Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 395, 2011 г.

Х. Д. Икрамов

КАК ОТЛИЧИТЬ ЛАТЕНТНО-ВЕЩЕСТВЕННЫЕ МАТРИЦЫ ОТ БЛОЧНЫХ КВАТЕРНИОНОВ?

1. Обозначим через $M_n(\mathbf{C})$ множество комплексных $n \times n$-матриц. Предположим, что матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$ унитарно подобна матрице $\overline{A}$, получаемой из A взятием комплексного сопряжения от каждого элемента, и будем в этом случае писать $A \sim_U \overline{A}$.

Подобие (даже и неунитарное) между A и $\overline{A}$ накладывает следующие ограничения на спектр и жорданову структуру матрицы A:

а) Если невещественное число λ является собственным значением для A, то $\overline{\lambda}$ – также собственное значение, причем той же кратности.

б) Число и порядки жордановых клеток, относящихся к $\overline{\lambda}$, те же, что и для λ.

Назовем матрицу $A \in M_n(\mathbf{C})$ *неприводимой*, если A и A^* не имеют нетривиальных общих инвариантных подпространств. Иначе говоря, A неприводима, если не существует унитарного подобия, которое превращало бы A в прямую сумму матриц меньшего порядка. Эффективный способ проверки неприводимости указан в [1]. Матрицы с противоположным свойством мы называем *приводимыми*.

Настоящую заметку можно рассматривать как комментарий к одной из предыдущих работ автора (см. [2]), в которой доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Если матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$ неприводима и $A \sim_U \overline{A}$, то унитарная матрица P в соотношении*

$$\overline{A} = P^* A P \tag{1}$$

должна быть симметричной или кососимметричной.

Мы называем матрицу $A \in M_n(\mathbf{C})$ *латентно-вещественной*, если $A \sim_U \overline{A}$ и унитарную матрицу P в соотношении (1) можно выбрать симметричной. Смысл этого термина объясняет следующий результат, полученный в [3].

Ключевые слова: унитарное подобие, латентно-вещественная матрица, блочный кватернион, неприводимость.

Теорема 2. *Унитарное подобие*

$$A \longrightarrow R = Q^* A Q,$$

преобразующее матрицу $A \in M_n(\mathbf{C})$ в вещественную матрицу R, существует тогда и только тогда, когда $A \sim_U \overline{A}$ и унитарную матрицу P в соотношении (1) *можно выбрать симметричной.*

Вторая возможность, указываемая теоремой 1, реализуется, например, *блочными кватернионами.* Так называются матрицы четного порядка $n = 2m$, удовлетворяющие условию

$$\overline{A} J = J A,$$

где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Если блочный кватернион A представить в виде

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

с блоками размера $m \times m$, то эти блоки связаны соотношениями

$$A_{21} = -\overline{A}_{12}, \quad A_{22} = \overline{A}_{11}. \tag{2}$$

В отношении свойства унитарной приводимости к вещественному виду блочные кватернионы в известной мере противоположны латентно-вещественным матрицам. Так в [3] показано, что неприводимый блочный кватернион нельзя сделать вещественным никаким унитарным подобием. Аналогичное утверждение справедливо для любой матрицы A, удовлетворяющей соотношению (1) с унитарной кососимметричной матрицей P. Мы называем такие матрицы *обобщенными блочными кватернионами.*

2. Пусть $A \sim_U \overline{A}$. Возможно ли, что соотношение (1) выполняется для A с некоторой симметричной матрицей P_1 и в то же время с некоторой кососимметричной матрицей P_2?

Если A – приводимая матрица, то такое совмещение вполне возможно. Рассмотрим, например, комплексный блочный кватернион второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где

$$\alpha = r + is, \quad \beta = u + iv, \quad r, s, u, v \in \mathbf{R}$$

и

$$s, v \neq 0.$$

Легко видеть, что строки матрицы (3) ортогональны и их евклидовы длины одинаковы. Тем самым A лишь числовым множителем отличается от унитарной матрицы.

Наряду с A, рассмотрим вещественный блочный кватернион

$$B = \begin{pmatrix} r & t \\ -t & r \end{pmatrix},$$

в котором

$$t^2 = s^2 + u^2 + v^2.$$

Очевидно, что B лишь вещественным числовым множителем отличается от ортогональной матрицы.

Матрицы A и B имеют один и тот же след $2r$ и один и тот же определитель

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = r^2 + s^2 + u^2 + v^2.$$

Отсюда следует, что собственные значения у них одинаковы. Будучи унитарными (с точностью до множителей), эти матрицы обязаны быть унитарно подобными.

Итак, в соответствии с определением, блочный кватернион A удовлетворяет соотношению (1) с унитарной кососимметричной матрицей J. В то же время, как только что показано, он является латентно-вещественной матрицей, а потому удовлетворяет (1) и для некоторой унитарной симметричной матрицы P (см. теорему 2).

Разложимость A вытекает из ее "почти-унитарности": действительно, собственные векторы матрицы A ортогональны. Для неразложимого же блочного кватерниона латентная вещественность невозможна. Это уже было отмечено в разделе 1 со ссылкой на [3], но легко может быть показано непосредственно. В самом деле, предположим, что

$$\overline{A} = P_1^* A P_1, \quad P_1^T = -P_1,$$

и одновременно

$$\overline{A} = P_2^* A P_2, \quad P_2^T = P_2.$$

Тогда

$$P_1^* A P_1 = P_2^* A P_2$$

и

$$AQ = QA, \quad \text{где} \quad Q = P_2 P_1^* = -P_2 \overline{P}_1.$$

Произведение Q симметричной матрицы P_2 и кососимметричной матрицы P_1^* не может быть скалярной матрицей и, стало быть, имеет по меньшей мере два различных собственных значения. Разбив спектр $\sigma(Q)$ на непересекающиеся взаимно дополнительные подмножества σ_1 и σ_2, найдем отвечающие им инвариантные подпространства. Эти подпространства ортогональны и дополняют друг друга до $\mathbf{C^n}$. Поскольку A и Q коммутируют, те же подпространства будут инвариантны относительно матрицы A, что противоречит ее неприводимости.

Рассуждая аналогичным образом, докажем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$ неприводима и $A \sim_U \overline{A}$. Тогда унитарная матрица P в соотношении* (1) *определена однозначно (с точностью до умножения на комплексные числа с модулем* 1*).*

3. Пусть известно, что матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$ неприводима. Выяснить, будут ли A и $\overline{A}$ унитарно подобны, можно с помощью классического критерия Шпехта (см. [4]).

Критерий Шпехта. Матрицы A и B унитарно подобны тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{tr} W(A, A^*) = \operatorname{tr} W(B, B^*)$$

для любого слова $W(s,t)$ от некоммутирующих переменных s и t.

Предположим, что такая проверка показала, что $A \sim_U \overline{A}$. Как узнать, будет ли A латентно-вещественной матрицей или обобщенным блочным кватернионом? Критерий Шпехта в этом отношении не помогает, поскольку не дает никаких средств для определения унитарной матрицы P в равенстве (1).

Чтобы ответить на поставленный вопрос, воспользуемся методом проверки унитарного подобия, предложенным в [5]. Напомним, как работает этот метод для произвольной пары комплексных матриц $A, B \in M_n(\mathbf{C})$.

Очевидно, что если A и B унитарно подобны, то унитарная матрица P в равенстве

$$B = P^* A P$$

осуществляет также (унитарное) подобие между матрицами A^* и B^*. Пусть, наоборот, известно, что для некоторой невырожденной (но необязательно унитарной) матрицы Q выполняются соотношения одновременного подобия

$$B = Q^{-1}AQ, \quad B^* = Q^{-1}A^*Q. \tag{4}$$

Тогда A и B унитарно подобны, и унитарную матрицу, осуществляющую унитарное подобие между ними, можно найти как унитарный сомножитель полярного разложения матрицы Q. При этом сама матрица Q для соотношений (4) может быть вычислена посредством конечного процесса, использующего лишь арифметические операции.

Применяя описанный метод к матрицам A и $\overline{A}$, получим унитарную матрицу P для равенства (1). Согласно теореме 1, эта матрица симметрична либо кососимметрична. Соответственно A является латентно-вещественной матрицей либо обобщенным блочным кватернионом.

Литература

1. Х. Д. Икрамов, *О конечном рациональном критерии неприводимости матриц.* — Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15 “Вычисл. математика и кибернетика”, No. 3 (2007), 16–18.
2. Х. Д. Икрамов, *О латентно-вещественных матрицах и блочных кватернионах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **382** (2010), 47–54.
3. Х. Д. Икрамов, *О комплексных матрицах, унитарно подобных вещественным матрицам.* — Мат. заметки **87** (2010), 841–848.
4. Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ.* Мир, М., 1989.
5. Х. Д. Икрамов, *О конечных алгоритмах для проверки унитарного подобия и унитарной конгруэнтности пары комплексных матриц.* — Докл. РАН **437** (2011), 151–153.

Ikramov Kh. D. How to distinguish between the latently real matrices and the block quaternions?

Let a complex $n \times n$ matrix A be unitarily similar to its entrywise conjugate matrix $\overline{A}$. If the unitary matrix P in the relation $\overline{A} = P^*AP$ can be chosen symmetric (skew-symmetric), then A is called a latently real matrix (respectively, a generalized block quaternion). Only these two cases are possible if A is a (unitarily) irreducible matrix. The following question

is discussed: How to find out whether the given A is a latently real matrix or a generalized block quaternion?

Московский государственный
университет ГСП-1, Ленинские горы,
119991 Москва, Россия
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 20 марта 2011 г.