Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 395, 2011 г.

Х. Д. Икрамов

О ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ОРТОПРОЕКТОРОВ И ЭРМИТОВЫХ МАТРИЦ

1. Пусть $M_n(\mathbf{C})$ – множество комплексных $n \times n$-матриц. Приводимое ниже утверждение есть теорема 9 из [1].

Теорема 1. *Матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$ тогда и только тогда представима произведением*

$$A = PH, \tag{1}$$

где P – ортопроектор, а H – эрмитова матрица, когда A удовлетворяет уравнению

$$A^{*2}A = A^*A^2. \tag{2}$$

Доказательство этой теоремы в [1] связывает ее со следующим результатом, принадлежащим Т. Криммминсу.

Теорема 2. *Матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$ тогда и только тогда представима произведением*

$$A = PQ,$$

где P и Q – ортопроекторы, когда A удовлетворяет уравнению

$$A^2 = AA^*A.$$

Цель настоящей заметки – дать прямое доказательство теоремы 1, не опирающееся на результат Кримминса.

2. Необходимость условия теоремы 1 тривиально проверяется подстановкой разложения (1) в уравнение (2); при этом обе части оказываются равными матрице $HPHPH$.

Для доказательства достаточности заметим, что утверждение теоремы 1 инвариантно относительно унитарных подобий, выполняемых с матрицей A. Действительно, если

$$B = Q^*AQ, \quad QQ^* = I_n, \tag{3}$$

то

$$B = (Q^*PQ)(Q^*HQ) = P_B H_B,$$

Ключевые слова: эрмитова матрица, ортопроектор, образ матрицы.

где по-прежнему P_B – ортопроектор, а H_B – эрмитова матрица. Производя подстановку (3) в уравнение (2), получаем уравнение того же вида для матрицы B:

$$B^{*2}B = B^*B^2.$$

Положим

$$S_A = A^*A. \tag{4}$$

Тогда (2) можно переписать в виде

$$A^*S_A = S_AA. \tag{5}$$

Замечание, сделанное выше, позволяет нам перейти к базису $e_1, \ldots, e_n$, в котором эрмитова матрица (4) диагональна:

$$S_A = \Lambda \oplus 0_s. \tag{6}$$

Здесь Λ – диагональная $r \times r$-матрица с положительными диагональными элементами, $r = \mathrm{rank} A$ и $s = n - r$.

Из представления (6) очевидно, что векторы $e_{r+1}, \ldots, e_n$ составляют базис подпространства $\ker S_A$. Поскольку $\ker A^*A = \ker A$, то нулевыми должны быть и последние s столбцов матрицы A. Записывая ее в блочном виде, согласованном с (6), имеем

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Из (4) следует, что

$$\Lambda = A_{11}^*A_{11} + A_{21}^*A_{21}. \tag{8}$$

Соотношение (5) сводится к равенству

$$A_{11}^*\Lambda = \Lambda A_{11}, \tag{9}$$

означающему, что матрица ΛA_{11} эрмитова. Вместе с ней эрмитова и матрица

$$A_{11}\Lambda^{-1} = \Lambda^{-1}(\Lambda A_{11})\Lambda^{-1}. \tag{10}$$

3. Пусть A – произвольная матрица из $M_n(\mathbf{C})$ и P – ортопроектор на область значений (образ) $\mathcal{L}$ этой матрицы. Обозначим через $Q = I_n - P$ ортопроектор на подпространство $\mathcal{L}^\perp$ и, следуя [1], определим матрицу

$$H = PAP + AQ + QA^*. \tag{11}$$

Тогда

$$PH = PA = A. \tag{12}$$

Действительно,

$$PH = P^2AP + PAQ + (PQ)A^* = PAP + PAQ = PA(P+Q) = PA = A.$$

Применим формулы (11) и (12) к ситуации из теоремы 1. Представление A произведением (12) будет искомым разложением (1), если матрица H эрмитова. Иначе говоря, эрмитовой должна быть матрица PAP.

Для матрицы (7) ортопроектор P на ее образ дается формулой

$$P = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}\Lambda^{-1}A_{11}^* & A_{11}\Lambda^{-1}A_{21}^* \\ A_{21}\Lambda^{-1}A_{11}^* & A_{21}\Lambda^{-1}A_{21}^* \end{pmatrix}.$$

Отсюда выводим

$$PAP = AP = \begin{pmatrix} A_{11}^2\Lambda^{-1}A_{11}^* & A_{11}^2\Lambda^{-1}A_{21}^* \\ A_{21}A_{11}\Lambda^{-1}A_{11}^* & A_{21}A_{11}\Lambda^{-1}A_{21}^* \end{pmatrix}.$$

Блоки $A_{11}^2\Lambda^{-1}A_{11}^* = A_{11}(A_{11}\Lambda^{-1})A_{11}^*$ и $A_{21}(A_{11}\Lambda^{-1})A_{21}^*$ эрмитовы, поскольку матрица (10) эрмитова. Блоки $A_{11}^2\Lambda^{-1}A_{21}^*$ и $A_{21}A_{11}\Lambda^{-1}A_{11}^*$ взаимно сопряжены, так как

$$A_{11}^2\Lambda^{-1}A_{21}^* = A_{11}(A_{11}\Lambda^{-1})A_{21}^* = A_{11}(\Lambda^{-1}A_{11}^*)A_{21}^* = (A_{21}A_{11}\Lambda^{-1}A_{11}^*)^*.$$

Итак, матрица PAP эрмитова и вместе с ней эрмитовой является матрица H. Теорема 1 доказана.

Замечание. Пусть H_1 и H_2 – эрмитовы матрицы и одна из них положительно полуопределена. Тогда собственные значения произведения

$$A = H_1H_2$$

вещественны. Более того (см. [2]), ненулевые собственные значения матрицы A полупросты, а собственному значению нуль могут отвечать жордановы клетки порядка не выше 2.

В условиях теоремы 1 нулевое собственное значение матрицы A может не быть полупростым уже при $n = 2$. Примером является жорданова клетка

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Она удовлетворяет уравнению (2), обе части которого обращаются в нуль при подстановке $A = J$. В представлении

$$J = PH$$

ортопроектор P имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а в качестве H может быть взята любая матрица вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$$

с вещественным элементом x.

Литература

1. H. Radjavi, J. P. Williams, *Products of self-adjoint operators.* — Michigan Math. J. **16** (1969), 177–185.
2. Y. P. Hong, R. A. Horn, *The Jordan canonical form of a product of a Hermitian and a positive semidefinite matrix.* — Linear Algebra Appl. **147** (1991), 373–386.

Ikramov Kh. D. Products of orthoprojectors and Hermitian matrices.

A proof of the following result is presented: A matrix $A \in M_n(\mathbf{C})$ can be represented as a product $A = PH$, where P is an orthoprojector and H is Hermitian, if and only if A satisfies the equation $A^{*2}A = A^*A^2$ (the Radjavi–Williams theorem). Unlike the original proof, ours makes no use of the Crimmins theorem.

Московский государственный
университет ГСП-1, Ленинские горы,
119991 Москва, Россия
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 25 мая 2011 г.