Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 395, 2011 г.

В. Н. Кублановская

К РЕШЕНИЮ ПРОБЛЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МАТРИЦ ОБЩЕГО ВИДА

§1. Постановка задачи

Пусть $F(\mu) = \sum\limits_{i=0}^{s} C_i\mu^i$ есть полиномиальная $m \times n$ матрица ранга $\rho : F(\mu) \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$. Проблема собственных значений для $F(\mu)$ состоит в вычислении всех различных собственных значений матрицы $F(\mu)$ и им соответствующих собственных векторов, т.е. в решении уравнений

$$F(\mu)x = 0 \quad \text{и} \quad F^T(\mu)y = 0.$$

Для определенности будем рассматривать решение уравнения

$$F(\mu)x = 0 \tag{1}$$

в точках спектра матрицы $F(\mu)$. Представим $F(\mu)$ в виде

$$F(\mu) = F_1\Lambda_1(\mu), \quad F_1 := [C_s, \dots, C_0], \quad \Lambda_1(\mu) = [\mu^s I_n, \dots, \mu^0 I_n]. \tag{2}$$

Пусть $\overline{N}[F]$ – правое нуль-пространство $F(\mu)$, $N_c[F]$ – подпространство $\overline{N}[F]$ из правых полиномиальных решений матрицы $F(\mu)$, $\mathcal{H}_c[F]$ – подпространство правого нуль-пространства матрицы $F(\mu)$, составленное из полиномиальных решений нулевого индекса матрицы $[C_s, \dots, C_0]^B$, так что $\mathcal{H}_c[F] = N_c[F_1^B] = \{N_c[C_s] \cap \ldots \cap N_c[C_0]\}$, $N[F]$ – объединение правых инвариантных подпространств, соответствующих собственным значениям матрицы $F(\mu)$.

Имеет место соотношение

$$\overline{N}[F] = N[F] \cup N_c[F] \cup \mathcal{H}_c[F].$$

В случае матриц $F(\mu)$ общего вида решение уравнения (1) является неопределенным. Причиной является присутствие полиномиальных решений. Так при $\mathcal{H}_c[F] \neq 0$ уравнение (1) в каждой точке аффинного

Ключевые слова: Полиномиальные матрицы общего вида, нуль-пространство, регулярное ядро, собственные значения, наследственный пучок, ранговая факторизация.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-00318-а.

пространства (в том числе и в точках спектра матрицы $F(\mu)$) имеет полиномиальные решения нулевого индекса.

При выполнении соотношений

$$N[F] \cap \overline{N}_c[F] = 0, \quad \overline{N}_c[F] = N_c[F] \cup \mathcal{H}_c[F] \tag{3}$$

для устранения неопределенностей при решении уравнения (1) в статье предлагаются алгоритм исчерпывания подпространства $\mathcal{H}_c[F]$ из нуль-пространства матрицы $F(\mu)$ и алгоритмы выделения регулярного ядра матрицы $F(\mu)$.

Выделение регулярного ядра матрицы $F(\mu)$ реализуется с помощью алгоритмов ΔW-1 ранговой факторизации [1]. Линеаризация регулярной полиномиальной матрицы осуществляется с помощью метода наследственных пучков [2]. Выполнение условия (3) достигается выбором свободного базиса нуль-пространства матрицы $F(\mu)$. Применение алгоритмов ранговой факторизации к однопараметрическим полиномиальным матрицам позволяет находить свободные базисы нуль-пространств этих матриц. В статье решение проблемы собственных значений полиномиальных матриц общего вида сводится к решению обобщенной проблемы собственных значений, т.е. к вычислению собственных значений регулярного пучка постоянных матриц. Алгоритмы решения этой задачи широко представлены в литературе (см., например, [3, 4, 5, 6]).

§2. Теоретические предпосылки

Теоретической базой для построения алгоритма решения проблемы собственных значений матрицы $F(\mu) \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$ и его обоснования являются следующие утверждения.

Лемма 1. *Между решениями x и $X = \Lambda_1(\mu)x$ соответственно уравнений $F(\mu)z = 0$ и $F_1 z = 0$ существует взаимно однозначное соответствие, а именно, если $x \in N_c[F]_*$, то $X = \Lambda_1(\mu)x \in N_c[F_1]_*$; если $x \in N_c[F(*)]$, то $X = \Lambda_1(\mu)x \in N_c[F_1(*)]$, где $(*)$ обозначает точку спектра.*

Справедливость леммы следует из равенства (2).

Теорема 2. *Для существования решения ν; x_*, где $x_* \in N_c[F(\nu)]$, уравнения $F(\mu)x = 0$ необходимо и достаточно, чтобы существовало решение ν; y_*, где $y_* \in N_c[D_0(\nu)]$, уравнения $D_0(\mu)y = 0$. Здесь $D_0(\mu) = Q_+^{(0)} - \mu Q_-^{(0)}$ есть наследственный пучок матрицы $F_1 =$*

$[C_s, \dots, C_0]$; *матрицы* $Q_+^{(0)}$ *и* $Q_-^{(0)}$ *составлены из* ns *первых и* ns *последних строк матрицы* $Q^{(0)}$*, столбцы которой образуют ортонормальный базис* $N_c[F_1]$.

Доказательство. Необходимость. По условию, $\nu; x_*$ есть собственная пара матрицы $F(\mu) : F(\nu)x_* = 0$, $x_* \in N_c[F(\nu)]$. Отсюда, с учетом леммы, имеем $F_1\Lambda_1(\nu)x_* = 0$, т.е. $\Lambda_1(\nu)x_* \in N_c[F_1]$, так что имеет место равенство $\Lambda_1(\nu)x_* = Q^{(0)}y_*$, где $\operatorname{span} Q^{(0)} = N_c[F_1]$. Учитывая вид матрицы $\Lambda_1(\nu)$, находим $D_0(\nu)y_* := [Q_*^{(0)} - \nu Q_-^{(0)}]y_* = 0$. Тем самым необходимость установлена.

Достаточность. По условию, $Q_+^{(0)}y_* = \nu Q_-^{(0)}y_*$. Тогда при $x_* = Q_0y_*$, где Q_0 есть последняя блочная компонента матрицы

$$Q^{(0)} = [Q_s, \dots, Q_0]^B,$$

справедливо равенство $\Lambda_1(\nu)x_* = Q^{(0)}y_*$. С учетом равенства $\operatorname{span} Q^{(0)} = N_c[F_1]$ и леммы 1 имеем $F(\nu)x_* = 0$, $x_* \in N_c[F(\nu)]$, что и доказывает достаточность. □

Следствие 3. а) *Для существования собственной пары* ν; x_* *матрицы* $F(\mu)$ *необходимо и достаточно, чтобы наследственный пучок* $D_0(\mu)$ *для матрицы* F_1 *из* (2) *имел собственные значения.*

б) *Между собственными парами матрицы* $F(\mu)$ *и наследственного пучка* $D_0(\mu)$ *для матрицы* F_1 *существует взаимно однозначное соответствие.*

§3. Исчерпывание подпространства $\mathcal{H}_c[F]$

Исчерпывание $\mathcal{H}_c[F]$ из правого нуль-пространства матрицы $F(\mu)$ реализуется преобразованием матрицы $F(\mu) = \sum\limits_{i=0}^{s} C_i\mu^i$ в матрицу $\widehat{F}(\mu) = \sum\limits_{i=0}^{s} \widehat{C}_i\mu^i$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\mathcal{H}_c[\widehat{F}] = \varnothing, \quad \sigma[\widehat{F}] = \sigma[F]. \tag{4}$$

С этой целью вычисляется ортогональная матрица $U = [U_1, U_0]$, реализующая ΔW-0 факторизацию постоянной матрицы $F_1^B := [C_s, \dots, C_0]^B$ размеров $(s+1)m \times n$: $F_1^B U = [\Delta, 0]$. Здесь 0 – нулевая $(s+1)m \times (n-r)$ матрица, r – ранг F_1^B; U_0 есть $n \times (n-r)$ матрица, столбцы которой образуют ортонормированный базис правого нуль-пространства матрицы F_1^B, так что $\operatorname{span} U_0 = \{N_c[C_s] \cap \ldots \cap N_c[C_0]\}$; Δ есть $(s+1)m \times r$ постоянная матрица, $\Delta = F_1^B U_1 := [\widehat{C}_s, \ldots, \widehat{C}_0]^B$.

Матрица $\widehat{F}(\mu) = \sum_{i=0}^{s} \widehat{C}_i \mu^i = F(\mu)U_1$, $\widehat{C}_i = C_i U_0$, $i = 0, \ldots, s$, является искомой матрицей, удовлетворяющей условиям (4) по свойствам ΔW-0 факторизации. Собственные векторы x_* и $\hat{x}_*$, соответствующие одному и тому же собственному значению матриц $F(\mu)$ и $\widehat{F}(\mu)$, связаны соотношением $x_* = U_1 \widehat{x}_*$.

§4. Вычисление регулярного ядра полиномиальной матрицы

Рассмотрим три алгоритма вычисления регулярного ядра полиномиальной матрицы $F(\mu) \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$.

Первый алгоритм основан на применении ΔW-1 факторизации [1]. Выполняются следующие операции.

(1) К матрице $F(\mu) = \sum_{i=0}^{s} C_i \mu^i$ применяется алгоритм ΔW-1 факторизации:

$$F(\mu) W^{(1)}(\mu) = [\Delta_1(\mu), 0]. \tag{5}$$

Здесь 0 – нулевая $m \times (n-\rho)$ матрица; $W^{(1)}(\mu) = [W_1^{(1)}(\mu), W_0^{(1)}(\mu)]$ – унимодулярная матрица с блоками $W_1^{(1)}(\mu)$ и $W_0^{(1)}(\mu)$ соответственно размеров $n \times \rho$ и $n \times (n-\rho)$; $\operatorname{span} W_0^{(1)} = N_c[F]$; $\Delta_1(\mu)$ есть полиномиальная $m \times \rho$ матрица ранга ρ; собственные значения $\Delta_1(\mu)$ и $F(\mu)$ совпадают.

(2) К матрице $\Delta_1^T(\mu)$ применяется алгоритм ΔW-1 факторизации: $\Delta_1^T(\mu) W^{(2)}(\mu) = [\Delta_2(\mu), 0]$, где $\Delta_2(\mu)$ есть полиномиальная $\rho \times \rho$ матрица ранга ρ; собственные значения $\Delta_2(\mu)$ совпадают с собственными значениями матрицы $F(\mu)$, так что искомое регулярное ядро $G(\mu)$ матрицы $F(\mu)$ есть

$$G(\mu) = (W_1^{(2)}(\mu))^T F(\mu) W_1^{(1)}(\mu). \tag{6}$$

Второй алгоритм вычисления регулярного ядра $T(\mu)$ для $F(\mu)$ состоит в применении алгоритма UTV-1 факторизации [1] к матрице $F(\mu)$, т.е. в представлении $F(\mu)$ в виде

$$F(\mu) = U(\mu) T(\mu) V(\mu),$$

где $U(\mu) \in \mathcal{F}_\rho^{m\times\rho}$, $V(\mu) \in \mathcal{F}_\rho^{\rho\times n}$, $T(\mu) \in \mathcal{F}_\rho^{\rho\times\rho}$ суть полиномиальные матрицы; $U(\mu)$ и $V^T(\mu)$ являются столбцовыми подматрицами унимодулярных матриц.

Третий алгоритм вычисления регулярного ядра применим к матрицам $F(\mu)$ полного строчного ранга. Алгоритм использует ∇V-1 факторизацию [1] матрицы $F(\mu)$:

$$F(\mu) = \nabla(\mu)V(\mu),$$

где $\nabla(\mu)$ есть искомое регулярное ядро матрицы $F(\mu)$, $V(\mu) \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$ – строчная подматрица унимодулярной матрицы.

§5. Алгоритм линеаризации регулярного ядра

Рассмотрим линеаризацию регулярного ядра $G(\mu)$. Линеаризация $T(\mu)$ и $\nabla(\mu)$ проводится аналогично.

Для линеаризации $G(\mu)$ применяется метод наследственных пучков [2]. Выполняются следующие операции.

(1) Матрица $G(\mu)$ представляется в виде

$$G(\mu) = \sum_{i=0}^{s} \widehat{C}_i \mu^i = \widehat{F}_1 \Lambda_1(\mu),$$

$\widehat{F}_1 := [\widehat{C}_s, \ldots, \widehat{C}_0]$ – постоянная $\rho \times (s+1)\rho$ матрица;

$$\Lambda_1(\mu) = [\mu^s I_\rho, \ldots, \mu^0 I_\rho]^B.$$

(2) Вычисляется ортогональная матрица $Q = [Q_1, Q_0]$, реализующая ΔW-0 факторизацию матрицы $\widehat{F}_1$: $\widehat{F}_1 Q = [\Delta, 0]$, 0 – нулевая матрица, Q – ортогональная матрица порядка $(s+1)\rho$ с блоками Q_1 и Q_0 соответственно размеров $(s+1)\rho \times \rho$ и $(s+1)\rho \times s\rho$.

(3) Формируется регулярный пучок $D(\mu) = Q_+ - \mu Q_-$ порядка ρs, где Q_+ и Q_- постоянные матрицы порядка ρs, составленные из ρs первых и ρs последних строк матрицы Q_0.

Пучок $D(\mu)$ есть искомый регулярный пучок, собственные значения которого совпадают с собственными значениями регулярного ядра $G(\mu)$, а, следовательно, и с искомыми собственными значениями матрицы $F(\mu)$. В дальнейшем пучок $D(\mu)$ будет называться сопутствующим пучком для регулярного ядра $G(\mu)$ матрицы $F(\mu)$ (сопутствующим пучком для матрицы $F(\mu)$).

§6. Алгоритм вычисления регулярного ядра пучка постоянных матриц общего вида

Пусть $A-\mu B$ есть пучок ранга ρ постоянных $m\times n$ матриц, для которого следует вычислить регулярный $\rho\times\rho$ пучок (регулярное ядро), собственные значения которого совпадают с собственными значениями пучка $A-\mu B$.

Для решения задачи к пучку $A-\mu B$, как частному случаю полиномиальной матрицы $F(\mu)$, применимы те же алгоритмы, что и для $F(\mu)$. Для определенности рассмотрим алгоритм вычисления $G(\mu)=\widehat{A}-\mu\widehat{B}$. Выполняются следующие операции.

(1) К пучку $A-\mu B$ применяется алгоритм ΔW-1 факторизации: $(A-\mu B)W^{(1)}(\mu)=[\Delta(\mu),0]$, где $\Delta(\mu):=A_1-\mu B_1$ есть пучок размеров $m\times\rho$ и ранга ρ, $W^{(1)}=[W_1^{(1)},W_0^{(1)}]$.

(2) К пучку $A_1^T-\mu B^T$ применяется алгоритм ΔW-1 факторизации: $(A^T-\mu B^T)W^{(2)}(\mu)=[\Delta_2(\mu),0]$, где $\Delta_2^T(\mu):=\widehat{A}-\mu\widehat{B}$ есть искомое регулярное ядро заданного пучка $A-\mu B$.

Собственные векторы x_* и $\hat{x}_*$ соответственно пучков $A-\mu B$ и $\widehat{A}-\mu\widehat{B}$, отвечающие одному и тому же собственному значению ν, удовлетворяют соотношению

$$x_*=W_1^{(1)}(\mu_*)\hat{x}_*.$$

Справедливость этого утверждения следует из равенства

$$\widehat{A}-\mu\widehat{B}=(W_1^{(2)}(\mu))^T(A-\mu B)(W_1^{(1)}(\mu)).$$

§7. Общая схема построения алгоритмов

Пусть $F(\mu)\in\mathcal{F}_\rho^{m\times n}$ – полиномиальная матрица, для которой следует вычислить все различные собственные значения и им соответствующие собственные векторы. Ниже приводятся алгоритмы сведения поставленной задачи к решению обобщенной проблемы собственных значений матрицы. Построение алгоритмов основано на использовании методов ранговой факторизации и наследственных пучков. Рассмотрим общую схему построения алгоритмов. Решаются следующие задачи.

(1) Матрица $F(\mu)=\sum\limits_{i=0}^{s}C_i\mu^i$ представляется в виде

$$F(\mu)=F_1\Lambda_1(\mu),\quad F_1=[C_s,\dots,C_0],\quad \Lambda_1(\mu)=[\mu^sI_n,\dots,\mu^0I_n]^B.$$

(2) Из правого и левого нуль-пространств матрицы F_1 исчерпываются подпространства $\mathcal{H}_c[F]$ и $\mathcal{H}_c[F^T]$.

Результатом будет полиномиальная $m_1 \times n_1$ матрица $\widetilde{F}(\mu) = \sum\limits_{i=0}^{s} \widetilde{C}_i \mu^i$, собственные значения которой совпадают с собственными значениями заданной матрицы $F(\mu)$. При этом $\mathcal{H}[\widetilde{F}] = 0$ и $\mathcal{H}[\widetilde{F}^T] = 0$.

(3) Вычисляется регулярное ядро матрицы $\widetilde{F}(\mu)$ и находится сопутствующий для него регулярный пучок $\widetilde{D}_0(\mu) = Q_+^{(0)} - \mu Q_-^{(0)}$.

(4) Вычисляются все различные собственные значения пучка $\widetilde{D}_0(\mu)$. С этой целью для него решается обобщенная проблема собственных значений.

Выбранные методы для решения задач (1)–(4) предложенной схемы определяют конкретный алгоритм решения проблемы собственных значений для матрицы $F(\mu)$.

Литература

1. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *Численные методы решения параметрических задач алгебры.* Часть 1. *Однопараметрические задачи.* Наука, С.-Петербург, 2004.
2. В. Н. Кублановская, *К решению задач алгебры для двухпараметрических матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **367** (2009), 121–144.
3. C. B. Moler, G. W. Stewart, *An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems.* — SIAM J. Numer. Anal. **10** (1973), 241–256.
4. C. Van Loan, *A general matrix eigenvalue algorithm.* — SIAM J. Numer. Anal. **12** (1975), 819–834.
5. V. N. Kublanovskaya, *The AB-algorithm and its modifications for the spectral problems of linear pencils of matrices.* — Numer. Math. **43**, No. 3 (1984), 329–342.
6. B. Kagström, RGSVD – *an algorithm for computing the Kronecker structure and reducing subspaces of singular $A - \lambda B$ pencils.* — SIAM J. Sci. and Stat. Comput. **7**, No. 1 (1986), 185–211.

Kublanovskaya V. N. To solving the eigenvalue problem for polynomial matrices of general form.

The paper considers the eigenvalue problem for a polynomial $m \times n$ matrix $F(\mu)$ of rank ρ. Algorithms allowing one to reduce this problem to the generalized matrix eigenvalue problem are suggested. The algorithms are based on combining rank factorization methods and the method of hereditary pencils. Methods for exhausting subspaces of polynomial solutions of

zero index from the matrix null-spaces and for isolating the regular kernel from $F(\mu)$, with the subsequent linearization, are proposed.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: veracub@pdmi.ras.ru

Поступило 20 апреля 2010 г.