Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 395, 2011 г.

Л. Ю. Колотилина

ОЦЕНКИ ДЛЯ КРАЙНИХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЛАПЛАСИАНА И ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ЛАПЛАСИАНА ГРАФА

§1. Введение

Пусть $G = \{V, E\}$ – простой (неориентированный) граф с n вершинами и m ребрами. Степень вершины $v_i \in V$, которая обозначается через d_i, – это число ребер, смежных с этой вершиной. Через $\Delta(G) = \Delta$ и $\delta(G) = \delta$ обозначаются соответственно наибольшая и наименьшая степени вершин в G. Напомним, что граф G называется регулярным, если все его вершины имеют одинаковые степени. Двудольный граф называется полурегулярным (semiregular), если все вершины из одной и той же части разбиения имеют одинаковые степени.

Как обычно, через A_G обозначается матрица смежности графа G, а через $D_G = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ – диагональная матрица степеней его вершин. Лапласиан графа G – это Z-матрица $L_G = D_G - A_G$. Так называемый положительный (signless) лапласиан G – это неотрицательная матрица $Q_G = D_G + A_G$. Поскольку, очевидно, A_G, L_G и Q_G – вещественные симметричные матрицы, их собственные значения вещественны; мы будем нумеровать их в порядке невозрастания.

Далее, поскольку $D_G e = A_G e$, где $e = [1, \ldots, 1]^T$ – единичный вектор, то матрица L_G является Z-матрицей со слабым диагональным преобладанием, так что L_G – вырожденная M-матрица, $\lambda_n(L_G) = 0$. Ясно, что $L_G = \mathcal{M}(Q_G)$, т.е. лапласиан L_G есть матрица сравнения для положительного лапласиана Q_G, а $Q_G = |L_G|$. Из первого соотношения следует, что матрица Q_G положительно полуопределена и что (см., например, [3, лемма 2.2])

$$\lambda_n(Q_G) \geqslant \lambda_n(L_G) = 0.$$

Ключевые слова: r-дольный граф, лапласиан, положительный лапласиан, спектральный радиус, неотрицательная матрица, эрмитова матрица, перроновский корень, верхние и нижние оценки для собственных значений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-00318-а.

С другой стороны, по лемме Виландта (см., например, [8, Chap. II, Theorem 2.1]), из второго соотношения вытекает, что

$$\lambda_1(L_G) \leqslant \lambda_1(Q_G) = \rho(Q_G), \tag{1.1}$$

где через ρ обозначается перроновский корень неотрицательный матрицы, совпадающий с ее спектральным радиусом.

Неравенство (1.1) позволяет использовать в качестве верхней оценки для спектрального радиуса лапласиана L_G любую верхнюю оценку для перроновского корня $\rho(Q_G)$. Оказывается, что и снизу спектральный радиус $\lambda_1(L_G)$ можно оценить через перроновский корень соответствующей неотрицательной матрицы. Этот факт немедленно вытекает из следующего результата, установленного в работе [2].

Теорема 1.1. *Пусть $A = (A_{ij})_{i,j=1}^r = D_A - B \in H_n(\mathbb{C})$ – блочная эрмитова матрица порядка n, $2 \leqslant r \leqslant n$. Тогда*

$$\lambda_1(A) \geqslant \lambda_1\left(D_A + \frac{1}{r-1}B\right). \tag{1.2}$$

Кроме того, если $r \geqslant 3$, то равенство

$$\lambda_1(A) = \lambda_1\left(D_A + \frac{1}{r-1}B\right) \tag{1.3}$$

справедливо только тогда, когда для любого собственного вектора $x = (x_i)_{i=1}^r \in \mathbb{C}^{n\times n}$ матрицы $D_A + \frac{1}{r-1}B$, отвечающего ее наибольшему собственному значению, и для всех $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant r$, справедливо соотношение

$$Ax^{(i,j)} = \lambda_1(A)x^{(i,j)}; \tag{1.4}$$

обратно, если (1.4) выполняется для некоторого вектора $x \neq 0$ и некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant r$, при всех $j \neq i$, то имеет место равенство (1.3).

Здесь и ниже

$$D_A = \mathrm{Diag}\,(A_{11}, \ldots, A_{rr})$$

– это блочно диагональная часть матрицы A, а вектор $x^{(i,j)}$ определяется следующим образом:

$$x^{(i,j)} = \left(x_k^{(i,j)}\right), \quad \text{где} \quad x_k^{(i,j)} = \begin{cases} 0, & k \neq i, j, \\ x_i, & k = i, \\ -x_j, & k = j, \end{cases} \qquad k = 1, \ldots, r.$$

Замечание 1.1. В том случае, когда матрица D_A диагональна, а не блочно диагональна, неравенство (1.2) было первоначально установлено в работе [9].

Обозначим

$$Q_r = D_G + \frac{1}{r-1} A_G$$

и заметим, что $Q_2 = Q_G$. Тогда, используя (1.1) и теорему 1.1, мы получаем желаемые двусторонние оценки для спектрального радиуса лапласиана через перроновские корни двух неотрицательных матриц:

$$\rho(Q_r) \leqslant \lambda_1(L_G) \leqslant \rho(Q_G). \tag{1.5}$$

В частности, при $r = 2$ из оценок (1.5) вытекает тот хорошо известный факт, что $\lambda_1(L_G) = \rho(Q_G)$. На самом деле, при $r = 2$ все собственные значения матриц Q_G и L_G совпадают, поскольку эти матрицы сопряжены.

Оценки (1.5) позволяют получать различные численные верхние и нижние оценки для $\lambda_1(L_G)$, применяя многочисленные известные двусторонние оценки для перроновского корня. Например, можно использовать классические оценки Фробениуса в терминах строчных сумм элементов матрицы, которые обозначаются через r_i. Поскольку

$$r_i(Q_r) = d_i + \frac{1}{r-1} d_i = \frac{r}{r-1} d_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

то оценки Фробениуса принимают вид

$$\frac{r}{r-1}\delta = \frac{r}{r-1} \min_{1 \leqslant i \leqslant n} d_i \leqslant \lambda_1(L_G) \leqslant 2 \max_{1 \leqslant i \leqslant n} d_i = 2\Delta. \tag{1.6}$$

Другая возможность состоит в том, чтобы использовать имеющуюся блочную структуру матриц, ассоциированных с r-дольными графами, и применить двусторонние оценки через перроновские корни $r \times r$ матриц, предложенные в работе [1]. Однако для достаточно больших значений r вычисление этих оценок может быть весьма трудоемким.

Еще одна возможность состоит в том, чтобы использовать двусторонние контурные оценки для перроновского корня слабо неприводимой неотрицательной матрицы, предложенные в [4] (см. настоящий сборник), которые, по крайней мере, не хуже, чем оценки (1.6).

Здесь уместно напомнить, что известные верхние оценки для $\lambda_1(L_G)$ часто получаются как верхние оценки для перроновского корня положительного лапласиана $\rho(Q_G)$, хотя это и не всегда так (см., например, [10], где специальное внимание уделено именно этому вопросу).

Что касается нижних оценок для $\lambda_1(L_G)$, то имеется почти очевидная оценка

$$\lambda_1(L_G) \geqslant \mathrm{tr}\ L_G/(n-1) = 2m/(n-1), \tag{1.7}$$

которая использовалась в работе [13], простейшая нетривиальная оценка [6]

$$\lambda_1(L_G) \geqslant 1 + \Delta, \tag{1.8}$$

а также несколько оценок, которые справедливы при $r = 2$ и получаются как нижние оценки для перроновского корня положительного лапласиана $\rho(Q_G)$. В частности, среди последних можно выделить оценку [12]

$$\lambda_1(L_G) \geqslant 2\sum_{i=1}^{n} d_i/n = 4m/n = \frac{e^T Q_G e}{e^T e}, \tag{1.9}$$

улучшающую ее оценку [7]

$$\lambda_1(L_G) \geqslant 2\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{e^T Q_G^2 e}{e^T e}}, \tag{1.10}$$

и еще более точную оценку [12]

$$\lambda_1(L_G) \geqslant \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (d_i^2 + t_i)^2}{\sum_{i=1}^n d_i^2}} = \sqrt{\frac{d^T Q_G^2 d}{d^T d}}, \tag{1.11}$$

где $t = (t_i) = A_G d$ – вектор так называемых 2-степеней вершин. В свою очередь, оценка (1.11) была улучшена в работе [11], где была предложена оценка

$$\lambda_1(L_G) \geqslant \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \left[d_i(d_i^2 + t_i) + \sum_{j\sim i}(d_j^2 + t_j)\right]^2}{\sum_{i=1}^n (d_i^2 + t_i)^2}} = \sqrt{\frac{d^T Q_G^4 d}{d^T Q_G^2 d}}. \tag{1.12}$$

(Запись $i \sim j$ означает, что вершины v_i и v_j являются смежными.)

Все оценки (1.9)–(1.12) – это оценки одного типа, а именно, они являются отношениями Рэлея для некоторых степеней положительного лапласиана Q_G. Здесь важно обратить внимание на тот факт, что используются не отношения Рэлея для матрицы L_G, внедиагональные элементы которой неположительны, а отношения Рэлея для неотрицательной матрицы Q_G, которые вычисляются на положительных векторах (в предположении, что граф G не имеет изолированных вершин).

В данной работе, используя теорему 1.1, мы распространяем подход, основанный на применении оценок с помощью отношений Рэлея для матрицы Q_G, на случай r-дольных графов при $2 \leqslant r \leqslant n$. Таким образом обобщаются оценки (1.9) – (1.12). В частности, полученные оценки можно применить для случая $r = n$ (если никакое разбиение не рассматривается) или для случая наименьшего возможного значения r, а именно, $r = \chi(G)$, где $\chi(G)$ – хроматическое число графа G.

Поскольку, очевидно, для любого $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|x|^T Q_r |x| / |x|^T |x| \geqslant x^T Q_r x / x^T x,$$

то при использовании отношений Рэлея для матрицы Q_r в качестве нижней оценки для $\lambda_1(L_G)$ достаточно и естественно ограничиться неотрицательными или положительными векторами.

Аналогичный подход используется нами и для вывода нетривиальных верхних оценок для наименьшего собственного значения $\lambda_n(Q_G)$ положительного лапласиана r-дольного графа при $r \geqslant 3$. (Напомним, что при $r = 2$ мы имеем $\lambda_n(Q_G) = 0$.) Для этого нам понадобится следующий аналог теоремы 1.1.

Теорема 1.2 [2]. *Пусть* $A = (A_{ij})_{i,j=1}^r = D_A + B \in H_n(\mathbb{C})$ – *блочная эрмитова матрица порядка* n, $2 \leqslant r \leqslant n$. *Тогда*

$$\lambda_n(A) \leqslant \lambda_n\left(D_A - \frac{1}{r-1} B\right). \tag{1.13}$$

Кроме того, при $r \geqslant 3$ *равенство*

$$\lambda_n(A) = \lambda_n\left(D_A - \frac{1}{r-1} B\right) \tag{1.14}$$

справедливо только тогда, когда для любого собственного вектора $x = (x_i)_{i=1}^r \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *матрицы* $D_A - \frac{1}{r-1}B$, *отвечающего ее наименьшему собственному значению, и для всех* $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant r$, *выполняется соотношение*

$$Ax^{(i,j)} = \lambda_n(A) x^{(i,j)}; \tag{1.15}$$

обратно, если (1.15) *выполняется для некоторого вектора* $x \neq 0$ *и некоторого* i, $1 \leqslant i \leqslant r$, *при всех* $j \neq i$, *то имеет место равенство* (1.14).

В применении к матрице $A = Q_G$ теорема 1.2 устанавливает неравенство

$$\lambda_n(Q_G) \leqslant \lambda_n(L_r), \quad r \geqslant 2, \tag{1.16}$$

где матрица L_r определяется по формуле

$$L_r = D_G - \frac{1}{r-1} A_G, \quad r \geqslant 2,$$

так что

$$L_r = \mathcal{M}(Q_r) \quad \text{и} \quad Q_r = |L_r|.$$

Что касается общих верхних оценок для наименьшего собственного значения матрицы Q_G, то автору известны лишь следующие оценки, представленные в работе [5] для связного графа G:

$$\lambda_n(Q_G) < \delta \tag{1.17}$$

(эта оценка равносильна неравенству $\lambda_n(Q_G) < e_i^T Q_G e_i / e_i^T e_i$, где $d_i = \delta$, или, эквивалентно, неравенству $\lambda_n(Q_G) < \min_{1 \leqslant i \leqslant n}\{(Q_G)_{ii}\}$); если две смежные вершины v_i и v_j удовлетворяют условию $N_i \backslash \{j\} \neq N_j \backslash \{i\}$, где N_k – множество всех соседей вершины v_k, то

$$\lambda_n(Q_G) < (d_i + d_j - 2)/2. \tag{1.18}$$

(Заметим, что нестрогое неравенство

$$\lambda_n(Q_G) \leqslant (d_i + d_j - 2)/2$$

легко следует из соотношения

$$\lambda_n(Q_G) \leqslant \lambda_2\left(\begin{bmatrix} d_i & 1 \\ 1 & d_j \end{bmatrix}\right) = \frac{d_i + d_j - \sqrt{(d_i - d_j)^2 + 4}}{2},$$

из которого вытекает (1.18), если $d_i \neq d_j$.) Также в работе [5] было доказано, что для связного p-регулярного графа G справедливо неравенство

$$\lambda_n(Q_G) \leqslant p - 1, \tag{1.19}$$

которое является равенством тогда и только тогда, когда G есть полный граф K_n.

Ввиду неравенства (1.16), для оценки $\lambda_n(Q_G)$ сверху можно использовать любую верхнюю оценку для наименьшего собственного значения M-матрицы L_r, которая при $r \geqslant 3$ является невырожденной, если только в графе G нет изолированных вершин.

Здесь важно отметить, что для любого неотрицательного вектора $x \in \mathbb{R}^n$ все слагаемые в отношении Рэлея $x^T L_r x / x^T x$, соответствующие внедиагональным элементам, неположительны, так что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ мы имеем

$$|x|^T L_r |x| / |x|^T |x| \leqslant x^T L_r x / x^T x.$$

Тем самым, для того, чтобы оценить сверху собственное значение $\lambda_n(Q_G)$ с использованием отношения Рэлея для матрицы L_r, достаточно и естественно использовать неотрицательные или положительные (если граф G связен) векторы.

Статья построена следующим образом. В §§2 и 3 для заданного r-дольного графа G на n вершинах мы выводим соответственно нижние оценки для спектрального радиуса лапласиана, $\lambda_1(L_G)$, и верхние оценки для наименьшего собственного значения, $\lambda_n(Q_G)$, положительного лапласиана. В обоих параграфах основные усилия направлены на описание графов, для которых рассматриваемые оценки являются точными.

§2. Нижние оценки для $\lambda_1(L_G)$

В этом параграфе мы устанавливаем две серии нижних оценок для спектрального радиуса лапласиана графа G и описываем те случаи, в которых эти оценки точны, см. теоремы 2.1 и 2.2 ниже.

Установим сперва несколько вспомогательных результатов.

Лемма 2.1. *Пусть матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, эрмитова и положительно полуопределена. Если для некоторого вектора $x \neq 0$ и некоторого целого $k \geqslant 2$ имеет место равенство*

$$A^k x = \lambda^k x, \quad \text{где} \quad \lambda > 0, \tag{2.1}$$

то

$$Ax = \lambda x. \tag{2.2}$$

Доказательство. Обозначим

$$\widetilde{A} = \lambda^{-1} A.$$

Тогда, ввиду соотношения (2.1), мы имеем

$$\widetilde{A}^k x = x,$$

так что

$$(\widetilde{A}^k - I_n)x = (\widetilde{A}^{k-1} + \cdots + \widetilde{A} + I_n)(\widetilde{A} - I_n)x = 0.$$

Поскольку сумма $\widetilde{A}^{k-1} + \cdots + \widetilde{A} + I_n$ есть положительно определенная матрица, то необходимо $(\widetilde{A} - I_n)x = 0$, что равносильно (2.2). $\square$

Лемма 2.2. *Пусть граф G не имеет изолированных вершин. Тогда при $r \geqslant 2$ и произвольных целых $k \geqslant 1$ и $p \geqslant 0$ справедливо неравенство*

$$\rho^k(Q_r) \geqslant \frac{d^T Q_r^{k+2p} d}{d^T Q_r^{2p} d}. \tag{2.3}$$

Кроме того, равенство в (2.3) имеет место тогда и только тогда, когда

$$Q_r d = \rho(Q_r) d. \tag{2.4}$$

Доказательство. Неравенство (2.3) вытекает из принципа Рэлея. Теперь предположим, что

$$\rho^k(Q_r) = \frac{d^T Q_r^{k+2p} d}{d^T Q_r^{2p} d}.$$

Тогда мы должны иметь

$$Q_r^{k+p} d = \rho^k(Q_r) Q_r^p d. \tag{2.5}$$

Если $p = 0$, то (2.5) принимает вид

$$Q_r^k d = \rho^k(Q_r) d, \tag{2.6}$$

и нужное соотношение (2.4) выполнено в силу леммы 2.1.

Рассмотрим случай $p \geqslant 1$. Если $r \geqslant 3$, то матрица Q_r положительно определена. Умножая (2.5) слева на Q_r^{-p}, мы приходим к (2.6), и (2.4) следует из леммы 2.1. Теперь предположим, что $r = 2$, так что $Q_r = Q_G$. В этом случае мы умножаем (2.5) слева на e^T и, используя соотношение

$$Q_G e = D_G e + A_G e = 2d,$$

получаем

$$e^T Q_G^{k+p} d = 2 d^T Q_G^{k+p-1} d = 2\rho^k(Q_G) d^T Q_G^{p-1} d,$$

откуда следует, что

$$\rho^k(Q_G) = \frac{d^T Q_G^{k+p-1} d}{d^T Q_G^{p-1} d}.$$

Но тогда

$$Q_G^{k+(p-1)/2} d = \rho^k(Q_G) Q_G^{(p-1)/2} d$$

и, следовательно,

$$Q_G^{k+p-1} d = \rho^k(Q_G) Q_G^{p-1} d. \tag{2.7}$$

Соотношение (2.7) отличается от (2.5) тем, что вместо p в нем фигурирует $p-1$. Продолжая таким же образом (если это необходимо), мы приходим к (2.6), и доказательство в части необходимости завершается применением леммы 2.1.

Достаточность условия (2.4) для того, чтобы (2.3) являлось равенством, очевидна. □

Лемма 2.3. *Пусть G – r-дольный граф на n вершинах, $2 \leqslant r \leqslant n$, не имеющий изолированных вершин. Тогда вектор $d = A_G e$ степеней вершин является перроновским вектором для Q_r, т.е.*

$$Q_r d = \rho(Q_r) d, \tag{2.8}$$

тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих двух условий:

(i) *G – полурегулярный двудольный граф;*
(ii) *G – регулярный r-дольный граф, $r \geqslant 3$.*

Доказательство. Случай $r = 2$ был рассмотрен в работе [12]. Для полноты изложения мы включаем этот случай в приводимое ниже общее доказательство для $r \geqslant 2$.

Предположим сперва, что имеет место соотношение (2.8), т.е. d – это перроновский вектор матрицы Q_r. Если граф G регулярен, то доказывать нечего. Поэтому будем предполагать, что

$$\Delta = d_1 > d_2 = \delta.$$

Тогда мы имеем

$$t_1 = (Ad)_1 \geqslant d_1 \delta,$$

откуда следует, что

$$\delta \leqslant t_1/d_1. \tag{2.9}$$

Также мы имеем

$$t_2 = (Ad)_2 \leqslant \Delta d_2,$$

так что

$$t_2/d_2 \leqslant \Delta. \tag{2.10}$$

Заметим, что соотношение (2.8) равносильно равенствам

$$(r-1)d_1 + t_1/d_1 = \cdots = (r-1)d_n + t_n/d_n = (r-1)\rho(Q_G). \tag{2.11}$$

Используя (2.9), (2.11) и (2.10), мы выводим

$$(r-1)\Delta + \delta \leqslant (r-1)d_1 + t_1/d_1 = (r-1)d_2 + t_2/d_2 \leqslant (r-1)\delta + \Delta. \tag{2.12}$$

Следовательно,

$$(r-2)(\Delta-\delta)=0.$$

Таким образом, либо $r=2$, либо $\Delta=\delta$, т.е. граф G регулярен.

В случае $r=2$ соотношения (2.12) превращаются в цепочку равенств

$$\Delta+\delta=d_1+t_1/d_1=d_2+t_2/d_2=\delta+\Delta,$$

из которой вытекает, что

$$t_1=t_2=\delta\Delta.$$

Последние равенства возможны только при условии, что все вершины, смежные с вершиной v_1, имеют степень δ, а все вершины, смежные с v_2, имеют степень Δ. Но это в точности означает, что G – полурегулярный двудольный граф.

Обратно, если двудольный граф G полурегулярен, т.е.

$$A_G=\begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad d=\begin{bmatrix} \Delta e \\ \delta e \end{bmatrix},$$

то, как можно убедиться непосредственной проверкой,

$$Q_G d=(\Delta+\delta)d,$$

т.е. соотношение (2.8) выполнено, причем $\rho(Q_G)=\Delta+\delta$.

Если $r\geqslant 3$ и граф G регулярен, т.е. $d=\Delta e$ и $D_G=\Delta I_n$, то, как легко видеть,

$$Q_r d=\frac{r}{r-1}\Delta d,$$

и соотношение (2.8) выполняется с $\rho(Q_r)=\frac{r}{r-1}\Delta$.

Лемма 2.3 доказана. □

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть G – r-дольный граф на n вершинах, $2\leqslant r\leqslant n$, имеющий хотя бы одно ребро. Тогда для всех целых $k\geqslant 1$ и $p\geqslant 0$ имеет место нижняя оценка*

$$\lambda_1(L_G)\geqslant\left(\frac{d^TQ_r^{k+2p}d}{d^TQ_r^{2p}d}\right)^{1/k}. \tag{2.13}$$

Кроме того, если G не имеет изолированных вершин, то неравенство (2.13) является равенством тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих двух условий:

(i) *G – полурегулярный двудольный граф;*

(ii) *$r \geqslant 3$ и G– регулярный r-дольный граф степени $\Delta = -(r-1)\lambda_n(A_G)$, причем если $V = V_1 \cup \cdots \cup V_r$, то*

$$|V_1| = \cdots = |V_r| = n/r,$$

и каждая вершина $v \in V$ имеет ровно $\Delta/(r-1)$ соседей в каждом из подмножеств V_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, не содержащих v.

Доказательство. По теореме 1.1, мы имеем

$$\lambda_1(L_G) \geqslant \rho(Q_r), \quad 2 \leqslant r \leqslant n, \tag{2.14}$$

и, по принципу Рэлея,

$$\rho(Q_r) \geqslant \left(\frac{d^T Q_r^{k+2p} d}{d^T Q_r^{2p} d}\right)^{1/k}. \tag{2.15}$$

Этим доказано неравенство (2.13).

Теперь предположим, что

$$\lambda_1(L_G) = \left(\frac{d^T Q_r^{k+2p} d}{d^T Q_r^{2p} d}\right)^{1/k}. \tag{2.16}$$

Тогда (2.15) является равенством. Следовательно, по лемме 2.2, мы имеем

$$Q_r d = \rho(Q_r) d. \tag{2.17}$$

При $r = 2$, в силу леммы 2.3, из условия (2.17) следует, что G – полурегулярный двудольный граф, т.е. условие (i) выполнено.

Рассмотрим случай $r \geqslant 3$. По лемме 2.3, G является регулярным r-дольным графом. Но, в силу теоремы 1.1, для регулярного графа G, для которого единичный вектор e является перроновским вектором матрицы Q_r, равенство

$$\lambda_1(L_G) = \rho(Q_r) \tag{2.18}$$

справедливо только при условии, что для всех пар индексов (i,j), $1 \leqslant i \neq j \leqslant r$, имеет место соотношение

$$\begin{bmatrix} \Delta I_{n_i} & -A_{ij} \\ -A_{ji} & \Delta I_{n_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(n_i)} \\ -e^{(n_j)} \end{bmatrix} = \frac{r}{r-1}\Delta \begin{bmatrix} e^{(n_i)} \\ -e^{(n_j)} \end{bmatrix}. \tag{2.19}$$

Здесь используются следующие обозначения: $A_G = (A_{ij})$; $n_i = |V_i|$, $i = 1,\dots,r$; $e^{(k)} = [1,\dots,1]^T$ – единичный вектор размерности k. Заметим, что из (2.19) вытекает, что при всех $i \neq j$ мы имеем

$$r_k(A_{ij}) = \frac{r}{r-1}\Delta - \Delta = \frac{\Delta}{r-1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n_i.$$

Итак, каждая вершина $v \in V_i$ имеет ровно $\frac{\Delta}{r-1}$ соседей в каждом из множеств V_j, $j \neq i$.

Покажем теперь, что $n_i = n_j$ при $i \neq j$. Действительно, из (2.19) мы выводим

$$A_{ij}^T e^{(n_i)} = A_{ji} e^{(n_i)} = \frac{\Delta}{r-1} e^{(n_j)},$$

откуда следует, что

$$e^{(n_j)^T} A_{ij}^T e^{(n_i)} = \frac{\Delta}{r-1} n_j.$$

Но подобным же образом мы получаем

$$e^{(n_i)^T} A_{ij} e^{(n_j)} = \frac{\Delta}{r-1} n_i.$$

Последние два соотношения доказывают, что $n_i = n_j$ при всех $i \neq j$, так что

$$n_i = |V_i| = n/r, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Наконец, в случае Δ-регулярного графа G, когда $\lambda_1(L_G) = \Delta - \lambda_n(A_G)$ и $\rho(Q_r) = \frac{r}{r-1}\Delta$, равенство $\lambda_n(A_G) = -\frac{\Delta}{r-1}$ равносильно (2.18). Этим доказано, что при $r \geqslant 3$ все условия (ii) должны быть выполнены.

Обратно, если выполнено условие (i) или условия (ii), то, по лемме 2.3, выполняется соотношение (2.17), а тогда, по лемме 2.2, мы имеем равенство

$$\rho(Q_r) = \left(\frac{d^T Q_r^{k+2p} d}{d^T Q_r^{2p} d} \right)^{1/k}. \tag{2.20}$$

При $r = 2$ отсюда следует (2.16). Итак, нам остается лишь показать, что при $r \geqslant 3$ имеет место равенство (2.18).

Действительно, поскольку G регулярен и $\lambda_n(A_G) = -\frac{\Delta}{r-1}$, то

$$\lambda_1(L_G) = \Delta - \lambda_n(A_G) = \frac{r}{r-1}\Delta$$

и, в силу теоремы Фробениуса,

$$\rho(Q_r) = \Delta + \frac{\Delta}{r-1} = \frac{r}{r-a}\Delta.$$

Теорема 2.1 доказана. □

Заметим, что поскольку

$$Q_r e = \frac{r}{r-1} d, \quad \text{т.е.} \quad d = \frac{r}{r-1} Q_r e,$$

то оценка (2.13) может быть также записана в виде

$$\lambda_1(L_G) \geqslant \left(\frac{e^T Q_r^{k+2q} e}{e^T Q_r^{2q} e} \right)^{1/k}, \quad k, q \geqslant 1, \tag{2.21}$$

где вектор степеней вершин d заменен на единичный вектор e.

Заметим также, что оценки (1.11) и (1.12), первоначально установленные для двудольных графов, можно записать в виде

$$\lambda_1(L_G) \geqslant \left(\frac{d^T Q_r^2 d}{d^T d} \right)^{1/2}$$

и

$$\lambda_1(L_G) \geqslant \left(\frac{d^T Q_r^4 d}{d^T Q_r^2 d} \right)^{1/2}$$

соответственно, и, в силу теоремы 2.1, они оказываются в действительности справедливыми для r-дольных графов при $2 \leqslant r \leqslant n$.

Далее, следует отметить, что теорема 2.1 не только распространяет оценку (1.12) на произвольные r, $2 \leqslant r \leqslant n$, но она также утверждает, что для связного двудольного графа оценка (1.12) точна тогда и только тогда, когда G – полурегулярный двудольный граф, тогда как в работе [11] было лишь установлено, что для того, чтобы оценка (1.12) была точной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$Q_G^2 d = \rho(Q_G) Q_G d.$$

Что касается оценок (1.9) и (1.10), то они не вытекают из теоремы 2.1. Однако, основываясь на этой теореме, можно обобщить их и распространить на случай $r \geqslant 2$. Точнее, имеет место следующий результат.

Теорема 2.2. *Пусть G – r-дольный граф на n вершинах, $2 \leqslant r \leqslant n$. Тогда при любом целом $k \geqslant 1$ справедлива нижняя оценка*

$$\lambda_1(L_G) \geqslant \left(\frac{e^T Q_r^k e}{e^T e} \right)^{1/k}. \tag{2.22}$$

Кроме того, оценка (2.22) *точна в том и только том случае, когда либо G – это регулярный двудольный граф, либо выполнены условия* (ii) *теоремы* 2.1.

Доказательство. Неравенство (2.22) является очевидным следствием теоремы 1.1 и принципа Рэлея. Пусть (2.22) является равенством. Тогда, по принципу Рэлея, мы имеем

$$Q_r^k e = \rho^k(Q_r)e,$$

откуда, ввиду леммы 2.1, следует, что

$$Q_r e = \rho(Q_r)e, \tag{2.23}$$

т.е. граф G регулярен.

Как легко видеть, условие (2.23) достаточно для того, чтобы соотношение

$$\rho(Q_r) = \left(\frac{e^T Q_r^k e}{e^T e}\right)^{1/k}$$

выполнялось при всех $k \geqslant 1$ и всех $r \geqslant 2$. В случае $r = 2$, остается лишь напомнить, что $\lambda_1(L_G) = \rho(Q_r)$.

В случае же регулярного r-дольного графа с $r \geqslant 3$ доказательство завершается в точности таким же образом, как и доказательство теоремы 2.1. □

В заключение этого параграфа заметим, что, по неравенству Коши–Шварца, при всех целых $p \geqslant 0$ и $k \geqslant 1$ мы имеем

$$\left(\frac{e^T Q_r^k e}{e^T e}\right)^{\frac{1}{k}} \leqslant \left(\frac{e^T Q_r^{2k} e}{e^T e}\right)^{\frac{1}{2k}} \leqslant \left(\frac{e^T Q_r^{4k} e}{e^T e}\right)^{\frac{1}{4k}} \leqslant \cdots \leqslant \lambda_1(L_G)$$

и, аналогично,

$$\left(\frac{d^T Q_r^{k+2p} d}{d^T Q_r^{2p} d}\right)^{\frac{1}{k}} \leqslant \left(\frac{d^T Q_r^{2k+2p} d}{d^T Q_r^{2p} d}\right)^{\frac{1}{2k}} \leqslant \left(\frac{d^T Q_r^{4k+2p} d}{d^T Q_r^{2p} d}\right)^{\frac{1}{4k}} \leqslant \cdots \leqslant \lambda_1(L_G).$$

Итак, для $r \geqslant 3$, ввиду теорем 2.1 и 2.2, удваивая значение k, можно получать все более точные нижние оценки для $\lambda_1(L_G)$, если только граф G не удовлетворяет условиям п. (ii) теоремы 2.1.

§3. Верхние оценки для $\lambda_n(Q_G)$

Основной результат этого параграфа – это теорема 3.1, которая является аналогом теоремы 2.1 для наименьшего собственного значения положительного лапласиана с той разницей, что теперь интерес представляет только случай $r \geqslant 3$, поскольку наименьшее собственное значение матрицы $Q_2 = Q_G$ равно нулю. Для доказательства теоремы 3.1 нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 3.1. *Пусть G – r-дольный граф на n вершинах, $3 \leqslant r \leqslant n$, без изолированных вершин. Тогда для всех целых $k \geqslant 1$ и $p \geqslant 0$ справедливо неравенство*

$$\lambda_n^k(L_r) \leqslant \frac{d^T L_r^{k+2p} d}{d^T L_r^{2p} d}. \tag{3.1}$$

Кроме того, соотношение (3.1) *является равенством тогда и только тогда, когда*

$$L_r d = \lambda_n(L_r) d. \tag{3.2}$$

Доказательство. Оценка (3.1) вытекает из принципа Рэлея.

Рассмотрим случай равенства и предположим, что

$$\lambda_n^k(L_r) = \frac{d^T L_r^{k+2p} d}{d^T L_r^{2p} d}.$$

Тогда

$$L_r^{k+p} d = \lambda_n^k(L_r) L_r^p d. \tag{3.3}$$

Поскольку в условиях леммы матрица L_r положительно определена, то из (3.3) следует, что

$$L_r^k d = \lambda_n^k(L_r) d,$$

и соотношение (3.2) выполнено по лемме 2.1.

Достаточность (3.2) для того, чтобы соотношение (3.1) было равенством, очевидна. □

Лемма 3.2. *Пусть G – r-дольный граф на n вершинах, $3 \leqslant r \leqslant n$, не имеющий изолированных вершин. Равенство* (3.2) *справедливо тогда и только тогда, когда граф G регулярен.*

Доказательство. *Необходимость.* Из равенства (3.2) мы получаем соотношения

$$(r-1)d_k - t_k/d_k = (r-1)\lambda_n(L_r), \quad k = 1, \dots, n. \tag{3.4}$$

Предполагая (без ограничения общности), что

$$d_1 = \Delta \geqslant \delta = d_2,$$

мы выводим

$$t_1 \leqslant \Delta^2, \quad \text{так что} \quad t_1/d_1 \leqslant \Delta,$$

а также

$$t_2 \geqslant \delta^2, \quad \text{так что} \quad t_2/d_2 \geqslant \delta.$$

С учетом последних соотношений и (3.4) мы имеем

$$\begin{aligned}(r-2)\Delta &= (r-1)d_1 - \Delta \leqslant (r-1)d_1 - t_1/d_1 \\ &= (r-1)d_2 - t_2/d_2 \leqslant (r-1)\delta - \delta = (r-2)\delta \leqslant (r-2)\Delta.\end{aligned}$$

Этим показано, что при $r \geqslant 3$ необходимо $\Delta = \delta$, т.е. граф G регулярен.

Достаточность. Пусть G – регулярный граф, т.е. $d = A_G e = \rho(A_G)e$. Тогда

$$L_r d = \rho(A_G) L_r e = \rho(A_G)\frac{r-2}{r-1}d,$$

так что положительный вектор d является собственным вектором матрицы L_r, ассоциированным с ее собственным значением $\lambda = \rho(A_G)\frac{r-2}{r-1}$. Но, по теореме Гершгорина, для всех $i = 1, \ldots, n$ мы имеем

$$\lambda_i(L_r) \geqslant \min_{1\leqslant k\leqslant n}\{(L_r e)_k\} = \rho(A_G)\frac{r-2}{r-1} = \lambda.$$

Так что $\lambda = \lambda_n(L_r)$, и соотношение (3.2) верно. □

Следующая теорема является главным результатом этого параграфа.

Теорема 3.1. *Пусть G – r-дольный граф на n вершинах, $3 \leqslant r \leqslant n$, без изолированных вершин. Тогда при всех целых $k \geqslant 1$ и $p \geqslant 0$ справедлива верхняя оценка*

$$\lambda_n(Q_G) \leqslant \left(\frac{d^T L_r^{k+2p} d}{d^T L_r^{2p} d}\right)^{1/k}. \tag{3.5}$$

Кроме того, оценка (3.5) *точна в том и только том случае, когда G удовлетворяет условиям* (ii) *теоремы* 2.1.

Доказательство. Применяя теорему 1.2 к матрице $A = Q_G$, мы получаем

$$\lambda_n(Q_G) \leqslant \lambda_n(L_r),$$

и неравенство (3.5) справедливо в силу принципа Рэлея.

Теперь рассмотрим случай равенства и предположим, что

$$\lambda_n(Q_G) = \left(\frac{d^T L_r^{k+2p} d}{d^T L_r^{2p} d}\right)^{1/k}.$$

В этом случае

$$\lambda_n(Q_G) = \lambda_n(L_r) = \left(\frac{d^T L_r^{k+2p} d}{d^T L_r^{2p} d} \right)^{1/k}, \tag{3.6}$$

и, по лемме 3.1, выполняется соотношение (3.2). Но тогда, по лемме 3.2, G является регулярным r-дольным графом. Но для регулярного графа единичный вектор e является собственным вектором матрицы L_r, ассоциированным с ее младшим собственным значением. Следовательно, в силу теоремы 1.2, применяемой к $A = Q_G$, первое из равенств (3.6) выполняется только тогда, когда для всех $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant r$, справедливо соотношение

$$Q_G e^{(i,j)} = \lambda_n(L_r) e^{(i,j)},$$

т.е.

$$\begin{bmatrix} \Delta I_{n_i} & A_{ij} \\ A_{ji} & \Delta I_{n_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(n_i)} \\ -e^{(n_j)} \end{bmatrix} = \frac{r-2}{r-1} \Delta \begin{bmatrix} e^{(n_i)} \\ -e^{(n_j)} \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Из (3.7) вытекает, что

$$r_k(A_{ij}) = \Delta - \frac{r-2}{r-1}\Delta = \frac{\Delta}{r-1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n_i,$$

так что каждая вершина $v \in V_i$ имеет ровно $\frac{\Delta}{r-1}$ соседей в каждом из множеств V_j, $j \neq i$.

Тот факт, что

$$n_i = n/r, \quad i = 1, \ldots, r,$$

устанавливается, как при доказательстве теоремы 2.1. Соотношение $\Delta = -(r-1)\lambda_n(A_G)$ равносильно первому равенству из (3.6), которое можно записать в виде $\Delta + \lambda_n(A_G) = \frac{r-2}{r-1}\Delta$.

Обратно, если выполнены условия (ii) теоремы 2.1, то граф G регулярен, и, по лемме 3.2, верно равенство (3.2). Но тогда, по лемме 3.1,

$$\lambda_n(L_r) = \left(\frac{d^T L_r^{k+2p} d}{d^T L_r^{2p} d} \right)^{1/k}.$$

Теперь для завершения доказательства остается лишь убедиться, что

$$\lambda_n(Q_G) = \lambda_n(L_r).$$

Действительно, в силу (ii) имеем

$$\lambda_n(Q_G) = \Delta + \lambda_n(A_G) = \frac{r-2}{r-1}\Delta$$

и, по теореме Гершгорина,

$$\lambda_n(L_r) = \Delta - \frac{\Delta}{r-1} = \frac{r-2}{r-1}\Delta.$$

Теорема 3.1 доказана. □

Заметим, что поскольку

$$L_r e = d - \frac{1}{r-1}d = \frac{r-2}{r-1}d, \quad \text{т.е.} \quad d = \frac{r-1}{r-2}L_r e,$$

то оценку (3.5) можно также записать в виде

$$\lambda_n(Q_G) \leqslant \left(\frac{e^T L_r^{k+2q} e}{e^T L_r^{2q} e}\right)^{1/k}, \quad k, q \geqslant 1. \tag{3.8}$$

Следующая теорема является аналогом теоремы 2.2.

Теорема 3.2. *Пусть G – r-дольный граф на n вершинах, $3 \leqslant r \leqslant n$. Тогда при любом целом $k \geqslant 1$ имеет место следующая верхняя оценка:*

$$\lambda_n(Q_G) \leqslant \left(\frac{e^T L_r^k e}{e^T e}\right)^{1/k}, \quad k \geqslant 1. \tag{3.9}$$

Кроме того,оценка (3.9) *точна тогда и только тогда, когда граф G удовлетворяет условиям* (ii) *теоремы* 2.1.

Доказательство. Оценка (3.9) вытекает из теоремы 1.2 и принципа Рэлея.

Если (3.9) является равенством, то мы имеем

$$L_r^k e = \lambda_n^k(L_r)e,$$

и, по лемме 2.1,

$$L_r e = \lambda_n(L_r)e. \tag{3.10}$$

Но тогда

$$d - \frac{1}{r-1}d = \lambda_n(L_r)e,$$

или

$$d = \frac{r-1}{r-2}\lambda_n(L_r)e,$$

так что граф G регулярен. Необходимость остальных условий из (ii) теоремы 2.1 устанавливается, как в доказательстве теоремы 3.1.

Остается установить достаточность условий (ii) теоремы 2.1 для того, чтобы оценка (3.9) была точной. Поскольку граф G регулярен, то из теоремы Гершгорина следует справедливость равенства (3.10), из которого вытекает, что

$$\lambda_n(L_r) = \left(\frac{e^T L_r^k e}{e^T e}\right)^{1/k}.$$

Равенство

$$\lambda_n(L_r) = \lambda_n(Q_G)$$

устанавливается, как в доказательстве теоремы 3.1.

Теорема 3.2 доказана. □

Литература

1. Л. Ю. Колотилина, *Об улучшении оценок Чистякова для перроновского корня неотрицательной матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **346** (2007), 103–118.
2. Л. Ю. Колотилина, *Неравенства для крайних собственных значений блочных эрмитовых матриц с приложениями к спектральной теории графов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **382** (2010), 82–103.
3. Л. Ю. Колотилина, *Теорема Островского о кругах и нижние оценки для наименьших собственных и сингулярных значений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **382** (2010), 125–140.
4. Л. Ю. Колотилина, *Новые контурные оценки для перроновского корня неотрицательной матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **395** (2011), 86–103.
5. Kinkar Ch. Das, *On conjectures involving second largest Laplacian eigenvalue of graphs.* — Linear Algebra Appl. **432** (2010), 3018–3029.
6. R. Grone, R. Merris, *The Laplacian spectrum of a graph II.* — SIAM J. Discrete Math. **7** (1994), 221–229.
7. Y. Hong, X. Zhang, *Sharp upper and lower bounds for the largest eigenvalue of the Laplacian matrices of trees.* — Discrete Math. **296** (2005), 187–197.
8. H. Minc, *Nonnegative Matrices.* John Wiley and Sons, New York etc., 1988.
9. V. Nikiforov, *Chromatic number and spectral radius.* — Linear Algebra Appl. **426** (2007), 810–814.
10. C. S. Oliveira, L. S. de Lima, N. M. M. de Abreu, P. Hansen, *Bounds on the index of the signless Laplacian of a graph.* — Les Cahiers du GERAD G-2007-72 (2008).
11. Gui-Xian Tian, Ting-Zhu Huang, Bo Zhou, *A note on sum of powers of the Laplacian eigenvalues of bipartite graphs.* — Linear Algebra Appl. **430** (2009), 2503–2510.
12. Aimei Yu, Mei Lu, Feng Tian, *On the spectral radius of graphs.* — Linear Algebra Appl. **387** (2004), 41–49.
13. Bo Zhou, *On sum of powers of the Laplacian eigenvalues of graphs.* — Linear Algebra Appl. **429** (2008), 2239–2246.

Kolotilina L. Yu. Bounds for the extreme eigenvalues of the Laplacian and signless Laplacian of a graph.

The paper suggests a new approach to deriving lower bounds for the Laplacian spectral radius and upper bounds for the smallest eigenvalue of the signless Laplacian of an undirected simple r-partite graph on n vertices, $2 \leqslant r \leqslant n$. The approach is based on inequalities for the extreme eigenvalues of a block-partitioned Hermitian matrix, established earlier, and on the Rayleigh principle. Specific lower and upper bounds, generalizing and extending known results from $r = 2$ to $r \geqslant 2$ are considered, and the cases where these bounds are sharp are described.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, С.-Петербург 191023, Россия
E-mail: liko@pdmi.ras.ru

Поступило 28 ноября 2011 г.