Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 395, 2011 г.

В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов

К РЕШЕНИЮ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ q-ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МАТРИЦ. 2

Статья рассматривает применение метода наследственных пучков к вычислению точек конечных регулярного и сингулярного спектров и им соответствующих спектральных векторов для q-параметрических, $q \geqslant 2$, полиномиальных матриц общего вида. Продолжается разработка и исследование метода. Для этого используется индукция по числу параметров. Для проведения индукции на первой стадии метода вычисляется последовательность из $(q-k)$-параметрических полиномиальных матриц, удовлетворяющих некоторым рекуррентным соотношениям. Алгоритм вычисления этой последовательности рассмотрен в [1].

На второй стадии метода вычисляется база для индукции. В качестве базы на каждом шаге проведения индукции вычисляется вспомогательная двухпараметрическая матрица и находятся некоторые ее спектральные характеристики, для чего используется метод наследственных пучков [2, 3].

Вычисление базы для индукции и построение на ее основе алгоритмов решения упомянутых выше спектральных задач для многопараметрических матриц реализуется в настоящей статье.

§1. Вычисление точек регулярного спектра

Пусть

$$F_0 := F_0(\mu_1; \mu_2, \ldots, \mu_q) = F_0(\mu_1; \overline{\mu}_{q-1}) = \sum_{i=0}^{s_1} C_i^{(1)}(\overline{\mu}_{q-1})\mu_1^i \qquad (1)$$

Ключевые слова: спектр регулярный, сингулярный; метод наследственных пучков; многопараметрическая полиномиальная матрица.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-00318-а.

есть q-параметрическая, $q \geqslant 2$, полиномиальная $m \times n$ матрица ранга ρ. Пусть $\{F_k\}$, $k = 0, 1, \ldots, q-1$, есть последовательность $(q-k)$-параметрических полиномиальных матриц, удовлетворяющих рекуррентным соотношениям вида

$$F_{k-1}(\mu_k, \ldots, \mu_q) = F_k(\mu_{k+1}, \ldots, \mu_q)\Lambda_k(\mu_k), \quad k = 1, \ldots q, \tag{2}$$

где

$$F_k(\mu_{k+1}, \ldots, \mu_q) = [C_{s_k}^{(k)}(\mu_{k+1}, \ldots, \mu_q), \ldots, C_0^{(k)}(\mu_{k+1}, \ldots, \mu_q)],$$

$\Lambda_k(\mu_k) = [\mu_k^{s_k} I_{n_k}, \ldots, \mu_k^0 I_{n_k}]^B$, $C_i^{(k)}(\mu_{k+1}, \ldots, \mu_q)$ – коэффициенты матрицы

$$F_{k-1}(\mu_k, \ldots, \mu_q) = \sum_{i=0}^{s_k} C_i^{(k)}(\mu_{k+1}, \ldots, \mu_q)\mu_k^i, \tag{3}$$

n_k – число столбцов в коэффициентах $C_i^{(k)}(\mu_{k+1}, \ldots, \mu_q)$.

Требуется вычислить точки конечного регулярного спектра матрицы $F_0(\mu_1; \overline{\mu}_{q-1})$, т.е. замкнутые неприводимые многообразия $\overline{\nu}_{q-p} = (\nu_{p+1}, \ldots, \nu_q)$ аффинного пространства $\mathbb{C}^{q-p}$, $p \geqslant 0$, образующие при $p = 0$ точки собственного регулярного спектра $\sigma_{r1}[F_0]$, а при $p > 0$ – точки смешанного регулярного спектра $\sigma_{r2}[F_0]$.

Для решения задачи применим индукцию по числу параметров, используя для этого последовательность матриц $\{F_k\}$.

Пусть $\overline{\nu}_{q-k} = (\nu_{k+1}, \ldots, \nu_q)$ есть точка множества $\sigma_{rs}[F_k]$, $\sigma_{rs}[F_0] = \varnothing$.

Базой индукции является следующее утверждение.

Лемма 1. *Для того, чтобы многообразие* $(\nu_k, \overline{\nu}_{q-k}) = (\nu_k, \nu_{k+1}, \ldots, \nu_q)$ *было точкой множества* $\sigma_{r1}[F_{k-1}]$*, необходимо и достаточно, чтобы пучок* $D_k(\mu_k; \overline{\nu}_{q-k})$ *имел собственные значения.*

Здесь ν_k есть любое собственное значение пучка $D_k(\mu_k, \overline{\nu}_{q-k}) = Q_+(\overline{\nu}_{q-k}) - \mu_k Q_-(\overline{\nu}_{q-k})$, который является наследственным пучком для матрицы $F_k(\overline{\nu}_{q-k})$; $Q_+(\overline{\nu}_{q-k})$ и $Q_-(\overline{\nu}_{q-k})$ суть постоянные матрицы, составленные соответственно из $s_k n_k$ первых и $s_k n_k$ последних строк матрицы $Q^{(k)}$, столбцы которой образуют ортонормированный базис правого нуль-пространства матрицы $F_k(\overline{\nu}_{q-k})$.

Справедливость леммы следует из теоремы 2.1 статьи [1].

Рассмотрим вычисление одного (типичного) многообразия $\overline{\nu}_{q-p} = (\nu_{p+1}, \ldots, \nu_q)$, образующего точку множества $\sigma_{r1}[F_p]$. Параметры многообразия $\overline{\nu}_{q-p}$ вычисляются в последовательности ν_q, $\nu_{q-1}, \ldots, \nu_{p+1}$.

На каждом шаге индукции вычисляется один из параметров. В качестве базы индукции берутся вспомогательные одно- или двухпараметрические матрицы, полученные из последовательности (2) с учетом вычисленых параметров искомого многообразия. Так для вычисления параметра ν_k, когда параметры $\nu_q, \dots, \nu_{k+1}$ уже вычислены, в качестве вспомогательной двухпараметрической матрицы $F(\lambda, \mu)$ берется матрица вида

$$F(\lambda, \mu) := F_{k-2}(\mu_{k-1}, \mu_k, \nu_{k+1}, \dots, \nu_q) = F_{k-2}(\mu_{q-1}, \mu_q, \overline{\nu}_{q-k}),$$

где $F_{k-2}(\mu_{k-1}, \dots, \mu_q)$ есть матрица из последовательности (2).

Для вычисления ν_k выполняются следующие операции.

(1) Вычисляется двухпараметрическая матрица

$$F(\lambda, \mu) := F_{k-2}(\mu_{k-1}, \mu_k; \nu_{k+1}, \dots, \nu_q) = \sum_{i=0}^{t} C_i(\mu)\lambda^i,$$

где $\lambda = \mu_{k-1}$, $\mu = \mu_k$, $C_i(\mu) = C_i^{(k-2)}(\mu_k, \overline{\nu}_{q-k})$, $t := s_{k-2}$.

(2) Матрица $F(\lambda, \mu)$ представляется в виде

$$F(\lambda, \mu) = F_1(\mu)\Lambda_1(\lambda), \quad \text{где} \quad F_1(\mu) := [C_t(\mu), \dots, C_0(\mu)],$$

$\Lambda_1(\lambda) = [\lambda^t I_v, \dots, \lambda^0 I_v]^B$, v есть число столбцов матриц $C_i(\mu)$.

(3) Вычисляются все различные собственные значения μ_i, $i = 1, \dots, r$, полиномиальной матрицы $F_1(\mu)$.

(4) Для любого (каждого) фиксированного собственного значения $\mu_* = \mu_r$ вычисляется матрица $F_1(\mu_*)$ и для нее формируется наследственный пучок

$$D(\lambda; \mu_*) = Q_+(\mu_*) - \lambda Q_-(\mu_*).$$

Здесь $Q_+(\mu_*)$ и $Q_-(\mu_*)$ суть постоянные матрицы, составленные соответственно из tv_1 первых и tv_1 последних строк матрицы Q, столбцы которой образуют ортонормированный базис правого нуль-пространства матрицы $F_1(\mu_*)$.

(5) Вычисляются все различные собственные значения пучка $D(\lambda; \mu_*)$.

В качестве искомого параметра ν_k берется любое (каждое) фиксированное собственное значение пучка $D(\lambda, \mu_*)$.

Процесс формирования многообразия $\overline{\nu}_{q-p}$ продолжается аналогично и заканчивается, когда будет построен пучок

$$D(\lambda, \overline{\nu}_{q-p}) = D(\lambda; \nu_{p+1}, \dots, \nu_q),$$

не имеющий собственых значений. Так вычисленное многообразие $\overline{\nu}_{q-p}$ при $p = 0$ образует точку множества $\sigma_{r1}[F_0]$; при $p > 0$ оно образует точку множества $\sigma_{r2}[F_0]$. Справедливость этих утверждений следует из теоремы 2.3 статьи [1].

§2. Вычисление точек сингулярного спектра

Пусть

$$F_0 := F_0(\mu_1; \overline{\mu}_{q-1}) = \sum_{i=0}^{s_1} C_i^{(0)}(\overline{\mu}_{q-1})\mu_1^i$$

есть q-параметрическая полиномиальная $m \times n$ матрица ранга ρ, $q \geqslant 2$, $\rho < n$; $\{F_k\}$, $k = 0, 1, \ldots, q$, есть последовательность $(q-k)$-параметрических полиномиальных матриц, удовлетворяющих рекуррентным соотношениям вида

$$F_{k-1}(\mu_k, \ldots, \mu_q) = F_k(\mu_{k+1}, \ldots, \mu_q)\Lambda_k(\mu_k), \quad k = 1, \ldots, q, \tag{4}$$

где $F_k(\mu_{k+1}, \ldots, \mu_q) := [C_{s_k}^{(k)}(\mu_{k+1}, \ldots, \mu_q), \ldots, C_0^{(k)}(\mu_{k+1}, \ldots, \mu_q)]$, $\Lambda_k(\mu_k) = [\mu_k^{s_k} I_{n_k}, \ldots, \mu_k^0 I_{n_k}]^B$, $C_i^{(k)}(\mu_{k+1}, \ldots, \mu_q)$ – коэффициенты матрицы

$$F_{k-1}(\mu_k, \ldots, \mu_q) = \sum_{i=0}^{s_k} C_i^{(k)}(\mu_{k+1}, \ldots, \mu_q)\mu_k^i,$$

I_{n_k} – единичная матрица порядка n_k, n_k – число столбцов матриц

$$C_i^{(k)}(\mu_{k+1}, \ldots, \mu_q).$$

Требуется вычислить точки конечного сингулярного спектра матрицы $F_0(\mu_1; \overline{\mu}_{q-1})$, т.е. замкнутые неприводимые многообразия $\overline{\varkappa}_{q-p} = (\varkappa_{p+1}, \ldots, \varkappa_q)$, $p \geqslant 0$, аффинного пространства $\mathbb{C}^{q-p}$, образующие при $p = 0$ точки собственного сингулярного спектра $\sigma_{s1}[F]$, а при $p > 0$ – точки смешанного сингулярного спектра $\sigma_{s2}[F_0]$.

Для решения задачи применим индукцию по числу параметров. Для этой цели используется последовательность матриц (4).

Пусть $\overline{\varkappa}_{q-k} = (\varkappa_{k+1}, \ldots, \varkappa_q)$ есть точка множества $\sigma_{s1}[F_k]$; $\sigma_{rs}[F_0] = \varnothing$.

Базой индукции является следующее утверждение.

Лемма 2. *Для того, чтобы многообразие*

$$(\varkappa_k, \overline{\varkappa}_{q-k}) = (\varkappa_k, \varkappa_{k+1}, \ldots, \varkappa_q)$$

было точкой множества $\sigma_{s1}[F_{k-1}]$, необходимо и достаточно, чтобы пучок

$$\widehat{D}_k(\mu_k; \overline{\varkappa}_{q-k}) = \widehat{Q}_+(\overline{\varkappa}_{q-k}) - \mu_k \widehat{Q}_-(\overline{\varkappa}_{q-k})$$

имел собственные значения.

Здесь $\varkappa_k$ есть любое фиксированное собственное значение пучка $\widehat{D}_k(\mu_k; \overline{\varkappa}_{q-n})$, который является наследственным пучком для матрицы $[-W_-(\mu_k, \overline{\varkappa}_{q-k}), W_+(\mu_k, \overline{\varkappa}_{q-k})]$; $W_+(\mu_k, \overline{\varkappa}_{q-k})$ и $W_-(\mu_k, \overline{\varkappa}_{q-k})$ суть полиномиальные матрицы, составленные соответственно из tv первых и tv последних строк матрицы $W^{(k)}(\mu_k, \overline{\varkappa}_{q-k})$, столбцы которой образуют свободный базис правого нуль-пространства полиномальной матрицы $F_{k-1}(\overline{\mu}_k, \overline{\varkappa}_{q-k})$.

Справедливость этого утверждения следует из теоремы 2.2 статьи [1].

Рассмотрим применение метода индукции для вычисления одного (типичного) многообразия $\overline{\varkappa}_{q-p} = (\varkappa_{p+1}, \dots, \varkappa_q)$, образующего точку множества $\sigma_{s1}[F_p]$. На каждом шаге индукции вычисляется один из параметров многообразия $\overline{\varkappa}_{q-p}$ в последовательности $\varkappa_q, \varkappa_{q-1}, \dots, \varkappa_{p+1}$, начиная с $\varkappa_q$. Базой индукции для вычисления $\varkappa_k$, когда параметры $\varkappa_q, \dots, \varkappa_{k+1}$ уже вычислены, является двухпараметрическая матрица

$$F(\lambda, \mu) := F_{k-2}(\mu_{k-1}, \mu_k, \varkappa_{k+1}, \dots, \varkappa_q) \equiv F_{k-2}(\mu_{k+1}, \mu_k, \overline{\varkappa}_{q-k}).$$

Для вычисления параметра $\varkappa_q$ в качестве $F(\lambda, \mu)$ берется матрица $F_{q-2}(\mu_{q-1}, \mu_q)$ из последовательности (4).

Для вычисления параметра $\varkappa_k$ выполняются следующие операции.

(1) Вычисляется матрица $F(\lambda, \mu) = F_{k-2}(\mu_{k-1}, \mu_k, \varkappa_{k+1}, \dots, \varkappa_q)$, где $F_{k-2}(\mu_{k-1}, \dots, \mu_q)$ есть матрица из (4).

(2) Матрица $F(\lambda, \mu)$ представляется в виде

$$F(\lambda, \mu) = \sum_{i=0}^{t} C_i(\mu)\lambda^i = F_1(\mu)\Lambda_1(\lambda).$$

Здесь $\lambda = \mu_{k-1}$, $\mu := \mu_k$, $t = s_{k-1}$, $C_i := C_i^{(k-1)}(\mu_k, \overline{\varkappa}_{q-k})$ $\Lambda_1(\lambda) = [\lambda^t I_v, \dots, \lambda^0 I_v]^B$, I_v – единичная матрица, v – число столбцов в матрицах C_i.

(3) Формируется наследственный пучок $\widetilde{D}(\lambda,\mu)$ для матрицы $F_1(\mu)$: $\widetilde{D}(\lambda,\mu) = \widetilde{W}_+(\mu) - \lambda\widetilde{W}_-(\mu)$. Здесь $\widetilde{W}_+(\mu)$ и $\widetilde{W}_-(\mu)$ суть полиномиальные матрицы, составленные соответственно из tv_1 первых и tv_1 последних строк матрицы $W^{(1)}(\mu)$, столбцы которой образуют свободный базис правого нуль-пространства из полиномиальных решений матрицы $F_1(\mu)$.

(4) Вычисляется регулярный спектр пучка $\widetilde{D}(\lambda,\mu)$. Для этого, рассматривая пучок $\widetilde{D}(\lambda,\mu)$ как двухпараметрическую полиномиальную матрицу, можно использовать алгоритм из §1, т.е. выполнить следующие операции.

(4.1) Пучок $\widetilde{D}(\lambda,\mu)$ представляется в виде

$$\widetilde{D}(\lambda,\mu) = F_1^{(2)}(\mu)\Lambda_1^{(2)}(\lambda),$$

где

$$F_1^{(2)}(\mu) := [-\widetilde{W}_-(\mu), \widetilde{W}_+(\mu)], \quad \Lambda_1^{(2)}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda I \\ I \end{bmatrix}.$$

(4.2) Вычисляются все различные собственные значения μ_i, $i = 1,\ldots,r$, полиномиальной матрицы $F_1^{(2)}(\mu)$.

(4.3) Для любого (каждого) фиксированного собственного значения $\mu_i = \mu_*$ формируется наследственный пучок $\widehat{D}(\lambda,\mu_*)$ для матрицы $F_1^{(2)}(\mu_*)$:

$$\widehat{D}(\lambda,\mu_*) = \widehat{Q}_+(\mu_*) - \lambda\widehat{Q}_-(\mu_*).$$

Здесь $\widehat{Q}_+(\mu_*)$ и $\widehat{Q}_-(\mu_*)$ суть постоянные матрицы, составленные соответственно из tv_2 первых и tv_2 последних строк матрицы $\widehat{Q}$, столбцы которой образуют ортонормированный базис постоянной матрицы $F_1^{(2)}(\mu_*)$.

(4.4) Вычисляются все различные собственные значения λ_j, $j = 1,\ldots,p_*$, пучка $\widehat{D}(\lambda,\mu_*)$.

Любое (каждое) собственное значение пучка $\widehat{D}(\lambda,\mu_*)$ можно взять в качестве искомого параметра $\varkappa_k$.

Для вычисления следующего параметра $\varkappa_{k-1}$ искомого многообразия $\overline{\varkappa}_{q-p}$ следует вычислить матрицу

$$F(\lambda,\mu) = F_{k-3}(\mu_{q-2}, \mu_{q-1}, \varkappa_k, \ldots, \varkappa_q)$$

и к ней применить операции (2)–(4). Процесс вычисления параметров многообразия $\overline{\varkappa}_{q-p}$ продолжается аналогично и заканчивается на некотором шаге p, когда пучок $\widehat{D}(\lambda, \varkappa_{p+1}, \dots, \varkappa_q) \equiv \widehat{D}(\lambda; \overline{\varkappa}_{q-p})$ не будет иметь собственных значений.

Так вычисленное многообразие $\overline{\varkappa}_{q-p}$ образует при $p = 0$ точку множества $\sigma_{s1}[F_0]$, а при $p > 0$ – точку множества $\sigma_{s2}[F_0]$. Справедливость этих утверждений следует из теоремы 2.4 статьи [1].

§3. Вычисление спектральных векторов

Пусть $F_0 = F_0(\mu_1; \bar{\mu}_{q-1})$ есть q-параметрическая полиномиальная матрица общего вида; $\bar{\nu}_{q-1}$ и $\overline{\varkappa}_{q-p}$ суть точки множеств $\sigma_r[F_0]$ и $\sigma_s[F_0]$, вычисленные соответственно с помощью алгоритмов из §1 и §2. Требуется вычислить спектральные векторы x_p и $\widehat{x}_p$, соответствующие точкам $\bar{\nu}_{q-p}$ и $\overline{\varkappa}_{q-p}$.

По определению, спектральный вектор x_p образует с точкой $\bar{\nu}_{q-p}$ регулярного спектра $\sigma_r[F_0]$ спектральную пару $\bar{\nu}_{q-p}; x_p$, если выполняются следующие соотношения:

$$F_0(\mu_1, \dots, \mu_p, \bar{\nu}_{q-p}) x_p = 0, \quad x_p \in N_c[F_0(\mu_1, \dots, \mu_p, \overline{\nu}_{q-p})] \equiv N_c[F_0(*)].$$

Аналогично, спектральный вектор $\widehat{x}_p$ образует с точкой $\overline{\varkappa}_{q-p}$ сингулярного спектра матрицы F_0 спектральную пару, если выполняются соотношения

$$F_0(\mu_1, \dots, \mu_p, \overline{\varkappa}_{q-p}) \widehat{x}_p = 0, \quad \widehat{x}_p \in N_e[F_0]_*, \quad (*) := (\mu_1, \dots, \mu_p, \overline{\varkappa}_{q-p}).$$

При $p = 0$ пара $\bar{\nu}_q; x_0$ (пара $\overline{\varkappa}_q, \widehat{x}_0$) называется собственной спектральной парой, соответствующей точке из $\sigma_{r1}[F_0]$ (из $\sigma_{s1}[F_0]$).

Теоретической базой для вычисления спектральных векторов x_p и $\widehat{x}_p$ являются следующие свойства матриц из последовательности $\{F_k\}$.

1°. Между решениями x и $X = \Lambda^{(p)} x$, где $\Lambda^{(p)} := \Lambda_p(\mu_p) \cdots \Lambda_1(\mu_1) = \Lambda^{(p)}(\mu_1, \dots, \mu_p)$, соответственно уравнений $F_0(*) z = 0$ и $F_p(*) z = 0$ существует взаимно однозначное соответствие. Здесь $(*)$ есть общая точка спектров $\sigma[F_0]$ и $\sigma[F_p]$.

2°. Имеют место равенства

$$X_p = Q^{(p)} y_p = \Lambda_p Q^{(p-1)} y_{p-1} = \dots = \Lambda_p \Lambda_{p-1} \cdots \Lambda_1 Q^{(0)} y_0 \equiv \Lambda^{(p)} Q^{(0)} y_0.$$

Здесь $\operatorname{span} Q^{(0)} \subseteq N_c[F_0(*)]$.

3°. Имеют место равенства

$$\widehat{X}_p = W^{(p)} \widehat{y}_p = \Lambda_p W^{(p-1)} \widehat{y}_{p-1} = \dots = \Lambda_p \Lambda_{p-1} \cdots \Lambda_1 W^{(0)} \widehat{y}_0 = \Lambda^{(p)} W^{(0)} \widehat{y}_0.$$

Здесь $\operatorname{span} W^{(0)} \subseteq N_c[F_0]_*$.

Справедливость утверждений 1°–3° следует из свойств матриц последовательности $\{F_k\}$, доказанных в [1].

Имеют место следующие утверждения.

а) Спектральный вектор x_p, соответствующий точке $\bar\nu_{q-p}$ регулярного спектра $\sigma_r[F_0]$, совпадает с n последними компонентами вектора $X_p = Q^{(p)} y_p$, образующего с точкой $\overline{\nu}_{q-p}$ спектральную пару $\overline{\nu}_{q-p}$; X_p матрицы $F_p(\mu_{p+1}, \ldots, \mu_q)$.

б) Спектральный вектор $\widehat{x}_p$, соответствующий точке $\overline{\varkappa}_{q-p}$ сингулярного спектра $\sigma_s[F_0]$, совпадает с n последними компонентами вектора $\widehat{X}_p = W^{(p)}(\mu_p, \overline{\varkappa}_{q-p})\widehat{y}_p$, образующего с точкой $\overline{\varkappa}_{q-p} \in \sigma_s[F_p]$ сингулярную спектральную пару матрицы $F_p(\mu_{p+1}, \ldots, \mu_q)$.

Докажем справедливость п. а). Из равенства

$$F_0(\mu_1, \ldots, \mu_p, \bar\nu_{q-p})x = F_p(\bar\nu_{q-p})\Lambda^{(p)}(\mu_1, \ldots, \mu_p)x \tag{5}$$

с учетом вида матрицы $\Lambda^{(p)}$ следует, что вектор x совпадает с n последними компонентами вектора $X = \Lambda^{(p)}(\mu_1, \ldots, \mu_p)x$. Учитывая, что $X = X_p$, т.е. он является спектральным вектором матрицы $F_p(\mu_{p+1}, \ldots, \mu_q)$, соответствующим точке $\bar\nu_{q-p} = (\nu_{p+1}, \ldots, \mu_q)$ множества $\sigma_{r1}[F_p]$, из (5) находим

$$F_0(\mu_1, \ldots, \mu_p, \overline{\nu}_{q-p})x = 0.$$

Для завершения доказательства утверждения а) следует установить, что x есть спектральный вектор матрицы F_0, т.е. $x \in N_c[F_0(*)]$, $(*) := (\mu_1, \ldots, \mu_p, \bar\nu_{q-p})$. Этот факт следует из свойства 2°, если учесть, что $\operatorname{span} Q^{(0)} \subseteq N_c[F_0(*)]$. Справедливость а) установлена.

Доказательство п. б) проводится аналогично. Из равенства

$$F_0(\mu_1, \ldots, \mu_p, \overline{\varkappa}_{q-p})\widehat{x} = F_p(\overline{\varkappa}_{q-p})\Lambda^{(p)}(\mu_1, \ldots, \mu_p)\widehat{x},$$

с учетом вида матрицы $\Lambda^{(p)}(\mu_1, \ldots, \mu_p) = \Lambda_p(\mu_p)\Lambda_{p-1}(\mu_{p-1}) \ldots \Lambda_1(\mu_1)$, следует, что вектор x совпадает с n последними компонентами вектора $\widehat{X} = \Lambda^{(p)}(\mu_1, \ldots, \mu_p)\widehat{x}$. Принимая во внимание, что $\widehat{X} = \widehat{X}_p \in \operatorname{span} W^{(p)}(\mu_p, \overline{\varkappa}_{q-p})$ есть спектральный вектор матрицы $F_p(\mu_{p+1}, ..., \mu_q)$, соответствующий точке множества $\sigma_{s1}[F_p]$, имеем

$$F_0(\mu_1, \ldots, \mu_p, \overline{\varkappa}_{q-p})\widehat{x} = 0.$$

Для завершения доказательства утверждения б) следует установить, что $\widehat{x} \in N_c[F_0]_*$, т.е. $\widehat{x} = \widehat{x}_p$. Из свойства 3° имеем

$\widehat{x}_p \subseteq \operatorname{span} W^{(p)}(\mu_p, \overline{\varkappa}^*_{q-p})$, так что

$$\widehat{X}_p = W^{(p)}\widehat{y}_p = \Lambda_p W^{(p-1)}\widehat{y}_{p-1} = \cdots = \Lambda_p(\mu_p)\cdots\Lambda_1(\mu_1)W^{(0)}\widehat{y}_0.$$

Отсюда, поскольку $\operatorname{span} W^{(0)}_{(*)} \subseteq N_c[F_0]_*$, следует, что $\widehat{x} = \widehat{x}_p \subseteq N_c[F_0]_*$, что и требовалось доказать.

Таким образом, для вычисления спектральных векторов x_p и $\widehat{x}_p$ следует вычислить векторы X_p и $\widehat{X}_p$ соответственно. Для этого, учитывая, что $\bar{\nu}_{q-p}$, x_p есть собственная спектральная пара для матрицы $F_p(\mu_{p+1}, \ldots, \mu_q)$, следует найти ортонормированный базис правого нуль-пространства постоянной матрицы $F_p(\bar{\nu}_{q-p})$, например, применив к $F_p(\bar{\nu}_{q-p})$ алгоритм ΔW-0 факторизации [4],

$$F_p(\bar{\nu}_{q-p})W = [\Delta, 0].$$

Здесь $W = [W_1, W_0]$ – ортогональная матрица, $\operatorname{span} W_0 = N_c[F_p(\bar{\nu}_{q-p})]$. Искомый вектор x_p принадлежит $\operatorname{span} W_0$.

Аналогично, для вычисления вектора $\widehat{x}_p$, учитывая, что $\widehat{x}_p \in \operatorname{span} W^{(p)}(\overline{\varkappa}_{q-p})$, следует вычислить свободный базис правого нуль-пространства матрицы $F_{p-1}(\mu_p, \overline{\varkappa}_{q-p})$, используя для этой цели алгоритм ΔW-1 факторизации [4]:

$$F_{p-1}(\mu_p, \overline{\varkappa}_{q-p})W(\mu_p) = [\Delta(\mu_p), 0],$$

где $W(\mu_p) = [W_1(\mu_0), W_0(\mu_p)]$ есть унимодулярная матрица, $\operatorname{span} W_0(\mu_p) \subseteq N_c[F_{p-1}]$. Искомый вектор x_p принадлежит $\operatorname{span} W_0(\mu_p)$.

§4. Замечания

1. Методы, рассмотренные в §§1 и 2, представляют собой общую схему построения алгоритмов решения спектральных задач для q-параметрических полиномиальных матриц общего вида. Эта схема использует метод индукции по числу параметров. Решаются две задачи: задача формирования последовательности $(q-k)$-параметрических полиномиальных матриц для проведения индукции и задача вычисления базы для каждого шага индукции. В статье вычисление базы реализуется методом наследственных пучков для вспомогательных двухпараметрических полиномиальных матриц.

Для решения задач общей схемы могут использоваться различные методы, выбор которых определяет алгоритм решения спектральных задач для многопараметрических полиномиальных матриц.

2. Алгоритм вычисления точек сингулярного спектра, предложенный в статье [1], может иметь тупиковое окончание при $q > 2$. Причиной является ошибочный выбор базы для применения индукции.

Алгоритм вычисления точек сингулярного спектра из §2 настоящей статьи является исправленной версией для упомянутого выше алгоритма из [1].

Литература

1. В. Н. Кублановская, *К решению спектральных задач для q-параметрических полиномиальных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **382** (2010), 168–183.
2. В. Н. Кублановская, *К решению задач алгебры для двухпараметричекских матриц.* 8. — Зап. научн. семин. ПОМИ **382** (2010), 150–167.
3. В. Н. Кублановская, *К решению задач алгебры для двухпараметрических матриц.* 9. — Зап. научн. семин. ПОМИ **395** (2011), 124–141.
4. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *Численные методы решения параметрических задач алгебры.* Часть 1. Однопараметрические задачи. Наука. С.-Петербург, 2004.

Kublanovskaya V. N., Khazanov V. B. To solving spectral problems for q-parameter polynomial matrices. 2.

The paper continues the studies of the method of hereditary pencils for computing points of the finite spectrum of a multiparameter polynomial matrix. The method involves induction on the number of parameters and consists of two stages. At the first stage, given the coefficients of a multiparameter matrix, a sequence of $(q-k)$-parameter polynomial matrices $(k = 1, \dots, q)$ satisfying certain recursive relations is formed. This sequence is used at the second stage. As the base case, two-parameter matrices and their spectral characteristics, which are computed by applying the method of hereditary pencils, are considered. Algorithms implementing the second stage are suggested and theoretically justified.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, С.-Петербург 191023,
Россия
E-mail: veracub@pdmi.ras.ru

Поступило 29 сентября 2011 г.

С.-Петербургский государственный
морской технический университет,
С.-Петербург, Россия
E-mail: khazanovvb@gmail.com