Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 395, 2011 г.

В. Н. Кублановская

К РЕШЕНИЮ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ МАТРИЦЫ

§1. Постановка задачи

Рассматривается аддитивная и мультипликативная обратные задачи на собственные значения постоянной $n \times n$ матрицы $A = (a_{ij})$.

Под аддитивной задачей понимается нахождение диагональной матрицы D такой, чтобы матрица $A + D$ имела заданные собственные значения. В дальнейшем, через $\overline{A}$ обозначается или диагональная матрица из заданных собственных значения $\overline{\lambda}_i$, $i = 1, \ldots, n$, или матрица, собственными значениями которой являются заданные числа $\overline{\lambda}_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Рассматриваются два вида мультипликативных задач: 1) для матрицы A найти диагональную матрицу D такую, чтобы матрица AD имела заданные собственные значения; 2) для матрицы A найти диагональную матрицу D такую, чтобы матрица DA имела заданные собственные значения. Очевидно, решение обратной задачи пункта 2) сводится к решению обратной задачи пункта 1) для матрицы A^T. В дальнейшем, для определенности будем рассматривать мультипликативную обратную задачу в формулировке пункта 1). Будем предполагать, что матрица A имеет простую структуру: $\overline{A} = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Матрица $\widetilde{A} = \operatorname{diag}\{\widetilde{\lambda}_1, \ldots, \widetilde{\lambda}_n\}$ отличается от $\overline{A}$ порядком следования диагональных элементов.

§2. Связь обратных задач с многопараметрическими пучками матриц

Многопараметрическую полиномиальную матрицу с линейным вхождением параметров назовем многопараметрическим пучком матриц.

Ключевые слова: аддитивная и мультипликативная обратные задачи, многопараметрический пучок матриц, регулярный и сингулярный спектры многопараметрического пучка.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-00318-а.

Пусть

$$F(\mu_1;\ldots;\mu_n) := \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i P_i \tag{1}$$

есть регулярный n-параметрический пучок общего вида $F(\mu_1;\ldots;\mu_n) \in F_n^{n\times n}$. Здесь P_i, $i=1,\ldots,n+1$, – постоянные $n\times n$ матрицы, $\mu_{n+1}=1$.

Каждой из рассматриваемых выше обратных задач сопоставим n-параметрический регулярный пучок. Для аддитивной задачи – это пучок $F^{(1)}(\mu_1;\ldots;\mu_n)$ вида

$$F^{(1)}(\mu_1;\ldots;\mu_n) = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i P_i^{(1)} = A + \operatorname{diag}\{\mu_1,\ldots,\mu_n\} - \overline{A}, \tag{2}$$

где $P_i^{(1)} = e_i e_i^T$, e_i – столбец с номером i единичной матрицы I_n, $i=1,\ldots,n$; $P_{n+1}^{(1)} = A - \overline{A}$. Для мультипликативной задачи – это пучок вида

$$F^{(2)}(\mu_1;\ldots;\mu_n) = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i P_i^{(2)} = A\operatorname{diag}\{\mu_1,\ldots,\mu_n\} - \overline{A}, \tag{3}$$

где $P_i^{(2)}$, $i=1,\ldots,n$, есть $n\times n$ матрица, отличающаяся от нулевой матрицы столбцом с номером i, который совпадает с i-м столбцом $[a_{1i},\ldots,a_{ni}]^T$ матрицы A; $P_{n+1} = -\overline{A}$. Обозначим через $\overline{\nu}_* = (\nu_1^*,\ldots,\nu_n^*)$ замкнутое неприводимое многообразие аффинного пространства, образующее точку собственного регулярного спектра (собственное значение) пучка $F^{(i)}(\mu_1;\ldots;\mu_n)$. При этом $\nu_k^* \neq \nu_j^*$ при $k\neq j$. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. (а) *Каждая точка* $(\nu_1^*,\ldots,\nu_n^*) \in \sigma_{r1}[F^{(1)}]$ *является решением аддитивной задачи при* $\operatorname{diag}\{\mu_1,\ldots,\mu_n\} = \operatorname{diag}\{\nu_1^*,\ldots,\nu_n^*\}$, *т.е. собственные значения матрицы* $A + \operatorname{diag}\{\nu_1^*,\ldots,\nu_n^*\}$ *совпадают с заданными собственными значениями* λ_i, $i=1\ldots n$.

(б) *Каждая точка* $\{\nu_1^*,\ldots,\nu_n^*\} \in \sigma_{r1}[F^{(2)}]$ *является решением мультипликативной задачи при* $\operatorname{diag}\{\mu_1,\ldots,\mu_n\} = \operatorname{diag}\{\nu_1^*,\ldots,\nu_n^*\}$, *т.е. собственные значения матрицы* $A\operatorname{diag}\{\nu_1^*,\ldots,\nu_n^*\}$ *совпадают с заданными собственными значениями* λ_i, $i=1\ldots n$.

При этом, если множество $\sigma_{r1}[F^{(i)}]$, $i=1,2$, *не содержит точек вида* $\overline{\nu} = (\nu_1^*,\ldots,\nu_n^*)$, *то рассматриваемая обратная задача не имеет решения при заданных собственных значениях* λ_i, $i=1,\ldots,n$.

Доказательству теоремы предпошлем рассмотрение некоторых свойств многопараметрического регулярного пучка $F(\mu_1;\ldots;\mu_n)$.

Пусть $F(\mu_1;\ldots;\mu_n)=\sum\limits_{i=1}^{n+1}\mu_iP_i\in\mathcal{F}_n^{n\times n}$, $\mu_{n+1}=1$, есть n-параметрический регулярный пучок матриц.

Имеют место следующие свойства пучка $F(\mu_1;\ldots;\mu_n)$.

1°. Конечный спектр $\sigma[F]$ пучка $F(\mu_1;\ldots;\mu_n)$ совпадает с его собственным регулярным спектром $\sigma_{r1}[F]$.

Это свойство следует из регулярности пучка $F(\mu_1;\ldots;\mu_n)$.

2°. Замкнутое неприводимое многообразие $\overline{\nu}:=(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ аффинного пространства C^n образует точку множества $\sigma_{r1}[F]$ при выполнении любого из следующих двух условий:

а) Спектральный вектор x, образующий с многообразием $(\nu_1,...,\nu_n)$ спектральную пару, удовлетворяет условию $x\in N_c[F(\nu_1;\ldots;\nu_n)]$, где $N_c[F(*)]$ есть правое нуль-пространство постоянной матрицы $F(*)=F(\nu_1;\ldots;\nu_n)$.

б) Имеет место неравенство

$$\operatorname{rank} F(\nu_1;\ldots;\nu_n)<n,$$

где n – нормальный ранг $F(\mu_1;\ldots;\mu_n)$.

Достаточность условия а) следует из определения [1] точек множества $\sigma_{r1}[F]$ для любой многопараметрической матрицы $F(\mu_1;\ldots;\mu_n)\in\mathcal{F}_\rho^{n\times n}$ ранга ρ. Достаточность условия б) следует из эквивалентности соотношений

$$x\in N_c[F(\nu_1,\ldots,\nu_n)]\quad\text{и}\quad\operatorname{rank}F(\nu_1;\ldots;\nu_n)<n.$$

Представим $F(\mu_1;\ldots;\mu_n)\in F_n^{n\times n}$ в виде n пучков полиномиальных матриц

$$F(\mu_1;\ldots;\mu_n)=A^{(k)}+\mu_kB^{(k)},\quad k=1,\ldots,n. \tag{4}$$

Здесь $B^{(k)}=P_k$ есть постоянная матрица; $A^{(k)}=A^{(k)}(\mu_1,\ldots,\mu_{k-1},\mu_{k+1},\ldots,\mu_n)=\sum\limits_{i\neq k}\mu_iP_i$ есть $(n-1)$-параметрическая полиномиальная матрица с линейным вхождением параметров.

3°. Имеют место равенства

$$\sigma_{r1}[F]=\sigma_{r1}[A^{(1)}+\mu_1B^{(1)}]=\cdots=\sigma_{r1}[A^{(n)}+\mu_nB^{(n)}]. \tag{5}$$

Равенства (5) следуют из (4) с учетом того, что $F(\mu_1;\dots;\mu_n)$ и $A^{(k)}+\mu_k B^{(k)}$, $k=1,\dots,n$, являются регулярными многопараметрическими полиномиальными матрицами.

4°. Многообразия $\overline{\nu}=(\nu_1,\dots,\nu_n)$, образующие точки множеств $\sigma_{r1}[F]$ и $\sigma_{r1}[A^{(k)}+\mu_k B^{(k)}]$, $k=1,\dots,n$, определяются с точностью до перестановок их параметров ν_i. Многообразия $\nu^{(k)}$ и $\nu^{(1)}$, принадлежащие соответственно множествам $\sigma_{r1}[A^{(k)}+\mu_k B^{(k)}]$ и $\sigma_{r1}[A^{(1)}+\mu_1 B^{(1)}]$, удовлетворяют соотношениям $\overline{\nu}^{(k)}=\overline{\nu}^{(1)}\theta_k$, где θ_k – матрица перестановок такая, что $\nu_i^{(k)}=\nu_i^{(1)}$ при $i\neq 1,k$; $\nu_i^{(k)}=\nu_k^{(1)}$, $\nu_k^{(k)}=\nu_1^{(k)}$. При этом каждое многообразие $\overline{\nu}_i^{(k)}=\overline{\nu}^{(1)}\theta_k$, $k=1,\dots,n$, есть точка множества $\sigma_{r1}[F]$, так что точки $\sigma_{r1}[F]$ определяются с точностью до порядка следования их координат.

Свойство 4° следует из (4) и (5).

5°. При вычислении точек $\overline{\nu}_*=(\nu_1^*,\dots,\nu_n^*)$ спектра $\sigma_{r1}[F]$ достаточно вычислять точки $\overline{\nu}_*^{(k)}$ множества $\sigma_{r1}[A^{(k)}+\mu_k B^{(k)}]$ одного из пучков при фиксированном k, например, точки $\overline{\nu}_*^{(1)}$ из множества $\sigma_{r1}[A^{(1)}+\mu_1 B^{(1)}]$.

Это свойство следует из 4°.

6°. Каждому многообразию $\overline{\nu}_*=(\nu_1^*,\dots,\nu_n^*)$, $\nu_i^*\neq\nu_j^*$ при $i\neq j$, из множества $\sigma_{r1}[F]$ соответствует n линейно независимых спектральных векторов $x^{(1)},\dots,x^{(n)}$:

$$F(\overline{\nu}_*)x^{(k)}=0,\quad k=1,\dots,n. \tag{6}$$

Действительно, из равенств

$$F(\overline{\nu}^{(1)}\theta_k)=A^{(k)}(\nu_1^*,\dots,\nu_{k-1}^*,\nu_{k+1}^*,\dots,\nu_n^*)+\nu_k^* B^{(k)},\quad k=1,\dots,n,$$

с учетом того, что $\nu_*^{(1)}\theta_k$ есть точка спектра пучка $A^{(k)}+\mu_k B^{(k)}$, следует, что

$$F(\overline{\nu}_*^{(1)}\theta_k)x^{(k)}=0,\quad k=1,\dots,n. \tag{7}$$

Линейная независимость векторов $x^{(1)},\dots,x^{(n)}$ из (7) следует из несовпадения параметров, образующих точку $\overline{\nu}_*^{(1)}=(\nu_1^*,\dots,\nu_n^*)$ множества $\sigma_{r1}[A^{(1)}+\mu_1 B^{(1)}]$.

7°. Из равенств (7) следуют равенства

$$F(\overline{\nu}_*^{(1)})x^{(k)}=0,\quad k=1,\dots,n. \tag{8}$$

Вернемся к доказательству теоремы 1.

Докажем утверждение (а). Пусть n-параметрический регулярный пучок $F(\mu_1;\dots;\mu_n)$ совпадает с пучком $F^{(1)}(\mu_1;\dots;\mu_n)$ вида (2) и пусть многообразие $\overline{\nu}_*^{(1)} = (\nu_1^*,\dots,\nu_n^*)$ есть точка множества $\sigma_{r1}[F^{(1)}]$. Равенства (8) для пучка $F^{(1)}$ имеют вид

$$\big(A + \operatorname{diag}\{\nu_1^*,\dots,\nu_n^*\} - \overline{A}\,\big)x^{(k)} = 0, \quad k = 1,\dots,n. \tag{9}$$

Отсюда, учитывая линейную независимость векторов $x^{(1)},\dots,x^{(n)}$, мы заключаем, что собственные значения матрицы $A + \operatorname{diag}\{\nu_1^*,\dots,\nu_n^*\}$ совпадают с собственными значениями матрицы $\overline{A} = \operatorname{diag}\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$.

Докажем утверждение (б). Пусть n-параметрический регулярный пучок $F(\mu_1;\dots;\mu_n)$ совпадает с пучком $F^{(2)}(\mu_1;\dots;\mu_n)$ в форме (3) и пусть многообразие $\overline{\nu}_*^{(2)} = (\nu_1^*,\dots,\nu_n^*)$ есть точка множества $\sigma_{r1}[F^{(2)}]$. Равенства (8) для пучка $F^{(2)}$ имеют вид

$$\big(A\operatorname{diag}\{\nu_1^*,\dots,\nu_n^*\} - \overline{A}\,\big)x^{(k)} = 0, \quad k = 1,\dots,n.$$

Отсюда, учитывая линейную независимость векторов $x^{(1)},\dots,x^{(n)}$, мы заключаем, что собственные значения матрицы $A\operatorname{diag}\{\nu_1^*,\dots,\nu_n^*\}$ совпадают с собственными значениями матрицы $\overline{A} = \operatorname{diag}\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$. Справедливость теоремы установлена. □

§3. Метод решения обратных задач [1, 3]

Как следует из теоремы 1, решение обратных задач из §1 сводится к вычислению замкнутого неприводимого многообразия $\overline{\nu} = (\nu_1^*,\dots,\nu_n^*)$, $\nu_1^* \neq \nu_j^*$ при $i \neq j$, аффинного пространства C^n, образующего точку собственного регулярного спектра регулярного n-параметрического пучка $F^{(i)}(\mu_1;\dots;\mu_n)$, $i = 1,2$. Ниже приводится метод вычисления точки $\overline{\nu}_* = (\nu_1^*,\dots,\nu_n^*)$ для регулярного пучка $F(\mu_1;\dots;\mu_n) \in \mathcal{F}_n^{n\times n}$ общего вида. Пусть

$$F(\mu_1;\dots;\mu_n) = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i P_i, \quad \mu_{n+1} = 1, \quad P_{n+1} = P_0,$$

P_i, $i = 1,\dots,n$, – постоянные $n\times n$ матрицы. При $F(\mu_1;\dots;\mu_n) = F^{(1)}(\mu_1;\dots;\mu_n)$ решается аддитивная задача; при $F(\mu_1;\dots;\mu_n) = F^{(2)}(\mu_1;\dots;\mu_n)$ решается мультипликативная задача.

Пучок $F(\mu_1;\dots;\mu_n)$ представим в виде

$$F(\mu_1;\dots;\mu_n) = A^{(k)} + \mu_k B^{(k)}, \quad k = 1,\dots,n, \tag{10}$$

где $B^{(k)} = P_k$, $A^{(k)} = \sum\limits_{i \neq k} \mu_i P_i$, так что $A^{(k)}$ есть $(n-1)$-параметрическая полиномиальная матрица с линейным вхождением параметров.

С учетом спектральных свойств пучка $F(\mu_1; \ldots; \mu_n)$ искомое многообразие $\overline{\nu}_*$ будем вычислять как точку множества $\sigma_{r1}[F]$. Рассмотрим, для определенности, пучок

$$\begin{gathered} D^{(1)}(\mu_1) := A^{(1)}(\mu_2, \ldots, \mu_n) + B^{(1)}\mu_1, \\ A^{(1)} = \sum_{i=2}^{n+1} \mu_i P_i, \quad B^{(1)} = P_1. \end{gathered} \tag{11}$$

Метод вычисления $\overline{\nu}_* \in \sigma_{r1}[D^{(1)}]$ состоит из двух стадий.

На первой стадии вычисляется последовательность пучков $A_k + \mu_k B_k$, $k = 1, \ldots, n$, где B_k – постоянная матрица, $A_k = A_k(\mu_{k+1}, \ldots \mu_n)$ – $(n-k)$-параметрическая полиномиальная матрица с линейным вхождением параметров:

$$\begin{aligned} &A_1 = A^{(1)}(\mu_2, \ldots, \mu_n) = \sum_{i=2}^{n+1} \mu_i P_i, \quad B_1 = B^{(1)} = P_1; \\ &A_k = \left[B_{k-1}, B_{k-2}, \ldots, B_1, \sum_{i=k+1}^{n+1} \mu_i P_i\right], \\ &B_k = [O, O, \ldots, P_k], \quad k = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{12}$$

На второй стадии метода вычисляется многообразие $\overline{\nu}_* = (\nu_1^*, \ldots, \nu_n^*)$ как точка собственного регулярного спектра $\sigma_{r1}[A^{(1)} + \mu_1 B^{(1)}]$, не имеющая совпадающих координат.

Пучки из последовательности $\{A_k + \mu_k B_k\}$ связаны соотношением

$$A_{k-1} + \mu_{k-1} B_{k-1} = [A_k + \mu_k B_k]\Lambda_{k-1}(\mu_{k-1}), \quad k = 2, \ldots, n+1, \tag{13}$$

где

$$\Lambda_{k-1}(\mu_{k-1}) = \begin{bmatrix} \mu_{k-1} I_{n_{k-1}} \\ I_{n_{k-1}} \end{bmatrix},$$

$I_{n_{k-1}}$ есть единичная матрица порядка $n_{k-1} = 2^{k-1}n$; n_{k-1} есть число столбцов пучка $A_{k-1} + \mu_{k-1} B_{k-1}$; $A_1 = A^{(1)}$; $B_1 = B^{(1)}$.

Для построения последовательности пучков $\{A_k + \mu_k B_k\}$, удовлетворяющих соотношениям (13), выполняются следующие операции.

Пусть вычислен пучок $A_{k-1}+\mu_{k-1}B_{k-1}$, $A_1=A^{(1)}$, $B_1=B^{(1)}$. Для вычисления $A_k+\mu_k B_k$ пучок $A_{k-1}+\mu_{k-1}B_{k-1}$ представляется в виде

$$A_{k-1}+\mu_{k-1}B_{k-1}=\begin{bmatrix}B_{k-1}\,A_{k-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_{k-1}I_{n_{k-1}}\\ I_{n_{k-1}}\end{bmatrix}.$$

Матрица $\begin{bmatrix}B_{k-1}\,A_{k-1}\end{bmatrix}$, которая является $(n+1-k)$-параметрической полиномиальной, записывается в виде пучка $A_k+\mu_k B_k$ с ведущим параметром μ_k. В результате мы имеем равенства

$$A_{k-1}(\mu_k,\dots,\mu_n)+\mu_{k-1}B_{k-1}=\big(A_l+\mu_k B_k\big)\Lambda_{k-1}(\mu_{k-1}),\quad k=2,\dots,n.$$

Теоретической базой второй стадии метода являются следующие свойства последовательности $\{A_k+\mu_k B_k\}$, $k=1,\dots,n$, построенной на первой стадии.

1°. Имеют место равенства

$$\begin{aligned}&\big[A_{k-1}(\mu_k,\dots,\mu_n)+\mu_{k-1}B_{k-1}\big]\\ &\qquad=\big[A_k(\mu_{k+1},\dots,\mu_n)+\mu_k B_k\big]\Lambda_{k-1}(\mu_{k-1}),\quad k=2,\dots,n,\end{aligned}\tag{14}$$

$$\begin{aligned}&A_1(\mu_2,\dots,\mu_n)+\mu_1 B_1\\ &\qquad=\big[A_k(\mu_{k+1},\dots,\mu_n)+\mu_k B_k\big]\Lambda^{(k-1)}(\mu_1,\dots,\mu_{k-1}),\\ &\qquad\qquad k=2,\dots,n,\end{aligned}\tag{15}$$

где $\Lambda^{(k-1)}(\mu_1,...,\mu_{k-1})=\Lambda_{k-1}(\mu_{k-1})\Lambda_{k-2}(\mu_{k-2})\cdots\Lambda_1(\mu_1)$. Справедливость (14) и (15) следует из построения последовательности пучков $\{A_k+\mu_k B_k\}$, $k=1,\dots,n$.

2°. Каждый пучок из последовательности $\{A_k+\mu_k B_k\}$, $k=1,\dots,n$, имеет полный строчный ранг и не имеет сингулярного спектра.

Этот факт следует из (14) с учетом того, что пучок

$$A_1+\mu_1 B_1:=A^{(1)}(\mu_1,\dots,\mu_n)+\mu_1 B^{(1)}$$

регулярен.

3°. Обозначим через $\overline{\nu}_{k-1}:=(\nu_{k-1},\nu_k,\dots,\nu_n)$ точку множества

$$\sigma_{r1}[A_{k-1}(\mu_k,\dots,\mu_n)+\mu_{k-1}B_{k-1}]$$

(или, что то же самое, $\overline{\nu}_{k-1}\in\sigma_{r1}[B_{k-1},A_{k-1}(\mu_k,\dots,\mu_n)]$).

Для того, чтобы ν_{k-1} было собственным значением пучка

$$A_{k-1}(\nu_k,\dots,\nu_n)+\mu_{k-1}B_{k-1},$$

необходимо и достаточно, чтобы ν_{k-1} было собственным значением наследственного пучка

$$Q_+(\nu_k,\dots,\nu_n)-\mu_{k-1}Q_-(\nu_k,\dots,\nu_n)\ :=D_{k-1}(\mu_{k-1}).$$

Действительно, по условию справедливо равенство

$$(A_{k-1}(\nu_k,\dots,\nu_n)+\nu_{k-1}B_{k-1})x_{k-1}=0.$$

Тогда, с учетом свойства 1° из §3, имеем

$$\begin{aligned}&\big(A_k(\nu_{k+1},\dots,\nu_n)+\nu_kB_k\big)\Lambda_{k-1}(\nu_{k-1})x_{k-1}\\ =&\big(A_{k-1}(\nu_k,\dots,\nu_n)+\nu_{k-1}B_{k-1}\big)x_{k-1}=0,\end{aligned}$$

так что

$$\Lambda_{k-1}(\nu_{k-1})x_{k-1}=Q^{(k-1)}(\nu_k,\dots,\nu_n)y_{k-1},$$

где

$$\begin{aligned}\operatorname{span}Q^{(k-1)}(\nu_k,\dots,\nu_n)&\subseteq N_c\big[B_{k-1},A_{k-1}(\nu_k,\dots,\nu_n)\big]\\ &=N_c\big[A_k(\nu_{k+1},\dots,\nu_n)+\nu_kB_k\big].\end{aligned}$$

Отсюда, с учетом вида матрицы $\Lambda_{k-1}(\nu_{k-1})$, следует равенство

$$(Q_+^{(k-1)}(\nu_k,\dots,\nu_n)-\nu_{k-1}Q_-^{(k-1)}(\nu_{k-1},\dots,\nu_n))y_k=0,$$

так что ν_{k-1} есть собственное значение пучка $D_{k-1}(\mu_{k-1})$. Необходимость установлена.

Докажем достаточность. По условию имеем

$$Q_+^{(k-1)}(\nu_k,\dots,\nu_n)y_{k-1}=-\nu_{k-1}Q_-^{(k-1)}(\nu_k,\dots,\nu_n)y_{k-1}.$$

Тогда при $x_{k-1}=Q_-^{(k-1)}(\nu_k,\dots,\nu_n)y_{k-1}$ имеет место равенство

$$\Lambda_{k-1}(\nu_{k-1})x_{k-1}=Q^{(k-1)}(\nu_k,\dots,\nu_n)y_{k-1}.$$

Отсюда с учетом того, что

$$Q_-^{(k-1)}(\nu_k,\dots,\nu_n)\in N_c\big[A_k(\mu_{k+1},\dots,\mu_n)+\mu_kB_k\big],$$

находим

$$\begin{aligned}&\big(A_{k-1}(\nu_k,\dots,\nu_n)+\nu_{k-1}B_{k-1}\big)x_{k-1}\\ &\qquad=\big(A_k(\nu_{k+1},\dots,\mu_n)+\nu_kB_k\big)\Lambda_{k-1}(\nu_{k-1})x_{k-1}=0,\end{aligned}$$

так что $(\nu_{k-1},\nu_k,\dots,\nu_n)\in\sigma_{r1}[A_{k-1}(\nu_k,\dots,\nu_n)+\mu_{k-1}B_{k-1}]$. Тем самым достаточность установлена и свойство 3° доказано.

4°. Если $A + \mu B$ есть пучок постоянных $m \times n$ матриц полного строчного ранга, не имеющий сингулярного спектра, то собственные значения $A + \mu B$ совпадают с собственными значениями его наследственного пучка $D(\mu) = Q_+ - \mu Q_-$, где столбцы матрицы $Q = \left[\begin{smallmatrix} Q_+ \\ Q_- \end{smallmatrix}\right]$ образуют ортонормированный базис правого нуль-пространства матрицы $[B, A]$.

Доказательство. Пусть μ_k есть собственное значение пучка $A+\mu B$:

$$(A + \mu_k B)x_k = 0, \quad x_k \in N_c[A + \mu_k B].$$

Представим пучок $A + \mu B$ в виде

$$A + \mu B = [B, A]\Lambda(\mu) \equiv [B, A] \begin{bmatrix} \mu I_n \\ I_n \end{bmatrix}.$$

Тогда $\Lambda(\mu_k)\, x_k = Q\, y_k$, где $\operatorname{span} Q = N_c[B, A]$. Отсюда с учетом вида матрицы Λ получаем, что $(Q_+ - \mu_k Q_-)y_k = 0$, т.е. μ_k есть собственное значение пучка $Q_+ - \mu Q_-$.

Обратно, пусть μ_k есть собственное значение пучка $Q_+ - \mu Q$, т.е. имеет место равенство

$$\big(Q_+ - \mu_k Q_-\big)y_* = 0, \quad y_* \neq 0.$$

Отсюда при $x_* = Q_- y_*$ мы имеем

$$\Lambda(\mu_k)x_* = \begin{bmatrix} Q_+ \\ Q_- \end{bmatrix} y_* = Q y_*,$$

так что

$$[B, A]Q y_* = 0, \quad [B, A]\Lambda(\mu_k)y_* = (A + \mu_k B)y_* = 0,$$

т.е. μ_k есть собственное значение пучка $A + \mu B$, что и требовалось доказать.

5°. В условиях свойства 4° собственные значения пучка $(A + \mu B) \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$, $n \geqslant m$, совпадают с собственными значениями регулярного пучка $\widehat{Q}_+ - \mu\widehat{Q}_-$, где $\widehat{Q} = \left[\begin{smallmatrix} \widehat{Q}_+ \\ \widehat{Q}_- \end{smallmatrix}\right]$ – матрица, столбцы которой образуют ортонормированный базис правого нуль-пространства матрицы $[B^T, A^T]$.

Справедливость этого утверждения следует из совпадения собственных значений пучков $D(\mu) = Q_+ - \mu Q_-$ и $\widehat{D}(\mu) = \widehat{Q}_+ - \mu\widehat{Q}_-$, где $\widehat{Q}_+ = Q_+^T$, $\widehat{Q}_- = Q_-^T$, так как пучки $D(\mu)$ и $\widehat{D}(\mu)$ суть наследственные пучки соответственно для $A + \mu B$ и $A^T + \mu B^T$. Регулярность пучка

$\widehat{Q}_+ - \mu\widehat{Q}_-$ следует из его построения, поскольку $\widehat{Q} = \begin{bmatrix} \widehat{Q}_+ \\ \widehat{Q}_- \end{bmatrix}$ есть $2m \times m$ матрица полного столбцового ранга.

Рассмотрим реализацию второй стадии метода, т.е. вычисление многообразия $\overline{\nu}_* = (\nu_1^*, \ldots, \nu_n^*)$, $\nu_i^* \neq \nu_j^*$ при $i \neq j$, образующего точку собственного регулярного спектра $\sigma_{r1}[D_1]$ пучка $D_1 = D_1(\mu_1) = A_1 + \mu_1 B_1$.

Вычисление параметров ν_i^*, $i = 1, \ldots, n$, многообразия $\overline{\nu}_*$ проводится последовательно, начиная с ν_n^*. Для вычисления ν_n^* выполняются следующие операции.

(1) Вычисляются все различные собственные значения $\mu_1^{(n)}, \ldots, \mu_{r_n}^{(n)}$ пучка постоянных матриц $A_n + \mu_n B_n$ из последовательности пучков $\{A_k + \mu_k B_k\}$, полученных на первой стадии метода. Для этого строится наследственный пучок $D_n(\mu_n) := Q_+^{(n)} - \mu_n Q_-^{(n)}$ постоянных матриц $Q_+^{(n)}$ и $Q_-^{(n)}$, где $\begin{bmatrix} Q_+^{(n)} \\ Q_-^{(n)} \end{bmatrix}$ есть ортонормированный базис правого нуль-пространства матрицы $[B_n, A_n]$. Обозначим через $\Gamma_n := \{\mu_1^{(n)}, \ldots, \mu_{r_n}^{(n)}\}$ множество различных собственных значений пучка $A_n + \mu_n B_n$. В качестве искомого параметра ν_n^* многообразия $\overline{\nu}_*$ берется любая точка множества Γ_n. Для определенности, пусть $\nu_n^* = \mu_1^{(n)}$.

Для нахождения параметра ν_{n-1}^* вычисляется пучок $A_{n-1}(\nu_n^*) + \mu_{n-1} B_{n-1}$ и к нему применяется операция (1). В качестве результата берется множество $\Gamma_{n-1} := \{\mu_1^{(n-1)}, \ldots, \mu_{r_{n-1}}^{(n-1)}\}$ всех различных собственных значений пучка $A_{n-1}(\nu_n^*) - \mu_{n-1} B_{n-1}$, не совпадающих с точками множества Γ_n. В качестве искомого параметра ν_{n-1}^* берется любое из чисел $\mu_i^{(n-1)}$, $i = 1, \ldots, r_{n-1}$, например, $\nu_{n-1}^* = \mu_1^{(n-1)}$.

Процесс вычисления параметров искомого многообразия $\overline{\nu}_*$ продолжается аналогично пока при некотором p не будет получен пучок $D_p(\mu_p)$, не имеющий собственных значений. Полученное многообразие $\overline{\nu}_{n-p} = (\nu_{p+1}, \ldots, \nu_n)$ при $p = 0$ является искомой точкой множества $\sigma_{r1}[A_1 + \mu_1 B_1]$, а, следовательно, и точкой множества $\sigma_{r1}[F]$, так что матрица $\operatorname{diag}\{\nu_1^*, \ldots, \nu_n^*\}$ есть решение рассматривамой обратной задачи.

В случае $p > 0$ поиск нужного многообразия продолжается. С этой целью следует изменить выбор параметра ν_{p+1}^*, взяв в качестве ν_{p+1}^* другую точку из множества Γ_{n-p}, и с ней продолжить поиск многообразия $\overline{\nu}_*$.

Если при любом выборе параметра ν^*_{p+1} из множества Γ_{n-p} процесс вычисления не приводит к искомому многообразию, то следует изменить выбор параметра ν^*_{p+2} из точек множеств Γ_{n-p+1}. Вычисление искомого многообразия с изменяемыми параметрами из множеств Γ_{n-k}, $k = p+1, p+2, \ldots$, следут продолжать до тех пор, пока в результате не будет найдено многообразие $\overline{\nu}_*$. При этом, если при любом выборе точек из Γ_n в качестве ν^*_n процесс вычисления не приводит к формированию искомого многообразия $\overline{\nu}_*$, то рассматриваемая обратная задача не имеет решения при заданных собственных значениях λ_i, $i = 1, \ldots, n$.

Справедливо утверждение, обратное теореме 1. □

Теорема 2. (а) *Если диагональная матрица* $\operatorname{diag}\{\nu_1, ..., \nu_n\}$ *с различными элементами является решением аддитивной обратной задачи, то многообразие* $\overline{\nu} = (\nu_1, ..., \nu_n)$ *есть точка собственного регулярного спектра* $\sigma_{r1}[F^{(1)}]$ *n-параметрического пучка* $F^{(1)}(\mu_1, ..., \mu_n)$. (б) *Если диагональная матрица* $\operatorname{diag}\{\nu_1, ..., \nu_n\}$ *с различными элементами является решением мультипликативной обратной задачи, то многообразие* $\overline{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ *есть точка собственного регулярного спектра* $\sigma_{r1}[F^{(2)}]$ *n-параметрического пучка* $F^{(2)}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$.

Доказательство. Утверждения (а) и (б) доказываются по одному плану. Для определенности, докажем пункт (а). По условию, справедливы равенства

$$[A + \operatorname{diag}\{\nu_1, \ldots, \nu_n\}]x_k = \widetilde{\lambda}_k x_k, \quad k = 1, \ldots, n,$$

так что

$$[A + \operatorname{diag}\{\nu_1, \ldots, \nu_n\}]X = X \operatorname{diag}\{\widetilde{\lambda}_1, \ldots, \widetilde{\lambda}_n\}. \tag{16}$$

Здесь $X = [x_1, \ldots, x_n]$ – матрица, столбцы которой суть собственные векторы, соответствующие собственным значениям матрицы $A + \operatorname{diag}\{\nu_1, \ldots, \nu_n\}$. Запишем равенство (16) в эквивалентном виде

$$F^{(1)}(\nu_1; \ldots; \nu_n)x_k = 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Отсюда с учетом того, что $F^{(1)}(\mu_1; \ldots; \mu_n)$ есть регулярный пучок, заключаем, что $\operatorname{rank} F^{(1)}(\nu_1, \ldots, \nu_n) < n$, а векторы x_k, $k = 1, \ldots, n$, принадлежат правому нуль-пространсту матрицы $F^{(1)}(\nu_1, \ldots, \nu_n)$. При этом многообразие $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ является замкнутым и неприводимым ($\nu_i \neq \nu_j$). Так что, по определению, каждая пара $(\overline{\nu}; x_k)$, $k =$

$1, \ldots, n$, есть спектральная пара, соответствующая точке $\overline{\nu}$ множества $\sigma_{r1}[F^{(1)}]$. Справедливость теоремы 2 установлена. $\square$

Замечания. 1. Теоремы 1 и 2 дают необходимые и достаточные условия существования решения аддитивной и мультипликативной обратных задач в терминах пучков $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ соответственно.

Алгоритмы, предложенные для решения обратных задач, позволяют определить, существует ли решение задачи, и найти его, если оно существует.

2. Предложенный подход к решению аддитивной и мультипликативной обратных задач может быть распространен на решение других обратных задач на собственные значения матрицы, если решаемой задаче сопоставить многопараметрический пучок матриц.

Литература

1. В. Н. Кублановская, *К решению спектральных задач для q-параметрических полиномиальных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **382** (2010), 168–183.
2. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *К решению спектральных задач для q-параметрических полиномиальных матриц.* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **395** (2011), 162–171.
3. В. Н. Кублановская, *К решению спектральных задач для q-параметрических полиномиальных матриц.* 3. — готовится к печати.

Kublanovskaya V. N. To solving inverse eigenvalue problems for matrices.

The paper considers additive and multiplicative inverse eigenvalue problems and suggests a solution method based on the connection of inverse problems with the problem of computing the regular spectrum of a multiparameter pencil of constant matrices corresponding to the problem considered. Necessary and sufficient conditions for the solvability of inverse eigenvalue problems are established.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: verakub@pdmi.ras.ru

Поступило 21 сентября 2010 г.