Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 395, 2011 г.

Л. Ю. Колотилина

НОВЫЕ КОНТУРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ПЕРРОНОВСКОГО КОРНЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

§1. Введение

В работе [1] Ю. А. Альпиным были установлены следующие двусторонние контурные оценки для перроновского корня произвольной квадратной неотрицательной матрицы. (Альтернативные доказательства оценок Альпина были предложены в статьях [5] и [3].)

Теорема 1.1. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, *– это неотрицательная матрица без нулевых строк. Тогда*

$$\min_{\gamma\in\mathcal{C}(A)} \left\{\prod_{i\in\bar\gamma} r_i(A)\right\}^{1/|\gamma|} \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{\gamma\in\mathcal{C}(A)} \left\{\prod_{i\in\bar\gamma} r_i(A)\right\}^{1/|\gamma|}. \tag{1.1}$$

Кроме того, если матрица A *неприводима, то либо оба неравенства в* (1.1) *выполняются строго, либо оба они являются равенствами.*

Здесь и ниже мы используем следующие обозначения. Через

$$r_i(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \quad i = 1, \dots, n,$$

обозначаются строчные суммы матрицы A.

$\mathcal{C}(A)$ – это множество всех простых контуров в ориентированном графе $G(A)$, ассоциированном с матрицей A. (Заметим, что если $a_{ii} \neq 0$, то петля $\gamma = \{i, i\}$, которая есть контур длины один, принадлежит множеству $\mathcal{C}(A)$.) Далее, для контура $\gamma \in \mathcal{C}(A)$ через $\bar\gamma$ и $|\gamma|$ мы соответственно обозначаем носитель γ, т.е. множество вершин, через которые контур γ проходит, и мощность носителя $\bar\gamma$.

Ключевые слова: неотрицательная матрица, перроновский корень, двусторонние оценки, контурные оценки.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-00318-а.

Следует отметить, что для матриц с нулевой главной диагональю оценки (1.1), очевидно, не содержат контуров длины один. Для матрицы A, удовлетворяющей условию $a_{11} = \cdots = a_{nn} = 0$, они принимают вид

$$\min_{\gamma \in \mathcal{C}'(A)} \left\{ \prod_{i \in \bar{\gamma}} r'_i(A) \right\}^{1/|\gamma|} \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{\gamma \in \mathcal{C}'(A)} \left\{ \prod_{i \in \bar{\gamma}} r'_i(A) \right\}^{1/|\gamma|} \tag{1.2}$$

и в неприводимом случае немедленно вытекают из теоремы 4.7 и следствия 2.4 из работы [2].

Здесь и далее

$$\mathcal{C}'(A) = \mathcal{C}(A - D_A),$$

где

$$D_A = \operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn}),$$

есть множество всех простых контуров в $G(A)$ длины, не меньшей двух, а

$$r'_i(A) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} = r_i(A) - a_{ii}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

– это усеченные строчные суммы матрицы A.

Оценки (1.1) могут быть весьма точными для матриц, имеющих нулевые элементы на главной диагонали. С другой стороны, если все диагональные элементы A положительны, то оценки (1.1) сводятся к простейшим классическим оценкам Фробениуса

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n} r_i(A) \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} r_i(A). \tag{1.3}$$

Так что для таких матриц контурные оценки (1.1) интереса не представляют. Этот факт служит причиной для поиска оценок, альтернативных оценкам Альпина, которые зависели бы только от контуров из множества $\mathcal{C}'(A)$, а не $\mathcal{C}(A)$. Ясно, что в этом контексте следует рассматривать класс слабо неприводимых матриц. Напомним, что матрица $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$, называется слабо неприводимой, если для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, найдется контур $\gamma \in \mathcal{C}'(A)$ такой, что $i \in \bar{\gamma}$.

Упомянем также тот факт, что для доказательства оценок (1.1) в [1] оценки Фробениуса (1.3) применялись к диагонально сопряженным матрицам $D_1^{-1} A D_1$ и $D_2^{-1} A D_2$, где диагональные матрицы D_1 и D_2

были подобраны таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$r_i(D_1^{-1}AD_1) \leqslant \max_{\gamma\in\mathcal{C}(A)} \left\{\prod_{i\in\bar\gamma} r_i(A)\right\}^{1/|\gamma|}, \quad i=1,\dots,n,$$

и

$$r_i(D_2^{-1}AD_2) \geqslant \min_{\gamma\in\mathcal{C}(A)} \left\{\prod_{i\in\bar\gamma} r_i(A)\right\}^{1/|\gamma|}, \quad i=1,\dots,n.$$

В настоящей работе предлагаются новые двусторонние контурные оценки для перроновского корня матрицы $A=(a_{ij})$, зависящие от $\mathcal{C}'(A)$, a_{ii} и $r_i'(A)$, $i=1,\dots,n$. Важно отметить, что для матриц с нулевыми элементами на главной диагонали предлагаемые оценки либо совпадают с оценками Альпина–Бруальди, либо улучшают их.

§2. Результаты

В этом разделе мы устанавливаем новые двусторонние контурные оценки для перроновского корня слабо неприводимой неотрицательной матрицы, зависящие от множества контуров $\mathcal{C}'(A)$. Простейшие оценки этого типа представлены в теореме 2.1 и следствии 2.1.

Теорема 2.1. *Пусть $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $n\geqslant 2$, – слабо неприводимая неотрицательная матрица. Тогда*

$$\min_{\gamma\in\mathcal{C}'(A)} \left\{\sum_{i\in\bar\gamma} a_{ii}/|\gamma| + w_A(\gamma)\right\} \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{\gamma\in\mathcal{C}'(A)} \left\{\max_{i\in\bar\gamma}\{a_{ii}\} + w_A(\gamma)\right\}, \tag{2.1}$$

где

$$w_A(\gamma) = \left\{\prod_{i\in\bar\gamma} r_i'(A)\right\}^{1/|\gamma|}, \quad \gamma\in\mathcal{C}(A).$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то каждое из неравенств в (2.1) является равенством тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$a_{11}=\cdots=a_{nn}\equiv a \tag{2.2}$$

и существует такое положительное число w, что

$$w_A(\gamma)=w \quad \text{для всех} \quad \gamma\in\mathcal{C}'(A). \tag{2.3}$$

Доказательство. По следствию 2.4 из работы [2] (или по следствию 2.5 из [5]), существует такой контур $\gamma_1 \in \mathcal{C}'(A)$, что

$$\prod_{i\in\bar{\gamma}_1}[\rho(A) - a_{ii}] \leqslant \prod_{i\in\bar{\gamma}_1} r'_i(A) = w_A(\gamma_1)^{|\gamma_1|}. \tag{2.4}$$

Поскольку, очевидно,

$$\prod_{i\in\bar{\gamma}_1}[\rho(A) - a_{ii}] \geqslant [\rho(A) - \max_{i\in\bar{\gamma}_1}\{a_{ii}\}]^{|\gamma_1|},$$

из (2.4) следует, что

$$\rho(A) \leqslant \max_{i\in\bar{\gamma}_1}\{a_{ii}\} + w_A(\gamma_1) \leqslant \max_{\gamma\in\mathcal{C}'(A)}\left\{\max_{i\in\bar{\gamma}}\{a_{ii}\} + w_A(\gamma)\right\}, \tag{2.5}$$

что и доказывает верхнюю оценку в (2.1).

Аналогично, по следствию 2.5 из статьи [5], для некоторого контура $\gamma_2 \in \mathcal{C}'(A)$ мы имеем

$$\prod_{i\in\bar{\gamma}_2}[\rho(A) - a_{ii}] \geqslant w_A(\gamma_2)^{|\gamma_2|}. \tag{2.6}$$

Но, поскольку по неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\prod_{i\in\bar{\gamma}_2}[\rho(A) - a_{ii}] \leqslant \left(\rho(A) - \sum_{i\in\bar{\gamma}_2} a_{ii}/|\gamma_2|\right)^{|\gamma_2|},$$

то из (2.6) вытекает, что

$$\rho(A) \geqslant \sum_{i\in\bar{\gamma}_2} a_{ii}/|\gamma_2| + w_A(\gamma_2), \tag{2.7}$$

откуда и следует нижняя оценка из (2.1).

Пусть теперь матрица A неприводима. Рассмотрим случаи равенств в (2.1). Сперва предположим, что

$$\rho(A) = \max_{\gamma\in\mathcal{C}'(A)}\left\{\max_{i\in\bar{\gamma}}\{a_{ii}\} + w_A(\gamma)\right\}. \tag{2.8}$$

Тогда, очевидно, для каждого контура $\gamma \in \mathcal{C}'(A)$ мы имеем

$$\rho(A) \geqslant \max_{i\in\bar{\gamma}}\{a_{ii}\} + w_A(\gamma), \tag{2.9}$$

откуда следует, что

$$\prod_{i\in\bar{\gamma}}[\rho(A)-a_{ii}] \geqslant w_A(\gamma)^{|\gamma|} \quad \text{для любого} \quad \gamma\in\mathcal{C}'(A).$$

Вместе с неравенством (2.4) полученные соотношения доказывают равенство

$$\prod_{i\in\bar{\gamma}_1}[\rho(A)-a_{ii}] = w_A(\gamma_1)^{|\gamma_1|}. \tag{2.10}$$

Но, по следствию 2.5 из работы [5], из (2.10) необходимо вытекает, что

$$\prod_{i\in\bar{\gamma}}[\rho(A)-a_{ii}] = w_A(\gamma)^{|\gamma|} \quad \text{для каждого} \quad \gamma\in\mathcal{C}'(A). \tag{2.11}$$

Используя (2.9) и (2.11), мы заключаем, что для каждого контура $\gamma\in\mathcal{C}'(A)$ имеют место соотношения

$$\rho(A)-\max_{i\in\bar{\gamma}}\{a_{ii}\} \geqslant w_A(\gamma) = \left\{\prod_{i\in\bar{\gamma}}[\rho(A)-a_{ii}]\right\}^{1/|\gamma|} \geqslant \rho(A)-\max_{i\in\bar{\gamma}}\{a_{ii}\}. \tag{2.12}$$

Тем самым доказано, что для любого $\gamma\in\mathcal{C}'(A)$ все диагональные элементы a_{ii}, где $i\in\bar{\gamma}$, совпадают. Следовательно, как нетрудно убедиться, все диагональные элементы a_{ii} с $i\in\bar{\gamma}$ в действительности совпадают не только для любого простого контура $\gamma\in\mathcal{C}'(A)$, но также и для любого (не обязательно простого) контура γ в графе G_A.

Принимая во внимание тот факт, что в случае неприводимой матрицы A любые две различные вершины графа G_A лежат на некотором контуре γ, мы заключаем, что условия (2.2) должны выполняться.

Теперь, в силу (2.11) и (2.2), для каждого контура $\gamma\in\mathcal{C}'(A)$ мы имеем

$$w_A(\gamma)=\rho(A)-a,$$

что и доказывает (2.3). Этим завершается доказательство необходимости (2.2) и (2.3) для того, чтобы верхняя оценка в (2.1) была строгой.

Рассмотрим теперь нижнюю оценку в (2.1) и предположим, что

$$\rho(A)=\min_{\gamma\in\mathcal{C}'(A)}\left\{\sum_{i\in\bar{\gamma}}a_{ii}/|\gamma|+w_A(\gamma)\right\}. \tag{2.13}$$

Тогда, очевидно,

$$\rho(A) - \sum_{i\in\bar\gamma} a_{ii}/|\gamma| \leqslant w_A(\gamma) \quad \text{для каждого} \quad \gamma \in \mathcal{C}'(A). \tag{2.14}$$

Следовательно, по неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим,

$$\prod_{i\in\bar\gamma}[\rho(A) - a_{ii}] \leqslant \left(\rho(A) - \sum_{i\in\bar\gamma} a_{ii}/|\gamma|\right)^{|\gamma|} \leqslant w_A(\gamma)^{|\gamma|} \text{ для каждого } \gamma \in \mathcal{C}'(A). \tag{2.15}$$

Ввиду (2.6), из (2.15) следует, что

$$\prod_{i\in\bar\gamma_2}[\rho(A) - a_{ii}] = w_A(\gamma_2)^{|\gamma_2|},$$

и, применяя следствие 2.5 из [5], мы заключаем, что

$$\prod_{i\in\bar\gamma}[\rho(A) - a_{ii}] = w_A(\gamma)^{|\gamma|} \quad \text{для каждого} \quad \gamma \in \mathcal{C}'(A). \tag{2.16}$$

Но, с учетом цепочки неравенств (2.15), равенство (2.16) может выполняться, только если для каждого $\gamma \in \mathcal{C}'(A)$ все диагональные элементы a_{ii} с $i \in \bar\gamma$ совпадают. Теперь доказательство необходимость условий (2.2) и (2.3) для того, чтобы нижняя оценка в (2.1) была точной, завершается, как и выше.

Достаточность условий (2.2) и (2.3) для того, чтобы оба неравенства в (2.1) были равенствами, тривиальна.

Теорема 2.1 доказана полностью. $\square$

Из теоремы 2.1, в частности, вытекает, что для неприводимой матрицы A либо оба неравенства в (2.1) являются строгими, либо все величины

$$a_{ii} + w_A(\gamma), \quad i = 1, \dots, n, \quad \gamma \in \mathcal{C}'(A),$$

совпадают.

Теперь из теоремы 2.1 мы выведем следствие, которое больше напоминает по форме классические оценки Фробениуса.

Для этого введем следующие обозначения. Положим

$$W_i(A) = \max_{\gamma\in\mathcal{C}'(A):\ \bar\gamma\ni i}\{w_A(\gamma)\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

и

$$w_i(A) = \min_{\gamma\in\mathcal{C}'(A):\ \bar\gamma\ni i}\{w_A(\gamma)\}, \quad i = 1,\dots,n.$$

Эти величины корректно определены (и положительны) для всех $i = 1,\dots,n$ тогда и только тогда, когда матрица A слабо неприводима.

Ясно, что при любом $\gamma\in\mathcal{C}'(A)$ и любом $i\in\bar\gamma$ выполнены неравенства

$$w_i(A) \leqslant w_A(\gamma) \leqslant W_i(A). \tag{2.17}$$

Обозначим

$$\langle n\rangle = \{1,\dots,n\}.$$

Следствие 2.1. *В условиях теоремы* 2.1 *справедливы оценки*

$$\min_{i\in\langle n\rangle}\{a_{ii} + w_i(A)\} \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle}\{a_{ii} + W_i(A)\}. \tag{2.18}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то каждое из неравенств в (2.18) *является равенством тогда и только тогда, когда выполнены условия* (2.2) *и* (2.3) *теоремы* 2.1.

Доказательство. Мы имеем

$$\begin{aligned}\max_{i\in\langle n\rangle}\{a_{ii} + W_i(A)\} &= a_{i_0 i_o} + W_{i_0}(A)\\ &= a_{i_0 i_0} + w_A(\gamma_0) \quad (i_0\in\bar\gamma_0)\\ &\leqslant \max_{\gamma\in\mathcal{C}'(A)}\left\{\max_{i\in\bar\gamma}\{a_{ii}\} + w_A(\gamma)\right\}.\end{aligned}$$

Обратно, используя (2.17), мы выводим:

$$\begin{aligned}\max_{\gamma\in\mathcal{C}'(A)}\left\{\max_{i\in\bar\gamma}\{a_{ii}\} + w_A(\gamma)\right\} &= \max_{i\in\bar\gamma_0}\{a_{ii}\} + w_A(\gamma_0)\\ &= a_{i_0 i_0} + w_A(\gamma_0)\\ &\leqslant a_{i_0 i_0} + W_{i_0}(A)\\ &\leqslant \max_{i\in\langle n\rangle}\{a_{ii} + W_i(A)\}.\end{aligned}$$

Тем самым показано, что

$$\max_{\gamma\in\mathcal{C}'(A)}\left\{\max_{i\in\bar\gamma}\{a_{ii}\} + w_A(\gamma)\right\} = \max_{i\in\langle n\rangle}\{a_{ii} + W_i(A)\},$$

и верхняя оценка в (2.18) равносильна верхней оценке теоремы 2.1.

Равенство

$$\min_{\gamma\in\mathcal{C}'(A)}\left\{\min_{i\in\bar\gamma}\{a_{ii}\}+w_A(\gamma)\right\}=\min_{i\in\langle n\rangle}\{a_{ii}+w_i(A)\}$$

устанавливается аналогично. Теперь доказательство левого неравенства в (2.18) завершается с использованием очевидного соотношения

$$\min_{\gamma\in\mathcal{C}'(A)}\left\{\min_{i\in\bar\gamma}\{a_{ii}\}+w_A(\gamma)\right\}\leqslant\min_{\gamma\in\mathcal{C}'(A)}\left\{\sum_{i\in\bar\gamma}a_{ii}/|\gamma|+w_A(\gamma)\right\}.$$

Остается рассмотреть случай равенства в левом соотношении в (2.18). Пусть

$$\rho(A)=\min_{i\in\langle n\rangle}\{a_{ii}+w_i(A)\}. \tag{2.19}$$

Тогда, как уже было показано,

$$\rho(A)=\min_{\gamma\in\mathcal{C}'(A)}\left\{\min_{i\in\bar\gamma}\{a_{ii}\}+w_A(\gamma)\right\},$$

откуда следует, что

$$\rho(A)\leqslant\min_{\gamma\in\mathcal{C}'(A)}\left\{\sum_{i\in\bar\gamma}a_{ii}/|\gamma|+w_A(\gamma)\right\}.$$

Последнее соотношение вместе с нижней оценкой теоремы 2.1 приводит к равенству

$$\rho(A)=\min_{\gamma\in\mathcal{C}'(A)}\left\{\sum_{i\in\bar\gamma}a_{ii}/|\gamma|+w_A(\gamma)\right\},$$

так что, по теореме 2.1, условия (2.2) и (2.3) должны быть выполнены.

Обратно, если условия (2.2) и (2.3) выполнены, то равенство (2.19) очевидным образом вытекает из (2.18). □

Теперь мы приведем другое доказательство следствия 2.1, основанное на более тонкой версии подхода, предложенного в работе [1]. Это доказательство не позволяет получить нижнюю оценку теоремы 2.1, но оно выявляет тот важный факт, что оценки следствия 2.1 могут быть получены в результате применения оценок Фробениуса (1.3) к некоторым диагонально сопряженным матрицам $\Delta^{-1}A\Delta$. Это свойство является общим для оценок Альпина (1.1) и для оценок (2.18).

Второе доказательство следствия 2.1. Через $\mathfrak{S}\mathfrak{P}_i(A)$, $i = 1, \ldots, n$, мы обозначаем множество всех простых путей $\pi = (i_1, \ldots, i_k, i_{k+1})$, где $i_1 = i$ и $k \geqslant 1$, в графе G_{A-D_A}.

Введем в рассмотрение матрицу

$$A' = (a'_{ij}) = D_W^{-1} A,$$

положив

$$D_W = \operatorname{diag}(W_1(A), \ldots, W_n(A)).$$

Сперва мы покажем, что

$$W_i(A') \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.20}$$

Действительно, пусть

$$W_i(A') = w_{A'}(\gamma), \quad \text{где} \quad \gamma = (i_1 = i, \ldots, i_{|\gamma|}, i).$$

Тогда мы имеем

$$W_i(A') = \left[\prod_{j=1}^{|\gamma|} \frac{r'_{i_j}(A)}{W_{i_j}(A)}\right]^{1/|\gamma|} = w_A(\gamma) \Bigg/ \left[\prod_{j=1}^{|\gamma|} W_{i_j}(A)\right]^{1/|\gamma|}. \tag{2.21}$$

Поскольку, в силу (2.17),

$$w_A(\gamma) \leqslant W_{i_j}(A) \quad \text{для всех} \quad j = 1, \ldots, |\gamma|,$$

неравенства (2.20) немедленно следуют из (2.21).

Теперь определим диагональную матрицу

$$\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_n),$$

положив

$$\begin{aligned} \delta_i &= \max_{(i_1 = i, \ldots, i_{k+1}) \in \mathfrak{S}\mathfrak{P}_i(A)} \left\{ \prod_{j=1}^{k+1} \frac{r'_{i_j}(A)}{W_{i_j}(A)} \right\} \\ &= \max_{(i_1 = i, \ldots, i_{k+1}) \in \mathfrak{S}\mathfrak{P}_i(A)} \left\{ \prod_{j=1}^{k+1} r'_{i_j}(A') \right\}, \quad i = 1, \ldots n. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Мы докажем, что

$$r'_i(\Delta^{-1} A' \Delta) \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.23}$$

Действительно,

$$r'_i(\Delta^{-1} A' \Delta) = \delta_i^{-1} \sum_{j \neq i:\ a_{ij} \neq 0} a'_{ij} \delta_j \leqslant \delta_i^{-1} r'_i(A') \max_{j \neq i:\ a_{ij} \neq 0} \{\delta_j\}. \tag{2.24}$$

Если

$$\max_{j\neq i:\ a_{ij}\neq 0}\{\delta_j\} = \delta_l = \prod_{j=1}^{k+1} r'_{l_j}(A') \quad (l_1 = l),$$

то из (2.24) вытекает неравенство

$$r'_i(\Delta^{-1}A'\Delta) \leqslant \delta_i^{-1}\left[r'_i(A')\prod_{j=1}^{k+1} r'_{l_j}(A')\right]. \tag{2.25}$$

Поскольку $a_{il_1} \neq 0$ и $l_1 = l \neq i$, то путь

$$\pi_i = (i, l_1, \ldots, l_{k+1}),$$

так же как и простой путь $(l_1, \ldots, l_{k+1})$, ассоциированный с δ_l, является путем в графе G_{A-D_A}.

Если путь π_i простой, т.е. $i \neq l_2, \ldots, l_{k+1}$, то, по определению δ_i, из (2.25) мы имеем

$$r'_i(\Delta^{-1}A'\Delta) \leqslant \delta_i^{-1}\cdot\delta_i = 1,$$

что и доказывает (2.23). В противном случае мы имеем $i = l_{s_1} = \cdots = l_{s_p}$ для некоторых $1 < s_1 < \cdots < s_p \leqslant k+1,\ p \geqslant 1$, а путь π_i оказывается произведением p контуров, проходящих через вершину i, и простого пути $(l_{s_p} = i, \ldots, l_{k+1}) \in \mathfrak{SP}_i(A)$. Ввиду (2.20), из (2.25) следует, что

$$r'_i(\Delta^{-1}A'\Delta) \leqslant \delta_i^{-1}\prod_{t=s_p}^{k+1} r'_{l_t}(A') \leqslant 1.$$

Неравенства (2.23) установлены.

Используя (2.23), мы выводим:

$$\begin{aligned} r_i(\Delta^{-1}A\Delta) &= a_{ii} + r'_i(\Delta^{-1}A\Delta) \\ &= a_{ii} + W_i(A)r'_i(\Delta^{-1}A'\Delta) \leqslant a_{ii} + W_i(A), \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Следовательно, по теореме Фробениуса, мы имеем

$$\rho(A) = \rho(\Delta^{-1}A\Delta) \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle}\left\{r_i(\Delta^{-1}A\Delta)\right\} \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle}\left\{a_{ii} + W_i(A)\right\}.$$

Тем самым верхняя оценка в (2.18) доказана.

Рассмотрим теперь случай равенства в верхней оценке (2.18). Пусть матрица A неприводима и пусть

$$\rho(A) = \max_{i\in\langle n\rangle}\left\{a_{ii} + W_i(A)\right\}. \tag{2.27}$$

В этом случае из приведенного выше вывода и из теоремы Фробениуса следует, что

$$\rho(A) = r_i(\Delta^{-1}A\Delta) = a_{ii} + W_i(A) \quad \text{для всех} \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.28}$$

так что

$$r'_i(\Delta^{-1}A'\Delta) = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда из доказательства неравенств (2.23) мы выводим, что для всех $i = 1, \dots, n$ справедливы соотношения

$$r'_i(A')\delta_j = \delta_i \quad \text{для всех} \quad j \neq i \quad \text{таких, что} \quad a_{ij} \neq 0.$$

Отсюда следует, что

$$r'_i(A) = W_i(A)r'_i(A') = W_i(A)\delta_i/\delta_j \\ \text{для всех} \quad j \neq i \quad \text{таких, что} \quad a_{ij} \neq 0. \tag{2.29}$$

Но из соотношений (2.29) вытекает, что для любого контура $\gamma \in \mathcal{C}'(A)$, $\gamma = (i_1, \dots, i_{|\gamma|}, i_1)$, мы имеем

$$w_A(\gamma)^{|\gamma|} = \prod_{j=1}^{|\gamma|} r'_{i_j}(A) \\ = \frac{W_{i_1}(A)\delta_{i_1}}{\delta_{i_2}} \cdot \frac{W_{i_2}(A)\delta_{i_2}}{\delta_{i_3}} \cdots \frac{W_{i_{|\gamma|}}(A)\delta_{i_{|\gamma|}}}{\delta_{i_1}} = \prod_{j=1}^{|\gamma|} W_{i_j}(A).$$

Принимая во внимание (2.17), мы заключаем, что для любого $\gamma \in \mathcal{C}'(A)$ все значения $W_i(A)$, $i \in \bar{\gamma}$, совпадают:

$$W_i(A) = w_A(\gamma) \quad \text{для всех} \quad i \in \bar{\gamma}.$$

Поскольку матрица A неприводима, то отсюда легко следует, что

$$W_1(A) = \dots = W_n(A)$$

и

$$w_A(\gamma) = w \quad \text{для каждого} \quad \gamma \in \mathcal{C}'(A).$$

Теперь из (2.28) мы получаем равенства

$$a_{11} = \dots = a_{nn}.$$

Тем самым необходимость условий (2.2) и (2.3) для того, чтобы верхняя оценка в (2.18) была строгой, установлена. Достаточность очевидна.

Нижняя оценка в (2.18), а также и случай равенства в ней исследуются аналогично. Для этого нужно рассмотреть матрицу

$$A'' = D_w^{-1} A,$$

где

$$D_w^{-1} = \operatorname{diag}(w_1(A), \ldots, w_n(A)),$$

и заменить (2.22) следующим определением:

$$\begin{aligned} \delta_i &= \min_{(i_1=i,\ldots,i_{k+1})\in\mathfrak{S}\mathfrak{P}_i(A)} \left\{ \prod_{j=1}^{k+1} \frac{r'_{i_j}(A)}{w_{i_j}(A)} \right\} \\ &= \min_{(i_1=i,\ldots,i_{k+1})\in\mathfrak{S}\mathfrak{P}_i(A)} \left\{ \prod_{j=1}^{k+1} r'_{i_j}(A'') \right\}, \quad i = 1, \ldots n. \end{aligned} \tag{2.30}$$

□

По ходу второго доказательства следствия 2.1 было установлено, что для слабо неприводимой матрицы A имеют место неравенства

$$r_i(\Delta^{-1} A \Delta) \leqslant a_{ii} + W_i(A), \quad i = 1, \ldots, n,$$

если δ_i определены в соответствии с (2.22), и неравенства

$$r_i(\Delta^{-1} A \Delta) \geqslant a_{ii} + w_i(A), \quad i = 1, \ldots, n,$$

если δ_i определены в соответствии с (2.30).

Последние неравенства позволяют получать новые оценки для перроновского корня слабо неприводимой неотрицательной матрицы $A = (a_{ij})$, применяя известные верхние и нижние оценки в терминах a_{ii}, r_i и r'_i к соответствующим диагонально сопряженным матрицам $\Delta^{-1} A \Delta$ вместо исходной матрицы A. Так, например, используя оценки (1.1), мы приходим к новым контурным оценкам

$$\min_{\gamma\in\mathcal{C}(A)} \left\{ \prod_{i\in\bar\gamma} [a_{ii} + w_i(A)] \right\}^{1/|\gamma|} \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{\gamma\in\mathcal{C}(A)} \left\{ \prod_{i\in\bar\gamma} [a_{ii} + W_i(A)] \right\}^{1/|\gamma|}, \tag{2.31}$$

которые, очевидно, уточняют оценки (2.18) следствия 2.1.

Тем же путем из разреженной версии оценок Брауэра–Джентри (см. соотношения (5.28) и (5.31) в работе [4]) для слабо неприводимой матрицы A мы получаем верхнюю оценку

$$\rho(A) \leqslant 1/2 \max_{i\neq j:\ a_{ij}\neq 0} \left[a_{ii} + a_{jj} + \sqrt{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 4W_i(A)W_j(A)}\right], \tag{2.32}$$

а для неприводимой матрицы A также и нижнюю оценку

$$\rho(A) \geqslant 1/2 \min_{i\neq j:\ a_{ij}\neq 0} \left[a_{ii} + a_{jj} + \sqrt{(a_{ii}-a_{jj})^2 + 4w_i(A)w_j(A)}\right]. \tag{2.33}$$

Последние две оценки улучшаются в следующей теореме.

Теорема 2.2. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *– слабо неприводимая неотрицательная матрица. Тогда*

$$\min_{\substack{\gamma\in\mathcal{C}'(A),\\ \gamma=(i_1,\ldots,i_{|\gamma|},i_1)}} \left\{\sum_{i\in\bar\gamma} a_{ii}/|\gamma| + \sqrt{\left(\sum_{i\in\bar\gamma} a_{ii}/|\gamma|\right)^2 - \sum_{k=1}^{|\gamma|} a_{i_ki_k}a_{i_{k+1}i_{k+1}}/|\gamma| + w_A^2(\gamma)}\right\}$$

$$\leqslant \rho(A) \leqslant 1/2 \max_{\substack{\gamma\in\mathcal{C}'(A),\\ \gamma=(i_1,\ldots,i_{|\gamma|},i_1)}} \max_{1\leqslant k\leqslant|\gamma|} \left\{a_{i_ki_k} + a_{i_{k+1}i_{k+1}} + \sqrt{(a_{i_ki_k} - a_{i_{k+1}i_{k+1}})^2 + 4w_A^2(\gamma)}\right\}. \tag{2.34}$$

Доказательство. По следствию 2.1 из статьи [2], для некоторого контура $\gamma \in \mathcal{C}'(A)$ справедливо следующее неравенство:

$$\prod_{i\in\bar\gamma}[\rho(A) - a_{ii}] \leqslant w_A(\gamma)^{|\gamma|}. \tag{2.35}$$

Пусть

$$\gamma = (i_1, i_2, \ldots, i_{|\gamma|}, i_{|\gamma|+1} = i_1).$$

Тогда мы имеем

$$\begin{aligned}\left(\prod_{i\in\bar\gamma}[\rho(A) - a_{ii}]\right)^2 &= \prod_{k=1}^{|\gamma|}\{[\rho(A) - a_{i_ki_k}][\rho(A) - a_{i_{k+1}i_{k+1}}]\}\\ &\geqslant \min_{1\leqslant k\leqslant|\gamma|}\{[\rho(A) - a_{i_ki_k}][\rho(A) - a_{i_{k+1}i_{k+1}}]\}^{|\gamma|}. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Ввиду (2.35) и (2.36), при некотором k, $1 \leqslant k \leqslant |\gamma|$, $\rho(A)$ удовлетворяет квадратному неравенству

$$\rho(A)^2 - \rho(A)(a_{i_k i_k} + a_{i_{k+1} i_{k+1}}) + a_{i_k i_k} a_{i_{k+1} i_{k+1}} - w_A(\gamma)^2 \leqslant 0, \tag{2.37}$$

откуда следует, что

$$\rho(A) \leqslant 1/2 \max_{1 \leqslant k \leqslant |\gamma|} \left\{ a_{i_k i_k} + a_{i_{k+1} i_{k+1}} + \sqrt{(a_{i_k i_k} - a_{i_{k+1} i_{k+1}})^2 + 4w_A^2(\gamma)} \right\}, \tag{2.38}$$

и верхняя оценка в (2.34) установлена.

С другой стороны, по следствию 2.5 из [5], найдется такой контур $\gamma \in \mathcal{C}'(A)$, что

$$\prod_{i \in \bar{\gamma}} [\rho(A) - a_{ii}] \geqslant w_A(\gamma)^{|\gamma|}. \tag{2.39}$$

Следовательно, с учетом неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим для $\gamma = (i_1, i_2, \ldots, i_{|\gamma|}, i_{|\gamma|+1} = i_1)$ мы имеем:

$$\begin{aligned} w_A^2(\gamma) &\leqslant \left\{ \prod_{i \in \bar{\gamma}} [\rho(A) - a_{ii}] \right\}^{2/|\gamma|} = \left\{ \prod_{k=1}^{|\gamma|} [\rho(A) - a_{i_k i_k}][\rho(A) - a_{i_{k+1} i_{k+1}}] \right\}^{1/|\gamma|} \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{|\gamma|} \left\{ [\rho(A) - a_{i_k i_k}][\rho(A) - a_{i_{k+1} i_{k+1}}] \right\} / |\gamma| \\ &= \rho^2(A) - 2\rho(A) \sum_{k=1}^{|\gamma|} a_{i_k i_k} / |\gamma| + \sum_{k=1}^{|\gamma|} a_{i_k i_k} a_{i_{k+1} i_{k+1}} / |\gamma|. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Таким образом, мы приходим к квадратному неравенству

$$\rho^2(A) - 2\rho(A) \sum_{i \in \bar{\gamma}} a_{ii} / |\gamma| + \sum_{k=1}^{|\gamma|} a_{i_k i_k} a_{i_{k+1} i_{k+1}} / |\gamma| - w_A^2(\gamma) \geqslant 0. \tag{2.41}$$

Поскольку, как хорошо известно,

$$\rho(A) \geqslant \max_{i \in \langle n \rangle} a_{ii}, \tag{2.42}$$

то справедливо неравенство

$$\rho(A) \geqslant \sum_{i \in \bar{\gamma}} a_{ii} / |\gamma|,$$

а поэтому из (2.41) необходимо вытекает, что перроновский корень $\rho(A)$ не меньше, чем наибольший из корней соответствующего квадратного уравнения, т.е.

$$\rho(A) \geqslant \sum_{i\in\bar{\gamma}} a_{ii}/|\gamma| + \sqrt{\left(\sum_{i\in\bar{\gamma}} a_{ii}/|\gamma|\right)^2 - \sum_{k=1}^{|\gamma|} a_{i_k i_k} a_{i_{k+1} i_{k+1}}/|\gamma| + w_A^2(\gamma)}. \tag{2.43}$$

Этим установлена нижняя оценка в (2.34). Теорема 2.2 доказана полностью. □

Из теоремы 2.2 мы выводим следующий нижний аналог верхней оценки из (2.34).

Следствие 2.2. *В условиях теоремы* 2.2 *справедлива нижняя оценка*

$$\rho(A) \geqslant 1/2 \min_{\substack{\gamma\in\mathcal{C}'(A),\\ \gamma=(i_1,\dots,i_{|\gamma|},i_1)}} \min_{1\leqslant k\leqslant|\gamma|} \left\{a_{i_k i_k} + a_{i_{k+1} i_{k+1}} + \sqrt{(a_{i_k i_k} - a_{i_{k+1} i_{k+1}})^2 + 4w_A^2(\gamma)}\right\}. \tag{2.44}$$

Доказательство. Из нижней оценки в (2.34) вытекает, что для некоторого контура $\gamma \in \mathcal{C}'(A)$, $\gamma = (i_1, \dots, i_{|\gamma|}, i_1)$, выполняется неравенство (2.43). Но тогда справедливо соотношение (2.41), из которого следует (см. (2.40)), что

$$\sum_{k=1}^{|\gamma|} \left\{[\rho(A) - a_{i_k i_k}][\rho(A) - a_{i_{k+1} i_{k+1}}]\right\}/|\gamma| \geqslant w_A^2(\gamma).$$

Следовательно, для некоторого k, $1 \leqslant k \leqslant |\gamma|$, мы имеем

$$\rho(A)^2 - \rho(A)(a_{i_k i_k} + a_{i_{k+1} i_{k+1}}) + a_{i_k i_k} a_{i_{k+1} i_{k+1}} - w_A(\gamma)^2 \geqslant 0. \tag{2.45}$$

Наконец, поскольку, в силу (2.42),

$$\rho(A) \geqslant (a_{i_k i_k} + a_{i_{k+1} i_{k+1}})/2, \quad k = 1, \dots, |\gamma|,$$

то из (2.45) вытекает, что

$$\rho(A) \geqslant 1/2 \left\{a_{i_k i_k} + a_{i_{k+1} i_{k+1}} + \sqrt{(a_{i_k i_k} - a_{i_{k+1} i_{k+1}})^2 + 4w_A^2(\gamma)}\right\}, \tag{2.46}$$

и оценка (2.44) доказана. □

Заметим, что из верхней оценки в (2.34) и нижней оценки (2.44) следуют оценки (2.32) и (2.33) соответственно. Действительно, это немедленно вытекает из неравенств

$$w_i(A)w_j(A) \leqslant w_A^2(\gamma) \leqslant W_i(A)W_j(A), \quad \text{где} \quad i,j \in \bar{\gamma},\ \gamma \in \mathcal{C}'(A),$$

которые следуют из (2.17).

Заметим также, что, учитывая очевидное соотношение

$$\sqrt{(a_{i_k i_k} - a_{i_{k+1} i_{k+1}})^2 + 4w_A^2(\gamma)} \leqslant |a_{i_k i_k} - a_{i_{k+1} i_{k+1}}| + 2w_A(\gamma),$$

нетрудно убедиться, что из верхней оценки в (2.34) вытекает верхняя оценка в (2.18), равносильная верхней оценке теоремы 2.1.

С другой стороны, поскольку

$$\begin{aligned} &1/2 \min_{\gamma \in \mathcal{C}'(A)} \min_{1 \leqslant k \leqslant |\gamma|} \left\{ a_{i_k i_k} + a_{i_{k+1} i_{k+1}} + \sqrt{(a_{i_k i_k} - a_{i_{k+1} i_{k+1}})^2 + 4w_A^2(\gamma)} \right\} \\ &\geqslant 1/2 \min_{r \neq s:\ a_{rs} \neq 0} \left\{ a_{rr} + a_{ss} + \sqrt{(a_{rr} - a_{ss})^2 + 4\max\{w_r(A),\ w_s(A)\}^2} \right\} \\ &\geqslant \min_{r \neq s:\ a_{rs} \neq 0} \left\{ \frac{a_{rr} + a_{ss}}{2} + \max\{w_r(A),\ w_s(A)\} \right\} \geqslant \min_{i \in \langle n \rangle} \{a_{ii} + w_i(A)\}, \end{aligned}$$

то из оценки (2.44) следует нижняя оценка в (2.18).

Можно также предположить, что из нижней оценки теоремы 2.2 следует и нижняя оценка теоремы 2.1, но пока эта гипотеза остается недоказанной.

Проиллюстрируем результаты этой статьи на примерах. Сперва рассмотрим класс слабо неприводимых неотрицательных матриц $A = (a_{ij})$, удовлетворяющих условию

$$a_{11} = \cdots = a_{nn} = \alpha > 0. \tag{2.47}$$

Для таких матриц оценки Альпина (1.1) сводятся к оценкам Фробениуса, тогда как оценки теоремы 2.1, следствия 2.1, теоремы 2.1 и следствия 2.2 принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \alpha + \min_{i \in \langle n \rangle} w_i(A) = \alpha + \min_{\gamma \in \mathcal{C}'(A)} w_A(\gamma) \\ \leqslant \rho(A) \leqslant \alpha + \max_{\gamma \in \mathcal{C}'(A)} w_A(\gamma) = \alpha + \max_{i \in \langle n \rangle} W_i(A). \end{aligned}$$

Поскольку для любого контура $\gamma \in \mathcal{C}'(A)$ мы имеем

$$\alpha + w_A(\gamma) = \alpha + \left[\prod_{i\in\bar{\gamma}} r'_i(A)\right]^{1/|\gamma|} \leqslant \alpha + \max_{i\in\langle n\rangle} r'_i(A) = \max_{i\in\langle n\rangle} r_i(A)$$

и, аналогично,

$$\alpha + w_A(\gamma) \geqslant \min_{i\in\langle n\rangle} r_i(A),$$

то мы приходим к заключению, что в рассматриваемом случае теоремы 2.1 и 2.2, как и следствия 2.1 и 2.2, дают более точные оценки, чем теорема 1.1, если только не выполнены равенства $r'_1(A) = \cdots = r'_n(A)$.

Кроме того, если выполнено условие (2.47), то оценки (2.32) и (2.33) соответственно принимают вид

$$\rho(A) \leqslant \alpha + \max_{i\neq j:\ a_{ij}\neq 0} (W_i(A)W_j(A))^{1/2}$$

и

$$\rho(A) \geqslant \alpha + \min_{i\neq j:\ a_{ij}\neq 0} (W_i(A)W_j(A))^{1/2},$$

и из них также вытекают оценки Альпина.

Укажем еще один класс матриц, для которых оценки (2.18) по крайней мере не хуже, чем оценки Альпина (1.1). Пусть G – простой неориентированный граф с множеством вершин $\{v_1,\ldots,v_n\}$, не содержащий изолированных вершин. В этом случае все степени вершин $\{d_1,\ldots,d_n\}$ положительны. Пусть $D_G = \operatorname{diag}(d_1,\ldots,d_n)$, A_G – матрица смежности графа G и $Q_G = D_G + A_G = (q_{ij})$ – положительный (signless) лапласиан графа G. Заметим, что матрица Q_G обладает тем важным свойством, что

$$q_{ii} \geqslant q_{jj} \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad r'_i(Q_G) \geqslant r'_j(Q_G). \qquad (2.48)$$

Обозначим $\Delta = \max_{i\in\langle n\rangle}\{d_i\}$ и $\delta = \min_{i\in\langle n\rangle}\{d_i\}$. Как нетрудно убедиться, ввиду (2.48) мы имеем:

$$\min_{i\in\langle n\rangle}\{r_i(Q_G)\} = 2\delta \leqslant q_{ii} + W_i(Q_G) \leqslant 2\Delta = \max_{i\in\langle n\rangle}\{r_i(Q_G)\}, \quad i = 1,\ldots,n,$$

так что в рассматриваемом случае оценки (2.18) заведомо не хуже, чем оценки Альпина (1.1), совпадающие с оценками Фробениуса.

В заключение данной статьи отметим, что подходы, использованные при доказательстве оценок теорем 2.1 и 2.2, позволяют получить и другие верхние и нижние контурные оценки для перроновского корня неотрицательной матрицы, если применить их к соответствующим результатам статьи [5] (см. следствия 2.6, 2.7, 3.5–3.7 и теорему 4.1).

Литература

1. Ю. А. Альпин, *Границы для перронова корня неотрицательной матрицы, учитывающие свойства ее графа.* — Мат. заметки **58** (1995), 635–637.
2. R. A. Brualdi, *Matrices, eigenvalues, and directed graphs.* — Linear Multilinear Algebra **11** (1982), 143–165.
3. L. Elsner, P. van den Driessche, *Bounds for the Perron root using max eigenvalues.* — Linear Algebra Appl. **428** (2008), 2000–2005.
4. Л. Ю. Колотилина, *Оценки и неравенства для перроновского корня неотрицательной матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **284** (2002), 77–122.
5. Л. Ю. Колотилина, *Оценки и неравенства для перроновского корня неотрицательной матрицы.* II. *Контурные оценки и неравенства.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **296** (2003), 60–88.

Kolotilina L. Yu. New circuit bounds for the Perron root of a nonnegative matrix.

The paper suggests new two-sided bounds for the Perron root of a weakly irreducible nonnegative matrix, which depend on the circuits of length no less than two in the associated directed graph and, in some cases, improve Al'pin's bounds, suggested in 1995. Two approaches to deriving circuit bounds are considered.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург,
Россия

E-mail: liko@pdmi.ras.ru

Поступило 10 октября 2011 г.