Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 395, 2011 г.

**Х. Д. Икрамов**

# О 2-ИЗОМЕТРИЯХ В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

**1.** Линейный ограниченный оператор $A$, действующий в комплексном гильбертовом пространстве $H$, называется 2-изометрией, если

$$A^{*2}A^2 - 2A^*A + I = 0. \tag{1}$$

Здесь $I$ – тождественный оператор. Как отмечено в [1], понятие 2-изометрии является естественным обобщением обычной изометрии. Кроме того, эти обобщенные изометрии не принадлежат таким хорошо изученным классам, как сжимающие или субнормальные операторы. Дальнейшее обобщение понятия изометрии дано в ряде работ Аглера и Станкуса (J. Agler, M. Stankus), где определены $m$-изометрии для любого натурального числа $m$. Линейный ограниченный оператор $A$, действующий в гильбертовом пространстве $H$, называется $m$-изометрией, если

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} A^{*k}A^k = 0. \tag{2}$$

Очевидно, что изометричный оператор $A$ удовлетворяет уравнениям (1) и (2), т.е. является $m$-изометрией для любого $m$. Справедлив и более общий факт: всякая $m$-изометрия есть в то же время $l$-изометрия для всех $l \geqslant m$ (см. [2]).

Цель этой заметки – указать на тот факт, что хотя, вероятно, понятие 2-изометрии полезно в бесконечномерном контексте, оно не имеет нового содержания в конечномерном случае.

**Теорема 1.** *Пусть $U_n$ – комплексное гильбертово (т.е. унитарное) пространство размерности $n$ и $\mathcal{L}(U_n)$ – алгебра линейных операторов, действующих в $U_n$. Если $A \in \mathcal{L}(U_n)$ есть 2-изометрия, то $A$ – унитарный оператор.*

Теорема 1 доказана ниже в разделах 2–4.

---

*Ключевые слова*: изометрия, $m$-изометрия, унитарный оператор, собственные значения, сингулярные числа.

**2.** Начнем со следующей леммы.

**Лемма 1.** *Спектр 2-изометрии $A \in \mathcal{L}(U_n)$ принадлежит единичной окружности.*

**Доказательство.** Пусть $\lambda$ – произвольное собственное значение оператора $A$, а $x$ – соответствующий собственный вектор. Фиксировав какой-либо ортонормированный базис в $U_n$, можно рассматривать $A$ как $n \times n$-матрицу, а $x$ – как столбец из $\mathbf{C}^n$. Умножая (1) справа на $x$ и слева на $x^*$, получаем

$$(|\lambda|^4 - 2|\lambda|^2 + 1)x^*x = 0,$$

т.е.

$$|\lambda| = 1.$$

**Замечание.** Таким же образом доказывается, что спектр произвольной $m$-изометрии $A \in \mathcal{L}(U_n)$ $(m > 2)$ принадлежит единичной окружности.

**3.** Нам понадобится также следующее утверждение.

**Лемма 2.** *Всякая 2-изометрия $A \in \mathcal{L}(U_n)$ является несжимающим оператором, т.е.*

$$A^*A \geqslant I_n. \tag{3}$$

Здесь знак $\geqslant$ относится к левнеровскому упорядочению эрмитовых операторов ($A \geqslant B$, если эрмитов оператор $A - B$ положительно полуопределен).

Лемма 2 доказана в [3]. Для удобства читателя мы воспроизведем ее доказательство.

Пусть $x$ – произвольный вектор-столбец из $\mathbf{C}^n$. Умножая (1) справа на $x$ и слева на $x^*$, получаем

$$\|A^2x\|^2 - 2\|Ax\|^2 + \|x\|^2 = 0. \tag{4}$$

Символ $\|\cdot\|$ обозначает 2-норму (иначе, длину) соответствующего вектора. Перепишем (4) в виде

$$\|A^2x\|^2 - \|Ax\|^2 = \|Ax\|^2 - \|x\|^2.$$

Подставляя сюда вместо $x$ вектор $Ax$, имеем

$$\|A^3x\|^2 - \|A^2x\|^2 = \|A^2x\|^2 - \|Ax\|^2 = \|Ax\|^2 - \|x\|^2.$$

Продолжая таким образом, показываем, что

$$\|A^kx\|^2 - \|A^{k-1}x\|^2 = \|Ax\|^2 - \|x\|^2$$

для любого натурального $k$. Отсюда следует, что

$$\|A^m x\|^2 - \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \left\{\|A^k x\|^2 - \|A^{k-1}x\|^2\right\} = m\left\{\|Ax\|^2 - \|x\|^2\right\}.$$

Таким образом, число

$$\|x\|^2 + m\left\{\|Ax\|^2 - \|x\|^2\right\},$$

будучи равно $\|A^m x\|^2$, неотрицательно. Поэтому

$$\|Ax\|^2 \geqslant \frac{m-1}{m}\|x\|^2.$$

Перейдя здесь к пределу при $m \to \infty$, получим неравенство (3).

**4.** Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – собственные значения 2-изометрии $A$, а $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n$ – ее сингулярные числа. По лемме 1,

$$|\det A| = |\lambda_1| \cdots |\lambda_n| = 1.$$

Согласно лемме 2,

$$\sigma_n \geqslant 1.$$

Так как, однако,

$$|\det A| = \sigma_1 \cdots \sigma_n = 1,$$

то

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_n = 1,$$

а это означает, что $A$ – унитарный оператор. Теорема 1 доказана. $\square$

## Литература


1. S. Richter, *A representation theorem for cyclic analytic two-isometries.* — Trans. Amer. Math. Soc. **328** (1991), 325–349.
2. L. Patton, M. Robbins, *Composition operators that are M-isometries.* — Houston J. Math. **31** (2005), 255–267.
3. S. Richter, *Invariant subspaces of the Dirichlet shift.* — J. Reine Angew. Math. **386** (1988), 205–220.



Ikramov Kh. D. On two-isometries in finite-dimensional spaces.

A linear bounded operator $A$ in a complex Hilbert space $H$ is called a 2-isometry if $A^{*2}A^2 - 2A^*A + I = 0$. In particular, the class of 2-isometries contains conventional isometries. It is shown that in the finite-dimensional

case, the concept of a 2-isometry has no new content, that is, 2-isometries of a finite-dimensional unitary space are conventional unitary operators.

Московский государственный
университет ГСП-1, Ленинские горы,
119991 Москва, Россия
*E-mail*: ikramov@cs.msu.su

Поступило 25 июня 2011 г.