Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 395, 2011 г.

В. Н. Кублановская

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ АЛГЕБРЫ ДЛЯ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЦ. 9

Введение

В статье продолжается исследование свойств спектральных характеристик для двухпараметрических полиномиальных матриц общего вида. Предлагаются новые алгоритмы решения спектральных задач, имеющие как самостоятельный интерес, так и как база для методов решения параметрических спектральных задач алгебры.

Пусть $F := F(\lambda, \mu) = \sum\limits_{i=0}^{s} C_i(\mu)\lambda^i$ есть двухпараметрическая полиномиальная $m \times n$ матрица ранга ρ (матрица общего вида: $F \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$). Рассмотрим решение уравнения

$$F(\lambda, \mu)x = 0 \tag{1}$$

в точках $\sigma[F]$ – конечного спектра матрицы F. В случае F общего вида может возникнуть ситуация, когда $N_c[F]$, нуль-пространство из правых полиномиальных решений матрицы F, содержит нетривиальное подпространство $\mathcal{H}_c[F] : \mathcal{H}_c[F] := \{N_c[C_s(\mu)] \cap \ldots \cap N_c[C_0(\mu)]\}$. При $\mathcal{H}_c[F] \neq 0$ задача вычисления спектральных характеристик (точек $\sigma[F]$ и им соответствующих спектральных векторов) становится неопределенной. В статье [1] предложен алгоритм исчерпывания для уменьшения размеров решаемой задачи. Дальнейшие исследования установили необходимость применения исчерпывания $N_c[F]$ при решении спектральных задач для $F(\lambda, \mu)$.

Статья состоит из четырех параграфов. В §§1, 2 рассматривается вычисление спектральных пар соответственно для точек регулярного спектра $\sigma_r[F] = \sigma_{r1}[F] \cup \sigma_{r2}[F]$ и точек сингулярного спектра $\sigma_s[F] = \sigma_{s1}[F] \cup \sigma_{s2}[F]$ матрицы $F(\lambda, \mu)$ в предположении, что регулярно-сингулярный спектр $\sigma_{rs}[F] = \sigma_r[F] \cap \sigma_s[F]$ есть пустое множество. Предлагаются общие схемы построения алгоритмов для вычисления

Ключевые слова: двухпараметрическая полиномиальная матрица, регулярный и сингулярный спектры, ранговая факторизация, метод наследственных пучков, спектральный вектор.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-00318-а.

точек $\sigma_r[F]$ и $\sigma_s[F]$ и их теоретическое обоснование. Приводятся новые алгоритмы вычисления спектральных пар для точек множеств $\sigma_r[F]$ и $\sigma_s[F]$, основанные на комбинировании метода ранговых факторизаций [4] и метода наследственных пучков [1,3].

В §3 исследуются свойства множества $\sigma_{rs}[F]$ и способы вычисления спектральных пар для точек $\sigma_{rs}[F]$.

В §4 предлагаются алгоритмы вычисления точек регулярного и сингулярного спектров двухпараметрической матрицы вида $F(\lambda,\mu) = \lambda A + \mu B + C$.

§1. Вычисление спектральных пар для регулярного спектра матрицы $F(\lambda,\mu)$

Пусть $F(\lambda,\mu) \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$. Представим $F(\lambda,\mu)$ в виде

$$F(\lambda,\mu) = F_1(\mu)\Lambda_1(\lambda). \tag{2}$$

Здесь $F_1(\mu) = [C_s(\mu),\dots,C_0(\mu)]$ есть полиномиальная $m\times(s+1)n$ матрица; $\Lambda_1(\lambda) = [\lambda^s I_n,\dots,\lambda^0 I_n]^B$ – матрица размера $(s+1)n\times n$. Введем обозначения:

$D_i(\lambda,\mu_i) = Q_+(\mu_i) - Q_-(\mu_i)$ есть наследственный пучок для постоянной матрицы $F_1(\mu_i)$ из (2), где μ_i есть любое фиксированное собственное значение матрицы $F_1(\mu)$; $Q_+(\mu_i)$ и $Q_-(\mu_i)$ суть постоянные матрицы, составленные из ns первых и ns последних строк матрицы $Q^{(i)}$, столбцы которой образуют ортонормированный базис правого нуль-пространства матрицы $F_1(\mu_i)$;

(ν_1,ν_2); x_* есть фиксированная собственная (спектральная) пара матрицы $F(\lambda,\mu)$, так что

$$F(\nu_1,\nu_2)x_* = 0,\quad (\nu_1,\nu_2)\in\sigma_{r1}[F],\quad x_*\in N_c[F(\nu_1,\nu_2)];$$

$\widehat{\nu}$, $\widehat{x}(\lambda)$ есть фиксированная собственная пара смешанного регулярного спектра $\sigma_{r2}[F]$ матрицы $F(\lambda,\mu)$, так что $F(\lambda,\widehat{\nu})x(\lambda) = 0$, $\overline{\nu}\in\sigma_{r2}[F]$, $x(\lambda)\in N_c[F(\lambda,\widehat{\nu})]$.

1.1. Теоретические предпосылки. Ниже приводятся утверждения, которые являются теоретической базой для построения алгоритмов вычисления спектральных пар для точек регулярного спектра матрицы $F(\lambda,\mu)$ в предположении, что $\sigma_{rs}[F] = \varnothing$.

Утверждение 1.1. *Каждая фиксированная пара* (ν_1, ν_2); x_* *собственного регулярного спектра матрицы* $F(\lambda, \mu)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

ν_2 *– любое фиксированное собственное значение матрицы* $F_1(\mu)$;

ν_1 *– любое фиксированное собственное значение наследственного пучка* $D(\lambda, \nu_2)$;

$x_* = Q_{0*}(\nu_2) y_*$.

Здесь y_* – собственный вектор пучка $D(\lambda, \nu_2)$, соответствующий собственному значению ν_1; $Q_{0*}(\nu_2)$ есть последняя блочная компонента в представлении $Q(\nu_2)$ в блочном виде.

Утверждение 1.2. *Каждая фиксированная спектральная пара* $\widehat{\nu}$, $\widehat{x}(\lambda)$ *смешанного регулярного спектра матрицы* $F(\lambda, \mu)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

ν_2 *– фиксированное собственное значение матрицы* $F_1(\mu)$, *для которого пучок* $D(\lambda, \widehat{\nu})$ *не имеет собственных значений;*

$\widehat{x}(\lambda) = Q_{0*}(\widehat{\nu})\widehat{y}(\lambda)$, *где* $\widehat{y}(\lambda)$ *есть полиномиальный вектор, удовлетворяющий равенству* $D(\lambda, \widehat{\nu})\widehat{y}(\lambda) = 0$.

Справедливость утверждений 1.1 и 1.2 следует из теоремы 1.3.

Теорема 1.3. *При выполнении условия* $\sigma_{rs}[F] = \varnothing$ *точки* (λ_{ji}, μ_i) *и* $\widehat{\mu}_i$, *для которых существует нетривиальное решение уравнения*

$$D(\lambda, \nu_2) y = 0,$$

являются точками множеств $\sigma_{r1}[F]$ *и* $\sigma_{r2}[F]$. *При этом* $(\lambda_{ji}, \mu_i) \in \sigma_{r1}[F]$, *если пучок* $D(\lambda, \mu_i)$ *имеет собственные значения;* $\mu_i = \widehat{\mu}_i \in \sigma_{r2}[F]$, *если* $D(\lambda, \widehat{\mu}_i)$ *не имеет собственных значений. Здесь* μ_i *есть фиксированное собственное значение матрицы* $F_1(\mu)$.

Доказательство теоремы см. в [1, теорема 2.5].

1.2. Общая схема построения алгоритмов вычисления $\sigma_r[F]$. Ниже приводится общая схема построения различных алгоритмов вычисления точек множеств $\sigma_{r1}[F]$ и $\sigma_{r2}[F]$ в ситуации, когда $\sigma_{r1}[F] = \varnothing$.

Общая схема решает следующие задачи.

(a) Реализует исчерпывание подпространства $\mathcal{H}_c[F]$ из правого нуль-пространства $N_c[F]$ полиномиальных решений матрицы $F(\lambda, \mu)$.

(b) Вычисляет все различные собственные значения μ_i, $i = 1, \ldots, r$, полиномиальной матрицы $F_1(\mu)$ из (2).

(c) Для каждого фиксированного μ_i вычисляет ортонормированный базис $Q^{(i)}$ правого нуль-пространства матрицы $F_1(\mu_i)$ и формирует наследственный пучок $D_i(\lambda, \mu_i)$ для $F_1(\mu_i)$.

(d) Вычисляет все различные собственные значения λ_{ji} пучка $D_i(\lambda, \mu_i)$ постоянных матриц. Параллельно находит те собственные значения $\mu_i = \widehat{\mu}_0$ из множества μ_i, $i = 1, \ldots, r$, для которых пучок $D_i(\lambda, \mu_i)$ не имеет собственных значений.

Каждая из перечисленных задач может быть решена различными методами, выбор которых определяет конкретный алгоритм вычисления спектральных пар матрицы $F(\lambda, \mu)$.

1.3. Алгоритм вычисления спектральных пар регулярного спектра матрицы $F(\lambda, \mu)$. Для иллюстрации применения общей схемы рассмотрим алгоритм вычисления спектральных пар регулярного спектра матрицы $F(\lambda, \mu)$, использующий для решения задачи (b) алгоритм выделения регулярного ядра матрицы $F_1(\mu)$ из (2).

В предположении, что $\sigma_{rs}[F] = \varnothing$, $\mathcal{H}_c[F] = 0$, алгоритм выполняет следующие операции.

(1) Вычисляется регулярное ядро $G_1^{(1)}(\mu)$ матрицы $F_1(\mu)$ из (2), т.е. вычисляется регулярная полиномиальная матрица, спектр которой совпадает с собственными значениями матрицы $F_1(\mu)$ из (2): $F_1(\mu) \in \mathcal{F}_{\rho_1}^{m\times(s+1)n}$. Для этого можно использовать любой из алгоритмов выделения регулярного спектра полиномиальной матрицы из [2]. Для определенности $G_1^{(1)}(\mu)$ будем вычислять в виде

$$G_1^{(1)}(\mu) = \left(W_1^{(2)}(\mu)\right)^T F_1(\mu) W_1^{(1)}(\mu).$$

Здесь $W_1^{(2)}(\mu)$ и $W_1^{(1)}(\mu)$ суть матрицы, составленные из столбцов унимодулярных матриц, реализующих ΔW-1 факторизацию [4] сначала матрицы $F_1(\mu) : F_1(\mu)W_1^{(1)}(\mu) = [\Delta_1(\mu), O]$, а затем матрицы $\Delta_1^T(\mu) : \Delta_1^T(\mu)W^{(2)}(\mu) = [\Delta_2(\mu), O]$:

$$W^{(1)}(\mu) = \left[W_1^{(1)}(\mu, W_0^{(1)}(\mu))\right], \quad \operatorname{span} W_0^{(1)}(\mu) \in N_c\left[F_1(\mu)\right];$$

$$W^{(2)}(\mu) = \left[W_1^{(2)}(\mu, W_0^{(2)}(\mu))\right], \quad \operatorname{span} W_0^{(2)}(\mu) \in N_c\left[\Delta_1^T(\mu)\right].$$

(2) Вычисляется регулярный пучок постоянных матриц $D_0(\mu)$, наследственный для матрицы $G_1^{(1)}(\mu)$.

(3) Вычисляются все различные корни μ_i, $i = 1, \ldots, r$, алгебраического полинома $\varphi(\mu) = \det D_0(\mu)$.

(4) Для каждого фиксированного корня μ_i вычисляется наследственный пучок $D_i(\lambda, \mu_i)$ для матрицы $F_1(\mu_i)$ из (2) и находятся все различные собственные значения λ_{ji}, $j = 1, \ldots, p_i$, пучка $D_i(\lambda, \mu_i)$. Пары (λ_{ji}, μ_i) так вычисленных чисел являются точками множества $\sigma_{r1}[F]$. Корни $\widehat{\mu}_i = \mu_i$ полинома $\varphi(\mu)$, для которых $D_i(\lambda, \widehat{\mu}_i)$ не имеет собственных значений, образуют точки множества $\sigma_{r2}[F]$.

§2. Вычисление спектральных пар для сингулярного спектра матрицы $F(\lambda, \mu)$

Пусть $F(\lambda, \mu) \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$, $\sigma_{rs}[F] = \varnothing$. Введем обозначения:

$\widetilde{D}(\lambda, \mu) = W_+(\mu) - \lambda W_-(\mu)$ – наследственный пучок для $F_1(\mu)$ из (2); $W_+(\mu)$ и $W_-(\mu)$ – полиномиальные матрицы, составленные из ns первых и ns последних строк матрицы $W^{(1)}(\mu)$, столбцы которой образуют свободный базис правого нуль-пространства $N_c[F_1]$ из полиномиальных решений матрицы $F_1(\mu)$;

$(\varkappa_1, \varkappa_2)$; x_* – фиксированная спектральная пара матрицы F, так что $F(\varkappa_1, \varkappa_2)x_* = 0$, $(\varkappa_1, \varkappa_2) \in \sigma_{s1}[F]$, $x_* \in N_c[F]_*$, $(*) = (\varkappa_1, \varkappa_2)$;

$\widehat{\varkappa}$; $\widehat{x}(\lambda)$ – фиксированная спектральная пара смешанного сингулярного спектра матрица $F(\lambda, \mu)$, так что $F(\lambda, \varkappa_2)\widehat{x}(\lambda) = 0$, $\varkappa_2 \in \sigma_{s2}[F]$, $\widehat{x}(\lambda) \in N_c[F]_*$, $(*) = (\lambda, \varkappa_2)$.

Представим $\widetilde{D}(\lambda, \mu)$ в виде

$$\widetilde{D}(\lambda, \mu) = F_1^{(1)}(\mu)\Lambda_1^{(1)}(\lambda). \tag{3}$$

Здесь $F_1^{(1)}(\mu) = [-W_-(\mu),\ W_+(\mu)]$ есть полиномиальная матрица, $\Lambda_1^{(1)}(\lambda) = [\lambda I_{n_1}, I_{n_1}]^B$.

2.1. Теоретические предпосылки. Ниже приводятся утверждения, которые являются теоретической базой для построения алгоритмов вычисления спектральных пар сингулярного спектра матрицы $F(\lambda, \mu)$. Предполагается, что $\sigma_{rs}[F] = \sigma_r[F] \cap \sigma_s[F] = \varnothing$.

Утверждение 2.1. *Каждая фиксированная пара* $(\varkappa_1, \varkappa_2)$; x_* *сингулярного спектра* $\sigma_{s1}[F]$ *удовлетворяет следующим условиям:*

$\varkappa_2$ есть любое фиксированное собственное значение полиномиальной матрицы $F_1^{(1)}(\mu)$ из (3), не совпадающее с собственными значениями матрицы $F_1(\mu)$ из (2);

$\varkappa_1$ есть любое фиксированное собственное значение наследственного пучка $D(\lambda, \varkappa_2) = Q_+ - \lambda Q_-$ для матрицы $F_1^{(1)}(\varkappa_2)$;

$x_* = W_-(\varkappa_2)y_* \in N_c[F]_*$, $(*) = (\varkappa_1, \varkappa_2)$, – спектральный вектор, y_* – собственный вектор пучка $\widetilde{D}(\lambda, \varkappa_2)$, соответствующий собственному значению $\varkappa_1$.

Утверждение 2.2. *Каждая спектральная пара $\widehat{\varkappa}$; $x(\lambda)$ сингулярного спектра $\sigma_{s2}[F]$ удовлетворяет следующим условиям:*

$\widehat{\varkappa}$ есть любое фиксированное собственное значение матрицы $F_1^{(1)}(\mu)$ из (3), для которого пучок $D(\lambda, \varkappa_2)$ не имеет собственных значений;

$\widehat{x}(\lambda)$ есть полиномиальный вектор, удовлетворяющий равенству $\widehat{x}(\lambda) = W_-(x_2)\widehat{y}(\lambda)$, где $D(\lambda, \varkappa_2)\widehat{y}(\lambda) = 0$, $\widehat{x}(\lambda) \in N_c[F]_*$, $(*) = (\lambda, \varkappa_2)$.

Докажем справедливость утверждений 2.1 и 2.2.

Лемма 2.3. *Между решениями x и $X = \Lambda_1^{(1)}(\lambda)x$ соответственно уравнений $F(\lambda, \mu)z_1 = 0$ и $F_1^{(1)}(\mu)z_2 = 0$ существует взаимно однозначное соответствие. В частности, взаимно однозначное соответствие существует между векторами*

(a) $x_- = W_-(\mu_i)y_* \in N_c[F(*)]$, $(*) = (\lambda_j, \mu_i) \in \sigma_{r1}[\widetilde{D}]$,
и $X_* = \Lambda_1^{(1)}(\lambda_j)x_* = W^{(1)}(\lambda_j)y_*$;

(b) $x(\lambda) = W_-(\widehat{\mu}_i)y(\lambda) \in N_c[F]_*$, $(*) = (\lambda, \widehat{\mu}_i) \in \sigma_{r2}[\widehat{D}]$,
и $X(\lambda) = \Lambda_1^{(1)}\,x(\lambda) = W^{(1)}(\widehat{\mu}_i)\widehat{y}(\lambda)$, $\operatorname{span} W^{(1)}(\mu) \subseteq N_c[F_1]_*$
$(*) = \widehat{\mu}_i$.

Справедливость леммы следует из равенства (3).

Теорема 2.4. *При $\sigma_{rs}[F] = \varnothing$ точки (λ_{ji}, μ_i) и $\widehat{\mu}_i$, принадлежащие множествам $\sigma_{r1}[\widetilde{D}]$ и $\sigma_{r2}[\widetilde{D}]$, являются точками $(\lambda_{ji}, \mu_i) = (\varkappa_1, \varkappa_2)$ и $\widehat{\mu}_i = \widehat{\varkappa}$ множеств $\sigma_{s1}[F]$ и $\sigma_{s2}[F]$ соответственно.*

Доказательство. Пусть $(\lambda_{ji}, \mu_i) \in \sigma_{r1}[\widetilde{D}]$, т.е. имеет место равенство $[W_+(\mu_i) - \lambda_j W_-(\mu_i)]y_* = 0$, с учетом которого при $x_* = W_-(\mu_i)y_*$ имеем $\Lambda_1^{(1)}(\lambda_j)x_* = W^{(1)}(\mu_i)y_*$. Тогда, по лемме 2.3, заключаем, что

(λ_j, μ_i); $\varkappa_*$ есть спектральная пара матрицы $F(\lambda, \mu)$, соответствующая точке $(\lambda_i, \mu_i) \in \sigma_{s1}[F]$.

Доказательство теоремы для точек $\widehat{\mu}_i$ проводится аналогично. $\square$

2.2. Общая схема построения алгоритмов вычисления $\sigma_s[F]$. Ниже приводится общая схема построения алгоритмов вычисления точек множеств $\sigma_{s1}[F]$ и $\sigma_{s2}[F]$ и им соответствующих спектральных векторов в ситуации, когда $\sigma_{rs}[F] = \varnothing$.

Общая схема решает следующие задачи.

(a) Реализует исчерпывание подпространства $\mathcal{H}_c[F]$ из $N_c[F]$ – правого нуль-пространства из полиномиальных решений $F(\lambda, \mu)$.

(b) Вычисляет свободный базис $W^{(1)}(\mu)$ правого нуль-пространства $N_c[F_1(\mu)]$ из полиномиальных решений матрицы $F_1(\mu)$ из (2) и формирует наследственный пучок $\widetilde{D}(\lambda, \mu) = W_+(\mu) - \lambda W_-(\mu)$ для матрицы $F_1(\mu)$.

(c) Вычисляет регулярный спектр пучка полиномиальных матриц $\widetilde{D}(\lambda, \mu)$.

Каждая из перечисленных задач может быть решена различными методами, выбор которых определяет конкретный алгоритм вычисления сингулярного спектра матрицы $F(\lambda, \mu)$.

2.3. Алгоритм вычисления точек множеств $\sigma_r[F]$ и $\sigma_s[F]$ для $F(\lambda, \mu) \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$. Для иллюстрации построения алгоритмов по общей схеме рассмотрим алгоритм вычисления $\sigma_r[F]$ и $\sigma_s[F]$, основанный на комбинировании метода ранговых факторизаций [4] и метода наследственных пучков [1,3]. Не умаляя общности, будем предполагать, что $\mathcal{H}_c[F] = 0$; в противном случае применяется алгоритм исчерпывания. Алгоритм состоит в следующем.

Матрица $F(\lambda, \mu) = \sum\limits_{i=0}^{s} C_i(\mu)\lambda^i$ общего вида представляется в виде

$$F(\lambda, \mu) = F_1(\mu)\Lambda_1(\lambda) = \nabla(\mu)V(\mu)\Lambda_1(\lambda).$$

Для этого используется алгоритм ∇V-1 факторизации [4] для полиномиальной матрицы $F_1(\mu)$. Здесь $V(\mu) = [V_s(\mu), \ldots, V_0(\mu)]$ есть $m \times (s+1)n$ матрица, не имеющая собственных значений, $\nabla(\mu)$ есть матрица полного столбцового ранга.

2.3.1. Для вычисления точек множеств $\sigma_{r1}[F]$ и $\sigma_{r2}[F]$ выполняются следующие операции.

(1) Вычисляются все различные собственные значения $\mu_i, i = 1, ..., r$, матрицы $\nabla(\mu)$.

(2) Для фиксированного (каждого) $\mu_i = \mu_*$ вычисляется матрица $Q(\mu_*)$, столбцы которой образуют ортонормированный базис правого нуль-пространства матрицы $V(\mu_*)$.

(3) Формируется наследственный пучок $D(\lambda, \mu_*) = Q_+(\mu_*) - \lambda Q_-(\mu_*)$ для матрицы $V(\mu_*)$ и вычисляются все его различные собственные значения λ_{j*}, $j = 1, \ldots, p_*$.

(4) Пары (λ_{ji}, μ_i), $j = 1, \ldots, p_i$, $i = 1, \ldots, r$, так вычисленных чисел образуют точки множества $\sigma_{r1}[F]$. Числа $\widehat{\mu}_i := \mu_i$, для которых $D(\lambda, \mu_i)$ не имеет собственных значений, образуют точки $\sigma_{r2}[F]$.

2.3.2. Для вычисления точек множества $\sigma_s[F]$ выполняются следующие операции.

(5) Формируется наследственный пучок $\widetilde{D}(\lambda, \mu) = W_+(\mu) - \lambda W_-(\mu)$, где $W_+(\mu)$ и $W_-(\mu)$ – полиномиальные матрицы, составленные из ns первых и ns последних строк матрицы $W^{(1)}(\mu)$.

(6) Вычисляются точки (λ_{ji}, μ_i) и $\widehat{\mu}_i$ регулярного спектра пучка $\widetilde{D}(\lambda, \mu)$. Так найденные точки $(\varkappa_1, \varkappa_2) := (\lambda_{ji}, \mu_i)$ и $\widehat{\varkappa}_i = \widehat{\mu}_i$ являются точками множеств $\sigma_{s1}[F]$ и $\sigma_{s2}[F]$ соответственно.

2.4. Алгоритм решения спектральных задач для матриц полного ранга. Пусть $F(\lambda, \mu) \in \mathcal{F}_m^{m \times n}$, $m \leqslant n$, есть двухпараметрическая матрица полного строчного ранга, для которой следует вычислить $\sigma_r[F]$ и $\sigma_s[F]$. Будем предполагать, что $\sigma_{rs}[F] = \varnothing$.

Алгоритм решения состоит в выполнении следующих операций.

(1) Реализуется исчерпывание подпространства $\mathcal{H}_c[F]$ из $N_c[F]$, т.е. матрица $F(\lambda, \mu) = \sum\limits_{i=0}^{s} C_i(\mu)\lambda^i$ преобразуется в матрицу

$$\widehat{F}(\lambda, \mu) = F(\lambda, \mu) U_1^{(1)} = \sum_{i=0}^{s} \widehat{C}_i(\mu)\lambda^i.$$

Здесь $\widehat{C}_i(\mu) = C_i(\mu) U_1^{(1)}$; $U_1^{(1)}(\mu)$ есть подматрица унимодулярной матрицы $U^{(1)}(\mu) = [U_1^{(1)}(\mu), U_0^{(1)}(\mu)]$, которая реализует ΔW-1 факторизацию матрицы $M(\mu) := [C_s(\mu), \ldots, C_0(\mu)]^B$.

(2) Матрица $\widehat{F}(\lambda, \mu)$ записывается в виде

$$\widehat{F}(\lambda, \mu) = \widehat{F}_1(\mu)\widehat{\Lambda}_1(\lambda),$$

где $\widehat{F}_1(\mu) = [\widehat{C}_s(\mu), \dots, \widehat{C}_0(\mu)]$ – полиномиальная $m \times (s+1)n_1$ матрица, n_1 – число столбцов в коэффициентах $\widehat{C}_i(\mu)$ или (что то же самое) $n_1 = \operatorname{rank} U_1^{(1)}$; $\widehat{\Lambda}_1(\lambda) = [\lambda^s I_{n_1}, \dots, \lambda^0 I_{n_1}]^B$.

(3) Алгоритм ΔW-1 факторизации [4] применяется к матрице $\widehat{F}_1(\mu)$: $\widehat{F}_1(\mu) = \nabla^{(1)}(\mu) V^{(1)}(\mu)$, так что

$$\widehat{F}_1(\mu) = \nabla^{(1)}(\mu) V^{(1)}(\mu)\widehat{\Lambda}_1(\lambda), \tag{4}$$

где $\nabla^{(1)}(\mu)$ есть регулярная полиномиальная $m \times m$ матрица; $V^{(1)}(\mu) = [V_r(\mu), \dots, V_0(\mu)]$ – блочная запись $m \times (r+1)n$ полиномиальной матрицы, не имеющей собственных значений.

Для вычисления регулярного спектра выполняются следующие операции.

(4) Вычисляются все различные собственные значения μ_i, $i = 1, ..., r$, матрицы $\nabla^{(1)}(\mu)$ с помощью, например, алгоритма вычисления нулей алгебраического полинома $\det \nabla^{(1)}(\mu) := \varphi(\mu)$.

(5) Для каждого фиксированного μ_i вычисляется постоянная матрица $V^{(1)}(\mu_i)$ и находится матрица $\widehat{Q}^{(i)}$, столбцы которой образуют ортонормированный базис правого нуль-пространства матрицы $V^{(1)}(\mu_i)$.

(6) Формируется наследственный для матрицы $V^{(1)}(\mu_i)$ пучок

$$\widehat{D}(\lambda, \mu_i) = \widehat{Q}_+(\mu_i) - \lambda \widehat{Q}_-(\mu_i)$$

и находятся все его различные собственные значения λ_{ji}, $j = 1, \dots, p_i$. Пары (λ_{ji}, μ_i) так вычисленных чисел образуют точки множества $\sigma_{r1}[F]$.

(7) Спектральный вектор x_*, соответствующий точке $(\lambda_{ji}, \mu_i) := (\nu_1, \nu_2)$, вычисляется по формуле

$$x_* = U_1^{(1)} \widehat{Q}_{0i} y_*.$$

Здесь y_* есть собственный вектор пучка $\widehat{D}(\lambda, \mu_i)$; $\widehat{Q}_{01}$ – блочная компонента в равенстве $\widehat{Q}^{(i)} = [\widehat{Q}_{ri}, \dots, \widehat{Q}_{0i}]^B$; $U^{(1)} = [U_1^{(1)}, U_0^{(1)}]$ – унимодулярная матрица, преобразующая $F(\lambda, \mu)$ в $\widehat{F}(\lambda, \mu)$.

(8) Корни полинома $\varphi(\mu)$, для которых пучок $\widehat{D}(\lambda,\mu_i)$ не имеет собственных значений, образуют точки множества $\sigma_{r2}[F]$. Спектральный вектор $\widehat{x}_*(\lambda)$, соответствующий фиксированной точке $\widehat{\nu}$, вычисляется по формуле

$$\widehat{x}(\lambda) = U_1^{(1)}\widehat{Q}_{0i}\widehat{y}(\lambda),$$

где $\widehat{y}(\lambda)$ есть полиномиальный вектор, удовлетворяющий равенству

$$\widehat{D}(\lambda,\nu)\widehat{y}(\lambda) \equiv [\widehat{Q}_+(\nu) - \lambda\widehat{Q}_-(\nu)]\widehat{y}(\lambda) = 0.$$

Для вычисления точек $\sigma_s[F]$ (с учетом равенства (4)) выполняются следующие операции.

($3'$) Вычисляется матрица $\widehat{W}^{(1)}(\mu)$, столбцы которой образуют свободный базис правого нуль-пространства $N_c[V^{(1)}(\mu)]$ из полиномиальных решений матрицы $V^{(1)}(\mu)$, и формируется наследственный пучок $\widetilde{D}(\lambda,\mu) = \widehat{W}_+(\mu) - \lambda\widehat{W}_-(\mu)$ для матрицы $V^{(1)}(\mu)$. Здесь $\widehat{W}^{(1)}(\mu) = \bigl[\widehat{W}_+(\mu), \widehat{W}_-(\mu)\bigr]^B$.

($4'$) Пучок $\widetilde{D}(\lambda,\mu)$ представляется в виде

$$\widetilde{D}(\lambda,\mu) = \bigl[-\widehat{W}_-(\mu), \widehat{W}_+(\mu)\bigr]\begin{bmatrix}\lambda I_{n_1}\\ I_{n_1}\end{bmatrix}, \tag{5}$$

где n_1 – число столбцов матрицы $\widehat{W}^{(1)}(\mu)$.

($5'$) Для пучка $\widetilde{D}(\lambda,\mu)$ вычисляются точки регулярного спектра из множеств $\sigma_{r1}[\widetilde{D}]$ и $\sigma_{r2}[\widetilde{D}]$. Для этого, рассматривая пучок $\widetilde{D}(\lambda,\mu)$ как двухпараметрическую матрицу, можно выполнить операции (3)–(8).

В результате будут вычислены точки $(\varkappa_1,\varkappa_2) := (\lambda_{ji},\mu_i) \in \sigma_{r1}[\widetilde{D}]$ и $\widehat{\varkappa} := \widehat{\mu}_i \in \sigma_{r2}[\widetilde{D}]$.

Согласно утверждениям 2.1 и 2.2, вычисленные точки регулярного спектра $\widetilde{D}(\lambda,\mu)$ образуют точки сингулярного спектра $\sigma_s[F]$.

Спектральные векторы x_* и $x_*(\lambda)$, отвечающие фиксированным точкам $(\varkappa_1,\varkappa_2)$ и $\widehat{\varkappa}$ соответственно, вычисляются по формулам

$$x_* = U_1^{(1)}W_-(\varkappa_2)y_*, \quad \widehat{x}_* = U_1^{(1)}W_-(\varkappa_2)\widehat{y}(\lambda).$$

Здесь y_* есть собственный вектор пучка $\widehat{D}(\lambda,\varkappa_2)$, соответствующий собственному значению $\varkappa_1$, а $\widehat{y}(\lambda)$ есть полиномиальный вектор, удовлетворющий равенству $\widetilde{D}(\lambda,\widehat{\varkappa}_2)\widehat{y}(\lambda) = 0$ в том случае, когда $\widetilde{D}(\lambda,\widehat{\varkappa}_2)$ не имеет собственных значений.

§3. Регулярно-сингулярный спектр матрицы $F(\lambda,\mu)$ и алгоритм его вычисления

Пусть $F(\lambda,\mu) = \sum\limits_{i=0}^{s} C_i(\mu)\lambda^i \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$. Регулярно-сингулярным спектром $\sigma_{rs}[F]$ матрицы $F(\lambda,\mu)$ называется множество точек $\mu_i := \omega_i$ конечного спектра $\sigma[F]$ матрицы $F(\lambda,\mu)$, удовлетворяющих соотношениям

$$\sigma_{rs}[F] = \sigma_r[F] \cap \sigma_s[F] \neq \varnothing, \tag{6}$$

$$x_i \in \{N_c[F(*)] \cap N_c[F]_*\} \setminus 0. \tag{7}$$

Здесь $(*) := (\lambda,\omega_i)$; x_i есть спектральный вектор, соответствующий точке ω_i.

Теорема 3.1. *Каждое из следующих утверждений является достаточным условием принадлежности точки $\mu_i \in \sigma[F]$ множеству $\sigma_{rs}[F]$:*

(α) *если $\mu_i \in \{\sigma_{r2}[F] \cap \sigma_{s2}[F]\}$, то $\mu_i = \omega_i \in \sigma_{rs}[F]$;*

(β) *если $\mu_i \in \{\sigma_r[F_1] \cap \sigma_r[F_1^{(1)}]\}$, то $\mu_i = \omega_i \in \sigma_{rs}[F]$.*

Здесь $F_1(\mu)$ и $F_1^{(1)}(\mu)$ суть полиномиальные матрицы из равенств (2) и (3) соответственно, $\sigma_r[F_1]$ и $\sigma_r[F_1^{(1)}]$ суть множества собственных значений матриц $F_1(\mu)$ и $F_1^{(1)}(\mu)$.

(γ) *Если в некоторой точке $\mu_i \in \sigma[F]$ наследственный полином $D_i(\lambda,\mu_i)$ для матрицы $F_1(\mu_i)$ и наследственный полином $\widetilde{D}(\lambda,\mu_i)$ для матрицы $F_1^{(1)}(\mu)$ не имеют собственных значений, то $\mu_i = \omega_i \in \sigma_{rs}[F]$.*

(δ) *Если в некоторой точке $\mu_i \in \sigma[F]$ выполняются равенства*

$$\Lambda_1(\lambda)x(\lambda) = Q(\mu_i)y(\lambda) = W^{(1)}(\mu_i)\widehat{y}(\lambda), \tag{8}$$

то $\mu_i = \omega_i \in \sigma_{rs}[F]$.

Доказательство. Справедливость (α) следует из определения точек множества $\sigma_{rs}[F]$, если учесть, что ω_i не зависит от параметра λ.

Справедливость (β), (γ), (δ) следует из доказательства теорем 1.2 и 2.3. В каждом из условий (α)– (δ) точка μ_i принадлежит множеству $\sigma_{r2}[F] \cap \sigma_{s2}[F]$. В частности, из условий (8) следуют равенства

$$x(\lambda) = Q_{01}(\mu_i)y(\lambda) = W_-^{(1)}(\mu_i)\widehat{y}(\lambda),$$

т.е. условие (7) выполнено.

Здесь $Q_{01}(\mu_i)y(\lambda)$ и $W_{-}^{(1)}(\mu_i)\widehat{y}(\lambda)$ суть спектральные векторы, соответствующие точкам множества $\sigma_{r2}[F]$ и множества $\sigma_{s2}[F]$ соответственно. $\square$

Условия (α)–(δ) взаимосвязаны, и выполнение любого из условий влечет выполнение всех других.

Выполнение любого из условий (β), (γ), (δ) можно установить, используя алгоритмы вычисления регулярного и сингулярного спектров, например, алгоритм из п. 2.3.

Рассмотрим другой алгоритм вычисления точек множества $\sigma_{rs}[F]$ и им соответствующих спектральных векторов.

Пусть $F(\lambda,\mu) = \sum\limits_{i=0}^{s} C_i(\mu)\lambda^i \in \mathcal{F}_{\rho}^{m\times n}$; $W(\lambda,\mu)$ – регулярная двухпараметрическая матрица, реализующая ΔW-2-факторизацию матрицы $F(\lambda,\mu)$:

$$F(\lambda,\mu)W(\lambda,\mu) = [\Delta(\lambda,\mu), 0], \quad \text{где} \quad W(\lambda,\mu) = [W_1(\lambda,\mu), W_0(\lambda,\mu)],$$

$\operatorname{span} W_0(\lambda,\mu) = N_c[F]$, $\Delta(\lambda,\mu) = F(\lambda,\mu)W_1(\lambda,\mu)$ – матрица полного столбцового ранга, регулярный спектр которой есть объединение спектров $\sigma_r[F]$ и $\sigma_r[W_1]$.

Теорема 3.2. *Точка μ_* спектра матрицы $W(\lambda,\mu)$, удовлетворяющая условию*

$$W(\lambda,\mu_*)Y(\lambda) = 0, \quad Y(\lambda) = \begin{bmatrix} y_1(\lambda) \\ y_2(\lambda) \end{bmatrix}, \quad y_i(\lambda) \neq 0, \quad i = 1,2,$$

или (в развернутом виде) условию

$$W_1(\lambda,\mu_*)y_1(\lambda) = -W_0(\lambda,\mu_*)y_2(\lambda) \neq 0, \tag{9}$$

является точкой $\mu_* = \omega$ множества $\sigma_{rs}[F]$, которой соответствует спектральный вектор $x(\lambda) = W_0(\lambda,\omega)y_2(\lambda) = -W_1(\lambda,\omega)y_1(\lambda)$.

Доказательство. Установим равенство

$$x(\lambda) = N_c[F]_* \cap N_c[F] \neq 0, \quad (*) = (\lambda,\mu_*).$$

Действительно, с учетом того, что $\operatorname{span} W_0(\lambda,\mu) = N_c[F]$, и (9) имеем

$$F(\lambda,\mu_*)W_0(\lambda,\mu_*)y_2(\lambda) = -F(\lambda,\mu_*)W_1(\lambda,\mu_*)y_1(\lambda) = 0,$$

так что $x(\lambda) \in N_c[F]$.

Рассмотрим равенство

$$\Delta(\lambda,\mu_*)y_1(\lambda) = F(\lambda,\mu_*)W_1(\lambda,\mu_*)y_1(\lambda) = -F(\lambda,\mu_*)W_0(\lambda,\mu_*)y_2(\lambda) = 0.$$

По условию, $x(\lambda) = W_1(\lambda,\mu_*)y_1(\lambda) \neq 0$, так что $x(\lambda) = W_1(\lambda,\mu_*)y_1(\lambda) \in N_c[F(*)]$. Из сказанного следуют соотношения

$$F(\lambda,\mu_*)x(\lambda) = 0, \quad x(\lambda) \in N_c[F]_* \cap N_c[F(*)].$$

Отсюда, по определению спектральных пар множества $\sigma_{rs}[F]$, следует, что $\mu_* = \omega \in \sigma_{rs}[F]$, а $x(\lambda) = W_0(\lambda,\omega)y_2 = W_1(\lambda,\omega)y_1$ – спектральный вектор, соответствующий точке ω. Теорема доказана. □

Алгоритм вычисления точек $\sigma_{rs}[F]$, основанный на теореме 3.2, выполняет следующие операции.

(1) С помощью алгоритма ΔW-2 факторизации матрицы $F(\lambda,\mu)$ вычисляется матрица $W(\lambda,\mu)$.

(2) Вычисляется полином $\det W(\lambda,\mu) = \varphi(\mu)$ и находятся все различные его корни μ_i, $i = 1,\dots,r$.

(3) Для каждого фиксированного μ_i вычисляется спектральный вектор Y_i, так что $W(\lambda,\mu_i)Y_i = 0$, $i = 1,\dots,r$. Отбираются те точки μ_i (обозначим их ω_i), для которых выполняются условия (9). Так вычисленные пары ω_i; $Y_i(\lambda) = \begin{bmatrix} y_{1i}(\lambda) \\ y_{2i}(\lambda) \end{bmatrix}$, $y_{ji}(\lambda) \neq 0$, образуют искомые спектральные пары для точек $\omega_i \in \sigma_{rs}[F]$.

§4. К решению спектральных задач для матрицы $F(\lambda,\mu) = \lambda A + \mu B + C$

Пусть $F(\lambda,\mu) = \lambda A + \mu B + C$ есть двухпараметрическая полиномиальная $m \times n$ матрица ранга ρ с линейным вхождением параметров (двухпараметрический пучок матриц); A, B и C суть постоянные $m \times n$ матрицы. Требуется вычислить точки конечного спектра $\sigma[F]$ матрицы $F(\lambda,\mu)$ и им соответствующие спектральные векторы, т.е. найти решения уравнения

$$\bigl(\lambda A + \mu B + C\bigr)x = 0 \tag{10}$$

в точках регулярного ($\sigma_r[F]$), сингулярного ($\sigma_s[F]$) и регулярно-сингулярного ($\sigma_{rs}[F]$) спектров матрицы $F(\lambda,\mu)$.

Ниже предлагается алгоритм решения этой задачи, основанный на методе наследственных пучков [1,5]. Алгоритм сводит решение задачи (10) к решению обобщенной проблемы собственных значений матрицы, т.е. к решению задачи для регулярного пучка постоянных матриц. Будем предполагать, что правое нуль-пространство $N_c[F]$ из полиномиальных решений матрицы $F(\lambda,\mu)$ не содержит подпространство

$\mathcal{H}_c[F] := \{N_c[A] \cap N_c[B] \cap N_c[C]\}$. Это предположение не умаляет общности, так как существует алгоритм [5], позволяющий исчерпывать $\mathcal{H}_c[F]$ из $N_c[F]$.

Вычисление регулярного и сингулярного спектров матрицы $F(\lambda, \mu)$ будем рассматривать по отдельности, предполагая, что выполнено условие

$$\sigma_{rs}[F] = \sigma_r[F] \cap \sigma_s[F] = \varnothing.$$

Для вычисления регулярного спектра $\sigma_r[F] = \sigma_{rs}[F] \cup \sigma_{r2}[F]$ методом наследственных пучков выполняются следующие операции.

(1) Матрица $F(\lambda, \mu) = A\lambda + (B\mu + C)$ представляется в виде

$$F(\lambda, \mu) = F_1(\mu)\Lambda_1(\lambda), \tag{11}$$

где $F_1(\mu) = [A, \mu B + C]$, $\Lambda_1(\lambda) = [\lambda I_n, I_n]^B$.

(2) Вычисляются все различные собственные значения μ_i, $i = 1, \ldots, r$, полиномиальной $m \times 2n$ матрицы $F_1(\mu)$. Для этого можно использовать любой метод вычисления собственных значений полиномиальной матрицы общего вида, например, метод из [5].

(3) Для любого (каждого) фиксированного $\mu_i := \mu_i^{(1)}$ вычисляется постоянная матрица $F_1(\mu_i^{(1)})$ и формируется наследственный пучок:

$$D(\lambda, \mu_i^{(1)}) = Q_+(\mu_i^{(1)}) - \lambda Q_-(\mu_i^{(1)}).$$

Здесь $Q_+(\mu_i^{(1)})$ и $Q_-(\mu_i^{(1)})$ постоянные матрицы, составленные из блоков матрицы $Q^{(i)} = \begin{bmatrix} Q_+(\mu_i^{(1)}) \\ Q_-(\mu_i^{(1)}) \end{bmatrix}$, столбцы которой образуют ортонормированный базис правого нуль-пространства матрицы $F_1(\mu_i^{(1)})$.

(4) Вычисляются все различные собственные значения $\lambda_{ji}^{(1)}$ пучка $D(\lambda, \mu_i^{(1)})$, $j = 1, \ldots, p_i$.

Каждая пара $(\lambda_{ji}^{(1)}, \mu_i^{(1)})$ так вычисленных чисел образует точку собственного регулярного спектра $\sigma_{r1}[F]$ матрицы $F(\lambda, \mu)$. Спектральный вектор $x_{ij}^{(1)} \neq 0$, соответствующий $(\lambda_{ji}^{(1)}, \mu_i^{(1)})$, вычисляется по формуле $x_{ij}^{(1)} = Q_-(\mu_i^{(1)}) y_{ij}^{(1)}$, где $y_{ij}^{(1)}$ есть собственный вектор пучка $D(\lambda, \mu_i^{(1)})$, соответствующий собственному значению $\lambda_{ji}^{(1)}$.

Собственные значения μ_i матрицы $F_1(\mu)$ (обозначим их $\widehat{\mu}_i^{(1)}$), для которых пучок $D(\lambda, \widehat{\mu}_i^{(1)})$ не имеет собственных значений, образуют точки смешанного регулярного спектра $\sigma_{r2}[F]$ матрицы $F(\lambda,\mu)$. Спектральный вектор $\widehat{x}_i(\lambda)$ является полиномиальным вектором и вычисляется по формуле $\widehat{x}_i(\lambda) = Q_-(\widehat{\mu}_i^{(1)})y_i(\lambda)$, где $y_i(\lambda)$ есть решение уравнения $D(\lambda,\widehat{\mu}_i^{(1)})y = 0$, в том случае, когда $D(\lambda,\widehat{\mu}_i^{(1)})$ не имеет собственных значений.

Для вычисления сингулярного спектра $\sigma_s[F] = \sigma_{s1}[F] \cup \sigma_{s2}[F]$ матрицы $F(\lambda,\mu)$ методом наследственных пучков выполняются следующие операции [1].

(1) Находится $W^{(1)}(\mu)$ – свободный базис правого нуль-пространства из полиномиальных решений матрицы $F_1(\mu)$ из (11). Операция может быть выполнена применением алгоритма ΔW-1 факторизации [4] к матрице $F_1(\mu)$.

(2) Формируется пучок полиномиальных матриц $\widetilde{D}(\lambda,\mu) = W_+(\mu) - \lambda W_-(\mu)$. Здесь $W_+(\mu)$ и $W_-(\mu)$ суть полиномиальные матрицы, составленные из n первых и n последних строк матрицы $W^{(1)}(\mu) = \begin{bmatrix} W_+(\mu) \\ W_-(\mu) \end{bmatrix}$.

(3) Вычисляются точки регулярного спектра пучка $\widetilde{D}(\lambda,\mu)$. Для этого, рассматривая пучок $\widetilde{D}(\lambda,\mu)$ как двухпараметрическую полиномиальную матрицу общего вида, можно использовать алгоритм из [5].

Выполняются следующие операции.

(3.1) Пучок $\widetilde{D}(\lambda,\mu)$ представляется в виде

$$\widetilde{D}(\lambda,\mu) = F_1^{(1)}(\mu)\Lambda_1^{(1)}(\lambda), \tag{12}$$

где $F_1^{(1)}(\mu) = [-W_-(\mu), W_+(\mu)]$; $\Lambda_1^{(1)}(\lambda) = [\lambda I_{n_1},\ I_{n_1}]^B$, n_1 есть число столбцов матрицы $W^{(1)}(\mu)$.

(3.2) Вычисляются все различные собственные значения $\mu_i^{(2)}$, $i = 1,\dots,r$, матрицы $F_1^{(1)}(\mu)$ из (12).

(3.3) Для любого (каждого) фиксированного $\mu_i^{(2)}$ вычисляется постоянная матрица $F_1^{(1)}(\mu_i^{(2)})$ и для нее строится наследственный пучок

$$\widehat{D}(\lambda,\mu_i^{(2)}) = \widehat{Q}_+(\mu_i^{(2)}) - \lambda\widehat{Q}_-(\mu_i^{(2)}),$$

где $\widehat{Q}_+(\mu_i^{(2)})$ и $\widehat{Q}_-(\mu_i^{(2)})$ суть блоки одинаковых размеров матрицы $\widehat{Q}(\mu_i^{(2)}) = \begin{bmatrix} \widehat{Q}_+(\mu_i^{(2)}) \\ Q_-(\mu_i^{(2)}) \end{bmatrix}$, столбцы которой образуют базис правого нуль-пространства постоянной матрицы $F_1^{(1)}(\mu_i^{(2)})$.

(3.4) Вычисляются все различные собственные значения $\lambda_{ji}^{(2)}$, $i = 1, \ldots, p_i$, пучка $\widehat{D}(\lambda, \mu_i^{(2)})$. Каждая пара $(\lambda_{ji}^{(2)}, \mu_i^{(2)})$ так вычисленных чисел образует точку собственного сингулярного спектра $\sigma_{s1}[F]$ матрицы $F(\lambda, \mu)$. Спектральный вектор $x_{ji}^{(2)}$, соответствующий точке $(\lambda_{ji}^{(2)}, \mu_i^{(2)})$, удовлетворяет соотношению $x_{ji}^{(2)} \in N_c[F]_*$, где $(*) := (\lambda_{ji}^{(2)}, \mu_i^{(2)})$, $x_{ij}^{(2)} = W_-(\mu_i^{(2)})y_j$, y_j есть собственный вектор пучка $\widehat{D}(\lambda, \mu_i^{(2)})$.

Точки $\mu_i^{(2)}$, для которых пучок $\widehat{D}(\lambda, \mu_i^{(2)})$ не имеет собственных значений (обозначим их $\widehat{\mu}_i^{(2)}$), образуют точки $\sigma_{s2}[F]$ – смешанного сингулярного спектра матрицы $F(\lambda, \mu)$. Каждой точке $\widehat{\mu}_i^{(2)}$ соответствует спектральный вектор $\hat{x}_i^{(2)}(\lambda) \in N_c[F]_*$, $(*) = (\lambda, \widehat{\mu}_i^{(2)})$; $\widehat{x}_i^{(2)}(\lambda) = W_-(\widehat{\mu}_i^{(2)})\hat{y}(\lambda)$, где $\hat{y}(\lambda)$ удовлетворяет уравнению $\widehat{D}(\lambda, \widehat{\mu}_i^{(2)})y(\lambda) = 0$.

В ситуации, когда $\sigma_{rs}[F] \neq \varnothing$, среди точек $\widehat{\mu}_i^{(2)}$ могут быть точки, совпадающие с точками $\widehat{\mu}_i^{(1)}$. Каждая из них есть точка регулярно-сингулярного спектра $\sigma_{rs}[F]$ матрицы $F(\lambda, \mu)$.

Теоретическим обоснованием предложенного выше алгоритма являются следующие утверждения.

1) Пусть $\mu_i^{(1)}$ есть собственное значение матрицы $F_1(\mu)$ из (11); $\sigma_{rs}[F] = \sigma_r[F] \cap \sigma_s[F] = \varnothing$.

(a) *Для того, чтобы точка* $(\lambda_{ji}^{(1)}, \mu_i^{(1)})$ *принадлежала множеству* $\sigma_{r1}[F]$, *необходимо и достаточно, чтобы наследственный пучок* $D(\lambda, \mu_i^{(1)}) = Q_+(\mu_i^{(1)}) - \lambda Q_-(\mu_i^{(1)})$ *имел собственные значения. Здесь* $\lambda_{ji}^{(1)}$ *есть любое фиксированное собственное значение* $D(\lambda, \mu_i^{(1)})$.

(b) *Для того, чтобы точка* $\mu_i^{(1)}$ *принадлежала множеству* $\sigma_{r2}[F]$, *необходимо и достаточно, чтобы пучок* $D(\lambda, \mu_i^{(1)})$ *не имел собственных значений.*

2) Пусть $\mu_i^{(2)}$ есть собственное значение матрицы $F_1^{(1)}(\mu)$ из (12), $\sigma_{rs}[F] = \varnothing$.

(a) *Регулярный спектр наследственного пучка* $\widetilde{D}(\lambda, \mu) = W_+(\mu) - \lambda W_-(\mu)$ *для* $F_1^{(1)}(\mu)$ *совпадает с сингулярным спектром матрицы* $F(\lambda, \mu)$. *Для того, чтобы точка* $(\lambda_{ji}^{(2)}, \mu_i^{(2)})$ *принадлежала множеству*

$\sigma_{s1}[F]$, необходимо и достаточно, чтобы точка $(\lambda_{ji}^{(2)}, \mu_i^{(2)})$ принадлежала множеству $\sigma_{r1}[\widetilde{D}]$.

(b) *Для того, чтобы точка $\widehat{\mu}_i^{(2)}$ принадлежала множеству $\sigma_{s2}[F]$, необходимо и достаточно, чтобы пучок $\widetilde{D}(\lambda, \widehat{\mu}_i^{(2)})$ не имел собственных значений.*

Здесь $\widehat{\mu}_i^{(2)}$ – любое фиксированное собственное значение матрицы $F_1^{(1)}(\mu)$ из (12), для которого пучок $\widehat{D}(\lambda, \widehat{\mu}_i^{(2)})$ не имеет собственных значений.

Справедливость этих утверждений следует из спектральных свойств двухпараметрических матриц общего вида, установленных в [1, 5].

Литература

1. В. Н. Кублановская, *К решению задач алгебры для двухпараметрических матриц.* 8. — Зап. научн. семин. ПОМИ **382** (2010), 150–167.
2. В. Н. Кублановская, *К решению проблемы собственных значений для полиномиальных матриц общего вида.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **395** (2011), 154–161.
3. В. Н. Кублановская, *К решению задач алгебры для двухпараметрических матриц.* 4. — Зап. научн. семин. ПОМИ **367** (2009), 121–144.
4. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *Численные методы решения параметрических задач алгебры.* Часть 1. *Однопараметрические задачи.* Наука, С.-Петербург, 2004.
5. В. Н. Кублановская, *К решению задач алгебры для двухпараметрических матриц.* 1. — Зап. научн. семин. ПОМИ **359** (2008), 107–149.

Kublanovskaya V. N. To solving problems of algebra for two-parameter matrices. 9.

The paper continues investigations of the spectral characteristics of two-parameter polynomial matrices of general form. An approach to constructing algorithms for computing points of the regular, singular, and regular-singular spectra of a matrix is suggested and theoretically justified. New algorithms, based on combining rank factorization methods and the method of hereditary pencils, for computing spectrum points and spectral vectors and also new algorithms for finding points of the regular and singular spectra of two-parameter matrices linearly dependent on the parameters are proposed.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: verakub@pdmi.ras.ru

Поступило 5 мая 2011 г.