}{\alpha}}$. Ясно, что такая последовательность не имеет слабого предела. Тем не менее, мы покажем, что после некоторой коррекции последовательность соответствующих плотностей является сходящейся в L_2.

Здесь и далее мы не будем приводить доказательства утверждений, которые ничем не отличаются от аналогичных в работе [5].

2.1. Случай $\alpha \in \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} ((4m-2, 4m-1) \cup (4m-1, 4m))$. Заметим, что характеристическую функцию $f(p)$ случайной величины ξ_1 можно представить как

$$\begin{aligned} f(p) = \mathbf{E}\, e^{ip\xi_1} &= 1 + ip\mu_1 + \frac{\mu_2 (ip)^2}{2!} + \dots + \frac{\mu_k (ip)^k}{k!} \\ &+ \mathbf{E}\left(e^{ip\xi_1} - 1 - ip\xi_1 - \frac{(ip\xi_1)^2}{2!} - \dots - \frac{(ip\xi_1)^k}{k!}\right) \\ &= 1 + ip\mu_1 + \frac{\mu_2 (ip)^2}{2!} + \dots + \frac{\mu_k (ip)^k}{k!} + T(p), \end{aligned} \tag{3}$$

где $k = [\alpha]$, а

$$T(p) = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(e^{ipx} - 1 - ipx - \frac{(ipx)^2}{2!} - \dots - \frac{(ipx)^k}{k!}\right) \mathbf{P}_1(dx). \tag{4}$$

Лемма 1. (1) $T(p) \sim c_0^{(\alpha)} p^\alpha$ *при* $p \to 0_+$, *где*

$$c_0^{(\alpha)} = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(e^{ix} - 1 - ix - \frac{(ix)^2}{2!} - \dots - \frac{(ix)^k}{k!} \right) \frac{dx}{|x|^{\alpha+1}}$$
$$= -\frac{\pi}{\Gamma(\alpha+1)\sin\pi\alpha}(A_-(-i)^{-\alpha} + A_+ i^{-\alpha}),$$

при этом $\operatorname{Re} c_0^{(\alpha)} > 0$.

(2) $T(p) \sim \overline{c_0^{(\alpha)}} |p|^\alpha$ *при* $p \to 0_-$.

Доказательство. Представим $T(p)$ в виде,

$$T(p) = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(e^{ipx} - 1 - ipx - \frac{(ipx)^2}{2!} - \dots - \frac{(ipx)^k}{k!} \right) \mathbf{P}_1(dx)$$
$$= \int\limits_{-1}^{1} (\dots)\, \mathbf{P}_1(dx) + \int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} (\dots)\, \mathbf{P}_1(dx).$$

Ясно, что $\int\limits_{-1}^{1} (\dots)\, \mathbf{P}_1(dx) = o(p^\alpha)$. Учитывая (2), получаем для $p > 0$

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} (\dots)\, \mathbf{P}_1(dx) = A_+ p^\alpha \int\limits_0^\infty \left(e^{ix} - 1 - ix - \frac{(ix)^2}{2!} - \dots - \frac{(ix)^k}{k!} \right) \frac{dx}{x^{\alpha+1}}$$

$$+ A_- p^\alpha \int\limits_{-\infty}^{0} \left(e^{ix} - 1 - ix - \frac{(ix)^2}{2!} - \dots - \frac{(ix)^k}{k!} \right) \frac{dx}{|x|^{\alpha+1}} + o(p^\alpha) = c_0 p^\alpha + o(p^\alpha).$$

Для $p < 0$ доказательство аналогично. □

Далее, из (3) и из леммы 1 следует, что

$$\log f(p) = v(p) + T(p) + o(|p|^\alpha), \tag{5}$$

где

$$v(p) = s_1(ip) + \frac{s_2(ip)^2}{2!} + \dots + \frac{s_k(ip)^k}{k!}.$$

Лемма 2. *Существуют такие* ε_0, $d_0 > 0$, *что для* $|p| \leqslant \varepsilon_0$ *справедливо неравенство*

$$0 \leqslant |f(p) e^{-v(p)}| \leqslant e^{d_0 |p|^\alpha}.$$

Доказательство. Доказательство леммы следует из (5). □

Теперь мы определим корректирующую последовательность и установим некоторые ее свойства. Выберем функцию $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$, такую, что $\chi(x) = 1$ при $|x| \leqslant 1$ и $\chi(x) = 0$ при $x \geqslant 2$. Далее, для каждого α мы выберем и зафиксируем число $\gamma = \gamma(\alpha)$, так что $\gamma = 4m$, если $m > 1$ или $\alpha \in (3, 4)$ и $\gamma \in (\alpha, \min(4, \frac{2\alpha}{4-\alpha}))$, если $\alpha \in (2, 3)$.

Выберем и зафиксируем положительную константу $c_1^{(\alpha)}$ и определим последовательность функций $\Psi_n^{(\alpha)}$, $n \in \mathbb{N}$, полагая

$$\Psi_n^{(\alpha)}(p) = \exp\left(-n\Big(v\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big) + \frac{c_1^{(\alpha)} p^{4m}}{n}\Big)\chi\Big(\frac{|p|}{n^{1/\alpha - 1/\gamma}}\Big)\right). \tag{6}$$

Лемма 3. *Существует такое n_0, что для всех $n \geqslant n_0$*

$$\inf_p |\Psi_n^{(\alpha)}(p)| = 1.$$

Доказательство. Доказательство этой леммы полностью аналогично доказательству леммы 3 из [5]. □

Пусть $\mathbf{P}_n^{(\alpha)}$ – распределение случайной величины $\frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$, а $f_n^{(\alpha)}$ – соответствующая характеристическая функция. Имеем

$$f_n^{(\alpha)}(p) = \left(f\left(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\right)\right)^n = \left(1 + \frac{i\mu_1 p}{n^{1/\alpha}} + \dots + \frac{\mu_k (ip)^k}{k! n^{k/\alpha}} + T\left(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\right)\right)^n.$$

Напомним, что k – это целая часть α. Ясно, что такая последовательность функций не имеет предела. Для того, чтобы сделать ее сходящейся, мы умножим $f_n^{(\alpha)}$ на $\Psi_n^{(\alpha)}$, заданную формулой (6).

Теорема 1. *Последовательность $f_n^{(\alpha)} \Psi_n^{(\alpha)}$ сходится в $L_2(\mathbb{R})$ при $n \to \infty$ к функции $\widehat{q^\alpha}$, определенной формулой:*

$$\widehat{q^\alpha} = \exp(c_0^{(\alpha)} p^\alpha - c_1^{(\alpha)} p^{4m}), \quad p > 0. \tag{7}$$

Доказательство. Сходимость мы будем доказывать только для положительной полуоси, то есть в $L_2(\mathbb{R}_+)$. Для отрицательной доказательство будет аналогичным.

Для начала покажем, что для каждого $p \in \mathbb{R}_+$ $f_n^{(\alpha)}(p)\Psi_n^{(\alpha)}(p) \to \widehat{q^\alpha}(p)$. Заметим, что для каждого фиксированного p и достаточно больших n справедливо неравенство $n^{1/\gamma - 1/\alpha}p < 1$, так что

$$f_n^{(\alpha)}(p)\Psi_n^{(\alpha)}(p)$$
$$= \Big[\Big(1 + \frac{i\mu_1 p}{n^{1/\alpha}} + \ldots + \frac{\mu_k (ip)^k}{k! n^{k/\alpha}} + T\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)\Big)e^{-v(\frac{p}{n^{1/\alpha}})}\Big]^n e^{-c_1^{(\alpha)}p^{4m}}. \quad (8)$$

Используя (5) и лемму 1, получаем для $p > 0$

$$(f_n^{(\alpha)}\Psi_n^{(\alpha)})(p) = \exp\Big(n\Big(\log f\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big) - v\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)\Big)\Big)\exp(-c_1^{(\alpha)}p^{4m})$$

$$= \exp\Big(n\Big(v\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big) + c_0^{(\alpha)}\frac{p^\alpha}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big) - v\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)\Big)\Big)\exp(-c_1^{(\alpha)}p^{4m})$$

$$\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(c_0^{(\alpha)}p^\alpha - c_1^{(\alpha)}p^{4m}).$$

Покажем теперь, что $f_n\Psi_n^{(\alpha)}$ сходится к $\widehat{q^\alpha}$ не только поточечно, но и в $L_2(\mathbb{R}_+)$. Представим $f_n\Psi_n$ как

$$f_n^{(\alpha)}(p)\Psi_n^{(\alpha)}(p) = A_n(p) + B_n(p) \quad (9)$$

где

$$A_n(p) = f_n^{(\alpha)}(p)\Psi_n^{(\alpha)}(p)\mathbf{1}_{[0,2n^{1/\alpha-1/\gamma}]}(|p|)$$

и

$$B_n(p) = f_n^{(\alpha)}(p)\Psi_n^{(\alpha)}(p)\mathbf{1}_{(2n^{1/\alpha-1/\gamma},\infty)}(|p|).$$

Заметим, что для каждого $p \in \mathbb{R}$, $A_n(p) \to \widehat{q^\alpha}(p)$ при $n \to \infty$, а в силу леммы 2 функции $|A_n|^2$ мажорируются L_1-функцией $e^{2d_0p^\alpha - 2c_1^{(\alpha)}p^{4m}}$, при $p > 0$. Используя теорему Лебега, мы получаем, что $A_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \widehat{q^\alpha}$ в $L_2(\mathbb{R}_+)$.

Теперь для доказательства теоремы достаточно проверить, что $\|B_n\|_{L_2} \to 0$ при $n \to \infty$.

Заметим сначала, что на интервале $[2n^{1/\alpha-1/\gamma}, \infty)$ справедливо неравенство $M = \sup|f(p)| < 1$ и, следовательно,

$$|f(p)| \leqslant \min\Big(M, \frac{K}{p^\delta}\Big) = M\Big(1, \frac{K}{Mp^\delta}\Big). \quad (10)$$

Используя (10), получаем

$$\begin{aligned}
\|B_n\|_{L_2}^2 &= \int\limits_{2n^{1/\alpha}n^{-1/\gamma}}^{\infty} \left|f_n^{(\alpha)}(p)\Psi_n^{(\alpha)}(p)\right|^2 dp \\
&= \int\limits_{2n^{1/\alpha}n^{-1/\gamma}}^{\infty} \left|f\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)\right|^{2n} dp = n^{1/\alpha} \int\limits_{2n^{-1/\gamma}}^{\infty} |f(u)|^{2n} du \\
&\leqslant n^{1/\alpha} M^{2n} \Bigg(\int\limits_{2n^{-1/\gamma}}^{(K/M)^{1/\delta}} du + \int\limits_{(K/M)^{1/\delta}}^{\infty} \Big(\frac{K}{Mu^\delta}\Big)^{2n} du \Bigg) \\
&\leqslant n^{1/\alpha} M^{2n} \Big(\Big(\frac{K}{M}\Big)^{1/\delta} + \frac{1}{2n\delta - 1}\Big(\frac{K}{M}\Big)^{1/\delta}\Big).
\end{aligned}$$

Заметим, что последнее выражение стремится к 0 при $n \to \infty$. □

2.2. Случай $\alpha \in \bigcup\limits_{m\geqslant 1}((4m, 4m+1) \cup (4m+1, 4m+2))$**.** Как и ранее, мы можем представить $f(p)$ в виде:

$$\begin{aligned}
f(p) = \mathbf{E}\, e^{ip\xi_1} &= 1 + ip\mu_1 + \frac{\mu_2(ip)^2}{2!} + \dots + \frac{\mu_k(ip)^k}{k!} \\
&+ \mathbf{E}\left(e^{ip\xi_1} - 1 - ip\xi_1 - \ldots - \frac{\xi_1^k(ip)^k}{k!}\right) \\
&= 1 + ip\mu_1 + \frac{\mu_2(ip)^2}{2!} + \dots + \frac{\mu_k(ip)^k}{k!} + T(p),
\end{aligned} \tag{11}$$

где $k = [\alpha]$, а

$$T(p) = \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(e^{ipx} - 1 - ipx - \ldots - \frac{(ipx)^k}{k!}\Big) d\,\mathbf{P}_1(x). \tag{12}$$

Лемма 4. (1) $T(p) \sim c_0^{(\alpha)} p^\alpha$ *при* $p \to 0_+$, *где*

$$\begin{aligned}
c_0^{(\alpha)} &= \int\limits_{\mathbb{R}} \left(e^{ix} - 1 - ix - \frac{(ix)^2}{2!} - \dots - \frac{(ix)^k}{k!}\right) \frac{dx}{|x|^{\alpha+1}} \\
&= -\frac{\pi}{\Gamma(\alpha+1)\sin\pi\alpha}(A_-(-i)^{-\alpha} + A_+ i^{-\alpha}), \quad \operatorname{Re} c_0^{(\alpha)} < 0.
\end{aligned}$$

(2) $T(p) \sim \overline{c_0^\alpha}|p|^\alpha$ *при* $p \to 0_-$.

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 1. □

Далее, из (11) и леммы 4 мы получаем представление для логарифма характеристической функции

$$\log f(p) = v(p) + T(p) + o(|p^\alpha|), \tag{13}$$

где

$$v(p) = ips_1 + \frac{s_2(ip)^2}{2!} + \dots + \frac{s_k(ip)^k}{k!}.$$

Напомним, что $s_1, \dots, s_k$ – семиинварианты случайной величины ξ_1.

Лемма 5. *Существуют такие* ε_0, $d_0 > 0$, *что при* $|p| \leqslant \varepsilon_0$ *справедливы неравенства*

$$0 \leqslant |f(p)e^{-v(p)}| \leqslant e^{-d_0|p|^\alpha}$$

и

$$|e^{-v(p)}| \geqslant 1.$$

Доказательство. Справедливость второго неравенства в малой окрестности нуля очевидна, а первое неравенство следует из (13) и леммы 4. □

Теперь построим корректирующую последовательность. Как и ранее, пусть $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ – такая убывающая функция, что $\chi(x) = 1$ при $x \leqslant 1$, и $\chi(x) = 0$ при $x \geqslant 2$. Мы определим последовательность гладких функций $\varphi_n^{(\alpha)} = \varphi_n^{(\alpha)}(p)$, полагая

$$\varphi_n^{(\alpha)}(p) = \exp(-v(p)\chi(n^{1/(4m+2)}|p|)).$$

Далее, через $\mathbf{P}_n^{(\alpha)}$ мы обозначим распределение случайной величины $\frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$, а через $f_n^{(\alpha)}$ – характеристическую функцию $\mathbf{P}_n^{(\alpha)}$. Тогда

$$f_n^{(\alpha)}(p) = \left(f\left(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\right)\right)^n = \left(1 + i\mu_1 \frac{p}{n^{1/\alpha}} + \ldots + \frac{\mu_k p^k}{k! n^{k/\alpha}} + T\left(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\right)\right)^n.$$

Очевидно, что такая последовательность функций не имеет предела и для того, чтобы сделать ее сходящейся, мы умножим $f_n^{(\alpha)}$ на функцию

$$\Psi_n^{(\alpha)}(p) = \left(\varphi_n^{(\alpha)}\left(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\right)\right)^n. \tag{14}$$

Теорема 2. *Последовательность* $f_n^{(\alpha)}\Psi_n^{(\alpha)}$ *сходится в* $L_2(\mathbb{R})$ *при* $n \to \infty$ *к функции* $\widehat{q^\alpha}$, *которая определена формулой:*

$$\widehat{q^\alpha} = \exp(c_0^{(\alpha)} p^\alpha), \quad p > 0. \tag{15}$$

Доказательство. Как и раньше, докажем сходимость только в $L_2(\mathbb{R}_+)$. Сначала покажем, что $f_n^{(\alpha)}\Psi_n^{(\alpha)}$ сходится к $\widehat{q^\alpha}$ поточечно. Заметим, что для каждого фиксированного p и всех достаточно больших n справедливо неравенство

$$n^{1/(4m+2)-1/\alpha} p < 1$$

и, значит,

$$\Big(f^{(\alpha)}\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)\varphi_n^{(\alpha)}\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)\Big)^n = \exp\Big[n\Big(\log f\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big) - v\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)\Big)\Big]$$
$$= \exp\Big[n\Big(v\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big) + T\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big) + o\Big(\frac{1}{n}\Big) - v\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)\Big)\Big]$$
$$= \exp\Big[n\Big(T\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big) + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)\Big] = \exp(c_0^{(\alpha)} p^\alpha + o(1)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(c_0^{(\alpha)} p^\alpha).$$

Теперь остается показать, что сходимость $f_n^{(\alpha)}\Psi_n^{(\alpha)} \to \widehat{q^\alpha}$ имеет место не только поточечно, но также и в смысле $L_2(\mathbb{R})$. Это делается в точности так же, как и при доказательстве теоремы 1. □

§3. Локальные предельные теоремы для больших уклонений. Первая часть

Как и раньше, все формулы мы будем писать только для $p > 0$. Напомним, что через $\mathbf{P}_n^{(\alpha)}$ мы обозначаем распределение случайной величины $\frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{i=0}^{n} \xi_i$, а через $p_n^{(\alpha)}$ – соответствующую плотность. Мы будем рассматривать только центрированные случайные величины ($\mathbf{E}\,\xi_1 = 0$). Цель данного параграфа заключается в нахождении асимптотического поведения плотности $p_n^{(\alpha)}$ при некоторых дополнительных предположениях.

Обозначим через $\zeta_n^{(\alpha)}$ обратное преобразование Фурье от $\Psi_n^{(\alpha)} - 1$. Заметим, что

$$\int_{\mathbb{R}} \zeta_n^{(\alpha)}(x)dx = \Psi_n^{(\alpha)}(0) - 1 = 0.$$

Из теорем 1 и 2 следует, что последовательность $p_n^{(\alpha)} + p_n^{(\alpha)} * \zeta_n^{(\alpha)}$ сходится к q^α в $L_2(\mathbb{R})$.

Далее мы сделаем дополнительные предположения о виде характеристической функции f величины ξ_1, а именно – предположим, что для $\alpha \in (4m-2, 4m-1) \cup (4m-1, 4m)$

$$f(p) = 1 + ip\mu_1 + \dots + \frac{(ip)^k \mu_k}{k!} + c_0^{(\alpha)} p^\alpha + R(p), \quad p > 0, \tag{16}$$

где

$$R(p) = p^{k+1} R_0(p), \tag{17}$$

а функция R_0 $k+2$ раз непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности нуля. Для $\alpha \in (4m, 4m+1) \cup (4m+1, 4m+2)$ мы предположим

$$f(p) = 1 + ip\mu_1 + \dots + \frac{(ip)^k \mu_k}{k!} + c_0^{(\alpha)} p^\alpha + R(p), \quad p > 0, \tag{18}$$

где R удовлетворяет (17). Также мы предполагаем, что вне некоторой окрестности нуля у функции f существуют ограниченные производные первых $k+2$ порядков. Условие при $p < 0$ формулируется аналогичным образом.

Дальше нам понадобится одно очевидное утверждение, которое будет являться центральным в наших доказательствах.

Лемма 6. *Пусть $\widehat{g}$ – преобразование Фурье функции g и $\widehat{g}^{(s)} \in L_1(\mathbb{R})$ для некоторого $s \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$|g(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi |x|^s} \int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{g}^{(s)}(x)| dx.$$

Через h_n мы обозначим $h_n = f_n^{(\alpha)} \Psi_n^{(\alpha)} - \widehat{q^\alpha}$. Из теорем 1 и 2 следует, что $\|h_n\|_{L_2} \to 0$ при $n \to \infty$. Далее буквой C мы будем обозначать положительные константы (одной и той же буквой C могут быть обозначены разные константы.)

Теорема 3. *Для $\alpha \notin \mathbb{N}$*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |h_n^{([\alpha]+2)}(p)| dp \leqslant \frac{C}{n^{\frac{4m}{\alpha} - 1}}, \quad \alpha \in (4m-2, 4m-1) \cup (4m-1, 4m),$$

или

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |h_n^{([\alpha]+2)}(p)| dp \leqslant \frac{C}{n^{\frac{4m+2}{\alpha} - 1}}, \quad \alpha \in (4m, 4m+1) \cup (4m+1, 4m+2).$$

Доказательство. Пусть $\alpha \in (4m-1, 4m)$ (для остальных случаев доказательство проводится аналогично). Из (16) следует, что

$$\log f(p) = v(p) + c_0^{(\alpha)} p^\alpha - p^{4m} T_0(p), \tag{19}$$

где функция T_0 $4m+1$ раз непрерывно дифференцируема в окрестности нуля.

Для $|p| \leqslant n^{1/\alpha - 1/4m}$, используя (19), мы получаем

$$h_n(p) = f_n(p)\Psi_n^{(\alpha)}(p) - \exp(c_0^{(\alpha)} p^\alpha - c_1 p^{4m})$$

$$= \exp\left(n\Big(\log f\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big) - v\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big) - \frac{c_1^{(\alpha)} p^{4m}}{n}\Big)\right) - \exp(c_0^{(\alpha)} p^\alpha - c_1^{(\alpha)} p^{4m})$$

$$= \exp(c_0^{(\alpha)} p^\alpha - c_1^{(\alpha)} p^{4m}) \cdot \left[\exp\left(-n\frac{p^{4m}}{n^{4m/\alpha}} T_0\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)\right) - 1\right], \quad p > 0. \tag{20}$$

Важно отметить, что функция (20) $4m+1$ раз дифференцируема в нуле. Отсюда вытекает оценка

$$\int\limits_{|p| \leqslant n^{1/\alpha - 1/4m}} |h_n^{(4m+1)}(p)| dp \leqslant \frac{C}{n^{\frac{4m}{\alpha} - 1}}.$$

Следующим шагом оценим остаток. Он убывает быстрее любой степени по n. Это проверяется так же, как в доказательстве теоремы о сходимости в L_2. □

Следствием теоремы 3 является то, что каждого $x \in \mathbb{R}$ и $\alpha \notin \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$|p_n^{(\alpha)}(x) + (p_n^{(\alpha)} * \zeta_n^{(\alpha)})(x) - q^\alpha(x)|$$
$$\leqslant \frac{C}{n^{\frac{4m}{\alpha} - 1} |x|^{[\alpha]+2}}, \quad \alpha \in (4m-2, 4m-1) \cup (4m-1, 4m),$$

$$|p_n^{(\alpha)}(x) + (p_n^{(\alpha)} * \zeta_n^{(\alpha)})(x) - q^\alpha(x)|$$
$$\leqslant \frac{C}{n^{\frac{4m+2}{\alpha} - 1} |x|^{[\alpha]+2}}, \quad \alpha \in (4m, 4m+1) \cup (4m+1, 4m+2). \tag{21}$$

Теперь мы сравним асимптотическое поведение $p_n^{(\alpha)} + p_n^{(\alpha)} * \zeta_n^{(\alpha)}$ и $p_n^{(\alpha)}$. Пусть

$$d_n(p) = f_n^{(\alpha)} \Psi_n^{(\alpha)} - f_n^{(\alpha)} = f_n^{(\alpha)} (\Psi_n^{(\alpha)} - 1).$$

Теорема 4. *Для* $\alpha \notin \mathbb{N}$ *и* $\alpha > 0$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |d_n^{([\alpha]+2)}(p)|dp \leqslant C\rho_n^{[\alpha]+1-\alpha},$$

где $\rho_n = n^{1/2-1/\alpha}$.

Доказательство. Пусть $\alpha \in (4m+1, 4m+2)$ (для остальных случаев доказательство проводится аналогично). В этом случае мы должны показать, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |d_n^{(4m+3)}(p)|dp \leqslant C\rho_n^{4m+2-\alpha}.$$

Оценим $\int\limits_{|p|\leqslant n^{1/\alpha-\frac{1}{4m+2}}} |d_n^{(4m+3)}(p)|dp$. Если $|p| \leqslant n^{1/\alpha-\frac{1}{4m+2}}$, то

$$d_n(p) = f_n^{(\alpha)}(p)\Psi_n^{(\alpha)}(p) - f_n^{(\alpha)}(p) = f_n^{(\alpha)}(p)\Psi_n^{(\alpha)}(p)[1-(\Psi_n^{(\alpha)}(p))^{-1}]$$

$$= \exp(c_0^{(\alpha)}p^\alpha)\exp\left(n\left(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\right)^{4m+2}T_0\left(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\right)\right)\left[1-\exp\left(nv\left(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\right)\right)\right]$$

при $p > 0$. Таким образом, мы получаем

$$\int\limits_{|p|\leqslant n^{1/\alpha-\frac{1}{4m+2}}} |d_n^{(4m+3)}(p)|dp = \int\limits_{|p|\leqslant \rho_n^{-1}} |d_n^{(4m+3)}(p)|dp$$

$$+ \int\limits_{\rho_n^{-1}<|p|\leqslant n^{1/\alpha-\frac{1}{4m+2}}} |d_n^{(4m+3)}(p)|dp = A_n + B_n.$$

Заметим, что для некоторой константы $C > 0$

$$|A_n| \leqslant C\frac{n}{n^{2/\alpha}}\int\limits_0^{\rho_n^{-1}} p^{\alpha-4m-1}dp = C\rho_n^{4m+2-\alpha}$$

и

$$|B_n| \leqslant C\int\limits_{\rho_n^{-1}\leqslant|p|\leqslant n^{1/\alpha-\frac{1}{4m+2}}} \left|p^{\alpha-4m-3}e^{c_0^{(\alpha)}p^\alpha}\right|dp = C\rho_n^{4m+2-\alpha}.$$

Заметим, что $\frac{1}{\Psi_n^{(\alpha)}(p)} \leqslant 1$. Рассуждая как и ранее, мы получим, что для любого $N > 0$ существует такое C, что

$$\int\limits_{n^{1/\alpha - \frac{1}{4m+2}} \leqslant |p| \leqslant 2n^{1/\alpha - \frac{1}{4m+2}}} |d_n^{(4m+3)}(p)| dp \leqslant Cn^{-N}.$$

Для завершения доказательства заметим, что $d_n(p) = 0$ при $|p| \geqslant 2n^{1/\alpha - \frac{1}{4m+2}}$. $\square$

В итоге мы получаем асимптотическое разложение для $p_n^{(\alpha)}(x)$, то есть

$$p_n^{(\alpha)}(x) = \frac{A_+}{x^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{x^{\alpha+1}}\right), \quad x \to \infty,$$

$$p_n^{(\alpha)}(x) = \frac{A_-}{|x|^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{|x|^{\alpha+1}}\right), \quad x \to -\infty,$$

если

$$\sqrt{n}\ \frac{1}{xn^{1/\alpha}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

§4. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин с нормировкой $n^{1/\beta}$

В этой части мы построим вспомогательные предельные теоремы, которые будут служить для уточнения асимптотического разложения плотности в некотором частном случае.

Пусть $\{\xi_i\}_{i=0}^{\infty}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\mathbf{E}\,\xi_1 = 0$. Мы теперь предположим, что распределение случайной величины ξ_1 удовлетворяет более сильному условию

$$\mathbf{P}(\xi_1 < x) = \frac{a_-}{|x|^{\alpha}} + \frac{b_-}{|x|^{\beta}}(1 + g(x)), \quad x < 0,$$

$$\mathbf{P}(\xi_1 > x) = \frac{a_+}{x^{\alpha}} + \frac{b_+}{x^{\beta}}(1 + g(x)), \qquad x > 0,$$

где $g(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$, и для некоторого натурального $k \geqslant 2$ выполняется: $k < \alpha < \beta < k+1$, таким образом $k = [\alpha] = [\beta]$. Обозначим $A_+ = \alpha a_+$, $A_- = \alpha a_-$, $B_+ = \beta b_+$ и $B_- = \beta b_-$. Случай, когда $\beta > [\alpha] + 1$, мы не будем подробно рассматривать, так как он отличается лишь техническими деталями. Для него мы напишем лишь итоговое асимптотическое разложение.

Как и ранее, через $\mathbf{P}_1$ обозначим распределение случайной величины ξ_1, а через $f = f(p)$ – ее характеристическую функцию. Для $j < \alpha$ через $\mu_j = \mathbf{E}\,\xi_1^j$ мы обозначим момент порядка j случайной величины ξ_1, а через s_j – соответствующий семиинвариант.

Также предположим, что функция f для некоторых $K > 0$, $\delta > 0$ удовлетворяет условию

$$|f(p)| \leqslant \frac{K}{|p|^\delta},$$

так что для $n > \frac{2}{\delta}$ распределение суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$ имеет квадратично интегрируемую плотность.

4.1. Случай $\alpha, \beta \in (4m-2, 4m-1) \cup (4m-1, 4m)$**.** Заметим, что для характеристической функции $f(p)$ случайной величины ξ_1 справедливо представление

$$\begin{aligned} f(p) = \mathbf{E}\, e^{ip\xi_1} &= 1 + ip\mu_1 + \frac{\mu_2(ip)^2}{2!} + \dots + \frac{\mu_k(ip)^k}{k!} \\ &+ \mathbf{E}\left(e^{ip\xi_1} - 1 - ip\xi_1 - \frac{(ip\xi_1)^2}{2!} - \dots - \frac{(ip\xi_1)^k}{k!}\right) \\ &= 1 + ip\mu_1 + \frac{\mu_2(ip)^2}{2!} + \dots + \frac{\mu_k(ip)^k}{k!} + T(p), \end{aligned} \tag{22}$$

где $k = [\alpha] = [\beta]$, а

$$T(p) = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(e^{ipx} - 1 - ipx - \frac{(ipx)^2}{2!} - \dots - \frac{(ipx)^k}{k!}\right) \mathbf{P}_1(dx). \tag{23}$$

Лемма 7. (1) $T(p) \sim c_o^{(\alpha)} p^\alpha + c_o^{(\beta)} p^\beta$ *при* $p \to 0_+$, *где*

$$\begin{aligned} c_0^{(\alpha)} &= \int\limits_{\mathbb{R}} \left(e^{ix} - 1 - ix - \frac{(ix)^2}{2!} - \dots - \frac{(ix)^k}{k!}\right) \frac{dx}{|x|^{\alpha+1}} \\ &= -\frac{\pi}{\Gamma(\alpha+1)\sin \pi\alpha}(A_-(-i)^{-\alpha} + A_+ i^{-\alpha}), \end{aligned}$$

а

$$\begin{aligned} c_0^{(\beta)} &= \int\limits_{\mathbb{R}} \left(e^{ix} - 1 - ix - \frac{(ix)^2}{2!} - \dots - \frac{(ix)^k}{k!}\right) \frac{dx}{|x|^{\beta+1}} \\ &= -\frac{\pi}{\Gamma(\beta+1)\sin \pi\beta}(B_-(-i)^{-\beta} + B_+ i^{-\beta}), \end{aligned}$$

причем $\operatorname{Re} c_0^{(\alpha)} > 0$ *и* $\operatorname{Re} c_0^{(\beta)} > 0$.

(2) $T(p) \sim \overline{c_o^{(\alpha)}}|p|^\alpha + \overline{c_o^{(\beta)}}|p|^\beta$ *при* $p \to 0_-$.

Далее, из (22) и леммы 5 следует, что

$$\log f(p) = v(p) + T(p) + o(|p|^\beta), \tag{24}$$

где

$$v(p) = s_1(ip) + \frac{s_2(ip)^2}{2!} + \cdots + \frac{s_k(ip)^k}{k!}.$$

Лемма 8. *Существуют такие* ε_0, $d_0 > 0$, *что для* $|p| \leqslant \varepsilon_0$ *справедливо неравенство*

$$0 \leqslant |f(p)e^{-v(p)}| \leqslant e^{d_0|p|^\beta}.$$

Теперь мы будем вводить "деформирующую" функцию. Выберем функцию $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$, такую что $\chi(x) = 1$ при $|x| \leqslant 1$ и $\chi(x) = 0$ при $x \geqslant 2$. Далее, для каждых β, α мы выберем и зафиксируем число $\gamma = \gamma(\beta, \alpha)$, так что $\gamma \in (\beta, \beta\frac{4m-\alpha}{4m-\beta})$ и число $c_1^{(\beta)} > 0$.

Определим последовательность функций $\Psi_n^{(\beta)}$, $n \in \mathbb{N}$, полагая

$$\begin{aligned}
\Psi_n^{(\beta)}(p) &= \exp\Big(-n\Big(v\Big(\frac{p}{n^{1/\beta}}\Big) \\
&\quad + c_0^{(\alpha)}\frac{p^\alpha}{n^{\alpha/\beta}} + \frac{c_1^{(\beta)}p^{4m}}{n}\Big)\chi\Big(\frac{p}{n^{1/\beta-1/\gamma}}\Big)\Big), \quad p > 0, \\
\Psi_n^{(\beta)}(p) &= \exp\Big(-n\Big(v\Big(\frac{p}{n^{1/\beta}}\Big) + \overline{c_0^{(\alpha)}}\frac{|p|^\alpha}{n^{\alpha/\beta}} \\
&\quad + \frac{c_1^{(\beta)}p^{4m}}{n}\Big)\chi\Big(\frac{|p|}{n^{1/\beta-1/\gamma}}\Big)\Big), \quad p < 0.
\end{aligned} \tag{25}$$

Лемма 9. *Существует такое* n_0, *что для всех* $n \geqslant n_0$

$$\inf_p |\Psi_n^{(\beta)}(p)| = 1.$$

Доказательство. Доказательство этой леммы полностью аналогично доказательству леммы 3 из [5]. □

Обозначим через $\mathbf{P}_n^{(\beta)}$ распределение случайной величины $\frac{1}{n^{1/\beta}}\sum_{i=1}^n \xi_i$, а через $f_n^{(\beta)}$ – соответствующую характеристическую функцию.

Выражая $f_n^{(\beta)}$ через f, получаем:

$$f_n^{(\beta)}(p) = \left(f\left(\frac{p}{n^{1/\beta}}\right)\right)^n = \left(1 + \frac{i\mu_1 p}{n^{1/\beta}} + \cdots + \frac{\mu_k (ip)^k}{k! n^{k/\beta}} + T\left(\frac{p}{n^{1/\beta}}\right)\right)^n.$$

Ясно, что такая последовательность функций не имеет предела. Для того, чтобы сделать ее сходящейся, мы умножим $f_n^{(\beta)}$ на $\Psi_n^{(\beta)}$, заданную формулой (25).

Теорема 5. *Последовательность* $f_n^{(\beta)}\Psi_n^{(\beta)}$ *сходится в* $L_2(\mathbb{R})$ *при* $n \to \infty$ *к функции* $\widehat{q^\beta}$, *определенной формулой* (7).

Доказательство. Доказательство ничем не отличается от доказательства аналогичной теоремы в предыдущем параграфе. Отметим только то, что член с $|p|^\alpha$ в функции $\psi_n^{(\beta)}$ служит для того, чтобы "удалить" у распределения случайной величины главный член асимптотики. □

4.2. Случай $\alpha, \beta \in (4m, 4m+1) \cup (4m+1, 4m+2)$**.** Запишем характеристическую функцию ξ_1 в виде:

$$\begin{aligned} f(p) = \mathbf{E}\, e^{ip\xi_1} &= 1 + ip\mu_1 + \frac{\mu_2 (ip)^2}{2!} + \cdots + \frac{\mu_k (ip)^k}{k!} \\ &+ \mathbf{E}\left(e^{ip\xi_1} - 1 - ip\xi_1 - \ldots - \frac{\xi_1^k (ip)^k}{k!}\right) \\ &= 1 + ip\mu_1 + \frac{\mu_2 (ip)^2}{2!} + \cdots + \frac{\mu_k (ip)^k}{k!} + T(p), \end{aligned} \tag{26}$$

где k – целая часть α и β, а

$$T(p) = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(e^{ipx} - 1 - ipx - \ldots - \frac{(ipx)^k}{k!}\right) d\,\mathbf{P}_1(x). \tag{27}$$

Лемма 10. (1) $T(p) \sim c_0^{(\alpha)} p^\alpha + c_0^{(\beta)} p^\beta$ *при* $p \to 0_+$, *где*

$$\begin{aligned} c_0^{(\alpha)} &= \int\limits_{\mathbb{R}} \left(e^{ix} - 1 - ix - \frac{(ix)^2}{2!} - \cdots - \frac{(ix)^k}{k!}\right) \frac{dx}{|x|^{\alpha+1}} \\ &= -\frac{\pi}{\Gamma(\alpha+1)\sin \pi\alpha} (A_-(-i)^{-\alpha} + A_+ i^{-\alpha}), \end{aligned}$$

а

$$c_0^{(\beta)} = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(e^{ix} - 1 - ix - \frac{(ix)^2}{2!} - \ldots - \frac{(ix)^k}{k!}\right) \frac{dx}{|x|^{\beta+1}}$$

$$= -\frac{\pi}{\Gamma(\beta+1)\sin\pi\beta}(B_-(-i)^{-\beta} + B_+ i^{-\beta}),$$

при этом $\operatorname{Re} c_0^{(\alpha)}, \operatorname{Re} c_0^{(\beta)} < 0$.

(2) $T(p) \sim \overline{c_0^{(\alpha)}}|p|^\alpha + \overline{c_0^{(\beta)}}|p|^\beta$ *при* $p \to 0_-$.

Далее, из (26) и леммы 10 мы получаем представление для логарифма характеристической функции

$$\log f(p) = v(p) + T(p) + o(|p^\beta|), \tag{28}$$

где

$$v(p) = ips_1 + \frac{s_2(ip)^2}{2!} + \cdots + \frac{s_k(ip)^k}{k!}.$$

Напомним, что $s_1, \ldots, s_k$ – семиинварианты случайной величины ξ_1.

Лемма 11. *Существуют такие* $\varepsilon_0, d_0 > 0$, *что при* $|p| \leqslant \varepsilon_0$ *справедливы следующие неравенства:*

$$0 \leqslant |f(p)e^{-v(p)}| \leqslant e^{-d_0|p|^\beta}$$

и

$$|e^{-v(p)}| \geqslant 1.$$

Как и раньше, пусть $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ – такая убывающая функция, что $\chi(x) = 1$ при $x \leqslant 1$, и $\chi(x) = 0$ при $x \geqslant 2$. Мы определим последовательность гладких функций $\varphi_n^{(\beta)} = \varphi_n^{(\beta)}(p)$, полагая

$$\varphi_n^{(\beta)}(p) = \exp(-(v(p) + c_0^{(\alpha)}p^\alpha)\chi(n^{1/(4m+2)}|p|)), \quad p > 0,$$

а при $p < 0$ она определяется аналогичным образом, как и ранее.

Далее, через $\mathbf{P}_n^{(\beta)}$ мы обозначим распределение случайной величины $\frac{1}{n^{1/\beta}}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$, а через $f_n^{(\beta)}$-характеристическую функцию $\mathbf{P}_n^{(\beta)}$.

Теорема 6. *Последовательность* $f_n^{(\beta)}\Psi_n^{(\beta)}$ *сходится в* $L_2(\mathbb{R})$ *при* $n \to \infty$ *к функции* $\widehat{q^\beta}$, *которая определена формулой* (15).

§5. Локальные предельные теоремы для больших уклонений. Вторая часть

В этом параграфе мы уточним асимптотическое разложение, полученное в третьем параграфе, для случайных величин, которые удовлетворяют условию:

$$\mathbf{P}(\xi_1 < x) = \frac{a_-}{|x|^\alpha} + \frac{b_-}{|x|^\beta}(1 + g(x)), \quad x < 0,$$

$$\mathbf{P}(\xi_1 > x) = \frac{a_+}{x^\alpha} + \frac{b_+}{x^\beta}(1 + g(x)), \quad x > 0,$$

где $[\beta] = [\alpha] = k \in \mathbb{N}$, $k > 2$ и $\alpha < \beta$.

Как и ранее, через $\mathbf{P}_n^{(\beta)}$ обозначим распределение случайной величины $\frac{1}{n^{1/\beta}} \sum\limits_{i=0}^{n} \xi_i$, а через $p_n^{(\beta)}$ соответствующую плотность. Как и выше, будем предполагать, что $\mathbf{E}\,\xi_1 = 0$.

Обозначим через $\zeta_n^{(\beta)}$ обратное преобразование Фурье от $\Psi_n^{(\beta)} - 1$. Заметим, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \zeta_n^{(\beta)}(x)dx = \Psi_n^{(\beta)}(0) - 1 = 0.$$

Из теорем 5 и 6 следует, что последовательность $p_n^{(\beta)} + p_n^{(\beta)} * \zeta_n^{(\beta)}$ сходится к q^β в $L_2(\mathbb{R})$.

Далее мы сделаем дополнительные предположения о виде характеристической функции f величины ξ_1, а именно, предположим, что для $\alpha, \beta \in (4m-2, 4m-1) \cup (4m-1, 4m)$

$$f(p) = 1 + ip\mu_1 + \dots + \frac{(ip)^k \mu_k}{k!} + c_0^{(\alpha)} p^\alpha + c_0^{(\beta)} p^\beta + R(p), \quad p > 0, \quad (29)$$

где

$$R(p) = p^{k+1} R_0(p), \quad (30)$$

а функция R_0 $k+2$ раз непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности нуля. Для $\alpha, \beta \in (4m, 4m+1) \cup (4m+1, 4m+2)$ мы предположим, что

$$f(p) = 1 + ip\mu_1 + \dots + \frac{(ip)^k \mu_k}{k!} + c_0^{(\alpha)} p^\alpha + c_0^{(\beta)} p^\beta + R(p), \quad p > 0, \quad (31)$$

где R удовлетворяет (30). Также мы предполагаем, что в некоторой окрестности нуля у функции f существуют ограниченные производные первых $k+2$ порядков. Аналогичные условия налагаются при $p<0$.

Положим $h_n = f_n^{(\beta)}\Psi_n^{(\beta)} - \widehat{q^\beta}$. Из теорем 5 и 6 следует, что $\|h_n\|_{L_2} \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 7. *Для* $\alpha \notin \mathbb{N}$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |h_n^{([\beta]+2)}(p)|dp \leqslant \frac{C}{n^{\frac{4m}{\beta}-1}}, \quad \alpha, \beta \in (4m-2, 4m-1) \cup (4m-1, 4m),$$

или

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |h_n^{([\beta]+2)}(p)|dp \leqslant \frac{C}{n^{\frac{4m+2}{\beta}-1}}, \quad \alpha, \beta \in (4m, 4m+1) \cup (4m+1, 4m+2).$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 3. □

Из теоремы 7 следует, что для каждого $x \in \mathbb{R}$ и $\beta \notin \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |p_n^{(\beta)}(x) + (p_n^{(\beta)} * \zeta_n^{(\beta)})(x) - q^\beta(x)| &\leqslant \frac{C}{n^{\frac{4m}{\beta}-1}|x|^{[\beta]+2}}, \\ \beta &\in (4m-2, 4m-1) \cup (4m-1, 4m), \\ |p_n^{(\beta)}(x) + (p_n^{(\beta)} * \zeta_n^{(\beta)})(x) - q^\beta(x)| &\leqslant \frac{C}{n^{\frac{4m+2}{\beta}-1}|x|^{[\beta]+2}}, \\ \beta &\in (4m, 4m+1) \cup (4m+1, 4m+2). \end{aligned} \tag{32}$$

Теперь мы сравним асимптотическое поведение $p_n^{(\beta)} + p_n^{(\beta)} * \zeta_n^{(\beta)}$ и $p_n^{(\beta)}$. Введем функцию

$$d_n(p) = f_n^{(\beta)}\Psi_n^{(\beta)} - f_n^{(\beta)} = f_n^{(\beta)}(\Psi_n^{(\beta)} - 1).$$

Теорема 8. *Если f голоморфна в первом и четвертом секторах, то*

$$p_n^{(\beta)}(x) = \frac{n}{n^{\alpha/\beta}}\frac{A_+}{x^{\alpha+1}} + \frac{B_+}{x^{\beta+1}} + O\left(\frac{n}{n^{\frac{[\beta]+1}{\beta}}}\frac{1}{x^{[\beta]+2}}\right) \quad \text{\textit{при}} \quad x>0$$

и

$$p_n^{(\beta)}(x) = \frac{n}{n^{\alpha/\beta}}\frac{A_-}{|x|^{\alpha+1}} + \frac{B_-}{|x|^{\beta+1}} + O\left(\frac{n}{n^{\frac{[\beta]+1}{\beta}}}\frac{1}{|x|^{[\beta]+2}}\right) \quad \text{\textit{при}} \quad x<0,$$

когда

$$\sqrt{n}\ \frac{1}{xn^{1/\beta}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Доказательство. Заметим, что в условии теоремы для каждой из асимптотик аналитичность нужна только в одном из секторов.

Проведем доказательство только для $\alpha, \beta \in (4m+1, 4m+2)$. Если $|p| \leqslant n^{1/\beta - \frac{1}{4m+2}}$, то

$$d_n(p) = f_n^{(\beta)}(p)\Psi_n^{(\beta)}(p) - f_n^{(\beta)}(p) = f_n(p)\Psi_n^{(\beta)}(p)[1 - (\Psi_n^{(\beta)}(p))^{-1}]$$

$$= \exp(c_0^{(\beta)} p^\beta) \exp\Big(n\Big(\frac{p}{n^{1/\beta}}\Big)^{4m+2} T_0\Big(\frac{p}{n^{1/\beta}}\Big)\Big)$$

$$\times\Big[1 - \exp\Big(nv\Big(\frac{p}{n^{1/\beta}}\Big) + nc_0^{(\alpha)}\frac{p^\alpha}{n^{\alpha/\beta}}\Big)\Big].$$

Теперь рассмотрим функцию

$$\widehat{e_n}(p) = \exp(c_0^{(\beta)} p^\beta) \exp\Big(n\Big(\frac{p}{n^{1/\beta}}\Big)^{4m+2} T_0\Big(\frac{p}{n^{1/\beta}}\Big)\Big)$$

$$\times\Big[1 - \exp\Big(nv\Big(\frac{p}{n^{1/\beta}}\Big)\Big)\Big]\theta\Big(\frac{p}{n^{1/\beta - \frac{1}{4m+2}}}\Big),$$

при положительных p, для отрицательных она определяется так, чтобы ее преобразование Фурье было вещественным. Гладкая и монотонная функция $\theta(x)$ при $x < 1$ равна 1, а при $x \geqslant 2$ она обращается в 0. По аналогии с доказательством теоремы 4 мы можем показать, что для некоторой $C > 0$

$$\Big|e_n(x)\Big| \leqslant C\frac{\rho_n^{[\beta]+1-\beta}}{|x|^{[\beta]+2}},$$

где $\rho_n = n^{1/\alpha - 1/\beta}$.

Оценим величину $d_n(p) - \widehat{e_n}(p)$ на промежутке $[0, n^{1/\beta - \frac{1}{4m+2}})$. Имеем

$$d_n(p) - \widehat{e_n}(p) = \exp(c_0^{(\beta)} p^\beta) \exp\Big(n\Big(\frac{p}{n^{1/\beta}}\Big)^{4m+2} T_0\Big(\frac{p}{n^{1/\beta}}\Big)\Big)$$

$$\times \exp\Big(n \log f\Big(\frac{p}{n^{1/\beta}}\Big)\Big)\Big[\exp\Big(-nc_0^{(\alpha)}\frac{p^\alpha}{n^{\alpha/\beta}}\Big) - 1\Big].$$

Далее мы найдем асимптотику преобразования Фурье при $x \to \infty$ этой разности. Сделаем масштабную замену переменной. Учтем также, что на бесконечности $f(p) < 1$.

$$\operatorname{Re}\frac{1}{x\pi}\int\limits_0^{xn^{1/\beta - \frac{1}{4m+2}}} e^{-iz}\exp\Big(n\log f\Big(\frac{z}{xn^{1/\beta}}\Big)\Big)\Big[\exp\Big(-nc_0^{(\alpha)}\frac{z^\alpha}{x^\alpha n^{\alpha/\beta}}\Big) - 1\Big]dz$$

$$= \operatorname{Re}\frac{1}{x\pi}\int\limits_0^\infty e^{-iz}\exp\Big(n\log f\Big(\frac{z}{xn^{1/\beta}}\Big)\Big)\Big[\exp\Big(-nc_0^{(\alpha)}\frac{z^\alpha}{x^\alpha n^{\alpha/\beta}}\Big)-1\Big]dz$$

$$+O(1/x^N), \quad \text{при всех} \quad N\in\mathbb{N}.$$

Теперь это делается абсолютно аналогично нахождению асимптотик плотностей устойчивых распределений в [1–3]. В итоге мы получаем, что

$$\operatorname{Re}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{n^{1/\beta-\frac{1}{4m+2}}} e^{-ipx}\exp\Big(n\log f\Big(\frac{p}{n^{1/\beta}}\Big)\Big)\Big[\exp\Big(-nc_0^{(\alpha)}\frac{p^\alpha}{n^{\alpha/\beta}}\Big)-1\Big]dp$$

$$\sim \frac{n}{n^{\alpha/\beta}}\ \frac{A_+}{x^{\alpha+1}}.$$

Для отрицательных x процедура будет полностью аналогична. □

Теперь представим наши результаты в более удобном виде. Обозначим через $p_n^{(\alpha)}$ плотность случайной величины $\frac{1}{n^{1/\alpha}}\sum\limits_{i=0}^n\xi_i$. Получаем, что

$$p_n^{(\alpha)}(x)=\frac{A_+}{x^{\alpha+1}}+\frac{n}{n^{\beta/\alpha}}\frac{B_+}{x^{\beta+1}}+O\bigg(\frac{n}{n^{\frac{[\beta]+1}{\alpha}}}\frac{1}{x^{[\beta]+2}}\bigg), \quad x>0,$$

$$p_n^{(\alpha)}(x)=\frac{A_-}{|x|^{\alpha+1}}+\frac{n}{n^{\beta/\alpha}}\frac{B_-}{|x|^{\beta+1}}+O\bigg(\frac{n}{n^{\frac{[\beta]+1}{\alpha}}}\frac{1}{|x|^{[\beta]+2}}\bigg), \quad x<0,$$

при

$$\sqrt{n}\ \frac{1}{xn^{1/\alpha}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Очевидно, что эта асимптотика согласуется с асимптотикой, полученной ранее.

Также можно рассмотреть другой класс случайных величин. Вместо условия (1) мы предположим, что

$$\mathbf{P}(\xi_1<x)=\frac{a_-}{|x|^\alpha}+\frac{b_-}{|x|^\beta}(1+g(x)), \quad x<0,$$

$$\mathbf{P}(\xi_1>x)=\frac{a_+}{x^\alpha}+\frac{b_+}{x^\beta}(1+g(x)), \quad x>0,$$

где $[\beta]=k_\beta\in\mathbb{N}$, $k>2$, $[\alpha]=k_\alpha\in\mathbb{N}$ и $k_\alpha<k_\beta$. Обозначим $A_+=\alpha a_+$, $A_-=\alpha a_-$, $B_+=\beta b_+$ и $B_-=\beta b_-$. При этом допустим, что

характеристическая функция величины ξ_1 удовлетворяет следующим условиям:

$$f(p) = 1 + ip\mu_1 + \dots + \frac{(ip)^k \mu_k}{k!} + c_0^{(\alpha)} p^\alpha + \sigma_{[\alpha]+1} p^{[\alpha]+1}$$
$$+ \dots + \sigma_{[\beta]} p^{[\beta]} + c_0^{(\beta)} p^\beta - R(p), \quad p > 0,$$

где

$$R(p) = p^{k_\beta + 1} R_0(p),$$

а $R_0(p)$ $k_\beta + 1$ раз непрерывно дифференцируема в нуле. Также наложим условие, что f голоморфна в первом и четвертом секторах. Через $p_n^{(\alpha)}$ мы обозначим плотность случайной величины $\frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$. Пользуясь техникой, предложенной в данной работе, мы получаем асимптотику $p_n^{(\alpha)}$.

Теорема 9.

$$p_n^{(\alpha)}(x) = \frac{A_+}{x^{\alpha+1}} + \frac{n}{n^{\frac{[\alpha]+1}{\alpha}}} \frac{g_{[\alpha]+2}}{x^{[\alpha]+2}} + \frac{n}{n^{\frac{[\beta]}{\alpha}}} \frac{g_{[\beta]+1}}{x^{[\beta]+1}}$$
$$+ \frac{n}{n^{\beta/\alpha}} \frac{B_+}{x^{\beta+1}} + O\left(\frac{n}{n^{\frac{[\beta]+1}{\alpha}}} \frac{1}{x^{[\beta]+2}}\right) \quad \textit{при} \quad x > 0,$$
$$p_n^{(\alpha)}(x) = \frac{A_-}{|x|^{\alpha+1}} + \frac{n}{n^{\frac{[\alpha]+1}{\alpha}}} \frac{f_{[\alpha]+2}}{|x|^{[\alpha]+2}} + \frac{n}{n^{\frac{[\beta]}{\alpha}}} \frac{f_{[\beta]+1}}{|x|^{[\beta]+1}}$$
$$+ \frac{n}{n^{\beta/\alpha}} \frac{B_-}{|x|^{\beta+1}} + O\left(\frac{n}{n^{\frac{[\beta]+1}{\alpha}}} \frac{1}{|x|^{[\beta]+2}}\right) \quad \textit{при} \quad x < 0,$$

когда

$$\sqrt{n} \frac{1}{x n^{1/\alpha}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

где числа g_j и f_j зависят от распределения случайной величины ξ_1.

Литература

1. Ю. В. Линник, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин при учете больших уклонений. I.* — Теория вероятн. и ее примен. **6**, No. 2 (1961), 145–162.
2. Ю. В. Линник, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин при учете больших уклонений. II.* — Теория вероятн. и ее примен. **6**, No. 6 (1961), 377–391.
3. Ю. В. Линник, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин при учете больших уклонений. III.* — Теория вероятн. и ее примен. **7**, No. 2 (1962), 121–134.

4. С. В. Нагаев, *Некоторые предельные теоремы для больших уклонений.* Теория вероятн. и ее примен. **10**, No. 2 (1965), 231–254.
5. Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Теоремы о сходимости стохастических интегралов к знакопеременным мерам и локальные предельные теоремы для больших уклонений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **368** (2009), 201–228.
6. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, *Независимые и стационарно связанные случайные величины.* Наука, М., 1965
7. В. В. Петров, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* Наука, М., 1987.
8. Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Представление Леви–Хинчина для одного класса знакопеременных устойчивых мер.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **361** (2008), 145–166.

Batkovich D. V. Local limit theorems for large deviations.

We study properties of stable measures with index $\alpha > 2$, $\alpha \notin \mathbb{N}$. Such measures are signed ones and hence they are not probability measures. We show that in some sense these signed measures are limit measures for sums of independent random variables. In the last section of the paper we prove a theorem about large deviations of sums of independent random variables using the positive part of the limit measure.

С.-Петербургский государственный университет, Междисциплинарная исследовательская лаборатория им. П. Л.Чебышева, 199178, 14 линия В.О., д. 29Б, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: batya239@gmail.com

Поступило 28 октября 2011 г.