Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 395, 2011 г.

Ю. К. Демьянович

НЕГЛАДКИЕ СПЛАЙН-ВЭЙВЛЕТНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ И ИХ СВОЙСТВА

Сплайн-вэйвлетные разложения применяются к последовательности вложенных пространств сплайнов (см. [1–2] и приведенную там библиографию). Вложенность пространств гладких полиномиальных сплайнов на вложенных сетках хорошо известна (см., например, [3]), а для гладких неполиномиальных сплайнов вложенные пространства и их вэйвлетные разложения рассмотрены в работах [4–6]. Укрупнение сетки в этих разложениях можно проводить последовательным удалением узлов, удаляя по одному узлу, так что возникает вопрос о коммутативности соответствующих операций декомпозиции. Поскольку при одинаковых порядках аппроксимации (асимптотически оптимальных по N-поперечнику стандартных компактов) негладкие минимальные сплайны значительно проще гладких, то важно рассмотреть вложенность пространств негладких сплайнов и их вэйвлетные разложения. В работе [5] упомянутые разложения получены с использованием расширения цепочки векторов, которая локально ортогональна исходной цепочке, определяющей аппроксимационные соотношения; сейчас мы предлагаем более простой способ построения сплайн-вэйвлетных разложений.

Цель данной работы состоит в том, чтобы дать простые способы построения цепочки вложенных пространств (вообще говоря, негладких неполиномиальных) сплайнов первого порядка при локальном укрупнении неравномерной сетки, дать их вэйвлетные (всплесковые) разложения и установить коммутативность операторов декомпозиции при изменении порядка удаления узлов сетки.

Ключевые слова: вэйвлеты, всплески, сплайны, разложения, декомпозиция, аппроксимационные соотношения, калибровочные соотношения, реконструкция.

Работа частично поддержана грантами РФФИ 10-01-00297 и 10-01-00245.

§1. Предварительные обозначения

Прежде всего заметим, что вводимые в этом пункте обозначения, термины и формулируемые результаты были даны в более ранних работах автора (см., например, [5]); здесь они приводятся для удобства читателя.

На интервале $(\alpha,\beta)\subset\mathbb{R}^1$ рассмотрим сетку $X\stackrel{\text{def}}{=}\{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$,

$$X: \quad \ldots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots, \tag{1.1}$$

$$\alpha = \lim_{j\to-\infty} x_j, \quad \beta = \lim_{j\to+\infty} x_j, \quad \forall j\in\mathbb{Z}, \tag{1.2}$$

и положим $S_j \stackrel{\text{def}}{=} (x_j,x_{j+1})\cup(x_{j+1},x_{j+2})$, $G=\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}(x_j,x_{j+1})$.

Система векторов-столбцов $A\stackrel{\text{def}}{=}\{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{a}_j\in\mathbb{R}^2$, для которой матрица $A_j\stackrel{\text{def}}{=}(\mathbf{a}_{j-1},\mathbf{a}_j)$ неособенная ($\forall j\in\mathbb{Z}$), называется *полной цепочкой* векторов; множество всех полных цепочек обозначим $\mathcal{A}$.

По двухкомпонентной вектор-функции $\varphi(t)$, $t\in G$, с линейно независимыми компонентами на любом интервале $(a,b)\subset G$ определим функции $\omega_j(t)$, $t\in G$, с помощью аппроксимационных соотношений[1]

$$\mathbf{a}_{i-1}\omega_{i-1}(t)+\mathbf{a}_i\omega_i(t)\equiv\varphi(t) \quad \forall t\in(x_i,x_{i+1}) \quad \forall i\in\mathbb{Z}, \tag{1.3}$$

$$\omega_j(t)\equiv 0 \quad \forall t\in G\backslash S_j \quad \forall j\in\mathbb{Z}; \tag{1.4}$$

таким образом, функции $\omega_j(t)$ определены на множестве G:

$$\omega_j(t)=\begin{cases} \frac{\det(\mathbf{a}_{j-1},\varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{j-1},\mathbf{a}_j)} & \text{при} \quad t\in(x_j,x_{j+1}),\\[2ex] \frac{\det(\varphi(t),\mathbf{a}_{j+1})}{\det(\mathbf{a}_j,\mathbf{a}_{j+1})} & \text{при} \quad t\in(x_{j+1},x_{j+2}),\\[2ex] 0 & \text{при} \quad t\in G\backslash S_j. \end{cases}$$

Положим

$$\mathbb{S}=\mathbb{S}(X,A,\varphi)\stackrel{\text{def}}{=}Cl_p\ \mathcal{L}\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}},$$

---

[1] Дальше рассматриваются бесконечные ряды вида $\sum_j c_j\omega_j^*$, $c_j\in\mathbb{R}^1$, где суммирование по j распространено на все целые числа, $j\in\mathbb{Z}$. Заметим, что при каждом фиксированном $t\in(\alpha,\beta)$ такой ряд содержит конечное число ненулевых слагаемых; поэтому при любой последовательности $\{c_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ коэффициентов $c_j\in\mathbb{R}^1$ упомянутый ряд сходится (в смысле поточечной сходимости).

где $\mathcal{L}\{\dots\}$ означает линейную оболочку множества элементов, заключенных в фигурные скобки, а Cl_p означает замыкание в топологии поточечной сходимости. Функции из пространства $\mathbb{S}$ называются (X, A, φ)-сплайнами.

Пусть вектор-столбцы $\mathbf{d}_i$ определяются тождеством

$$\mathbf{d}_i^T \mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \det(\mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \tag{1.5}$$

Лемма 1. *Справедливы соотношения*

$$\mathbf{d}_i^T \mathbf{a}_{i-2} \neq 0, \quad \mathbf{d}_i^T \mathbf{a}_{i-1} = 0, \quad \mathbf{d}_i^T \mathbf{a}_i \neq 0. \tag{1.6}$$

Доказательство. Доказательство легко получается применением $\mathbf{d}_i^T$ к векторам $\mathbf{a}_{i-2}$, $\mathbf{a}_{i-1}$, $\mathbf{a}_i$ и использованием тождества (1.5). □

Пусть $\varphi \in C^s(\alpha, \beta)$ для некоторого неотрицательного целого s; положим $\varphi_i \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x_i)$, $\varphi_i^{(s)} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi^{(s)}(x_i)$.

Теорема 1. *Для того, чтобы $\omega_j^{(s)} \in C(\alpha, \beta)$ $\forall j \in \mathbb{Z}$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mathbf{d}_i^T \varphi_i^{(s)} = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \tag{1.7}$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству, приведенному в [6]. □

Следствие 1. *Если $\{\varphi_j^{(s)}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ – полная цепочка, то при $\mathbf{a}_j \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_{j+1}^{(s)}$ верны соотношения $\omega_j^{(s)} \in C(\alpha, \beta)$.*

Доказательство. В условиях следствия второе из соотношений в (1.6) принимает вид $\mathbf{d}_i^T \varphi_i^{(s)} = 0$, что совпадает с условием (1.7). □

Предполагая, что векторы $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ образуют полную цепочку, положим $\mathbf{a}_j^* \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_{j+1}$ и определим функции ω_j^* (*координатные сплайны курантова типа*) из соотношений (1.3)–(1.4) при $\mathbf{a}_j \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}_j^*$:

$$\omega_j^*(t) = \begin{cases} \frac{\det(\varphi_j, \varphi(t))}{\det(\varphi_j, \varphi_{j+1})} & \text{при} \quad t \in (x_j, x_{j+1}), \\ \\ \frac{\det(\varphi(t), \varphi_{j+2})}{\det(\varphi_{j+1}, \varphi_{j+2})} & \text{при} \quad t \in (x_{j+1}, x_{j+2}), \\ \\ 0 & \text{при} \quad t \notin (x_j, x_{j+2}). \end{cases} \tag{1.8}$$

Ввиду следствия 1, пространство $\mathbb{S}_\varphi^*(X) \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p\, \mathcal{L}\{\omega_j^*\}_{j\in\mathbb{Z}}$ состоит из непрерывных функций: $\mathbb{S}_\varphi^*(X) \subset C(\alpha, \beta)$.

§2. Биортогональная система функционалов

Некоторые из вводимых в этом пункте понятий и утверждений (а именно, леммы 2, 3 и теоремы 2, 3) аналогичны данным ранее в работе [5].

Рассмотрим линейное пространство $C\langle c,d\rangle$, состоящее из функций $u(t)$ пространства $C(c,d)$, которые имеют конечные пределы $\lim\limits_{t\to c+0} u(t)$ и $\lim\limits_{t\to d-0} u(t)$. Введем также пространства

$$\mathbb{C}_X \stackrel{\text{def}}{=} \bigotimes_{i\in\mathbb{Z}} C\langle x_i, x_{i+1}\rangle, \quad \mathbb{C}^s_X \stackrel{\text{def}}{=} \{u \mid u^{(i)} \in \mathbb{C}_X, \quad \forall i = 0,1,\dots,S\}.$$

Символом $(\mathbb{C}^s_X)^*$ обозначается пространство, сопряженное к пространству $\mathbb{C}^s_X$. При $\varphi \in \mathbb{C}^s(\alpha,\beta)$ пространства $\mathbb{S}(X,\mathbf{A},\varphi)$ лежат в пространстве $\mathbb{C}^s_X$.

Для функционала $f \in (\mathbb{C}^s_X)^*$ будем писать $\operatorname{supp} f \subset [c,d]$, если значение $\langle f,u\rangle$ определяется значениями функции $u \in \mathbb{C}^s_X$ на интервале (c,d)[2].

Сужением системы $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ на интервал (a,b) называется множество $\Omega_{(a,b)}$ функций ω_j, носители которых имеют непустое пересечение с (a,b),

$$\Omega_{(a,b)} \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega_j \mid \operatorname{supp}\omega_j \cap (a,b) \neq \varnothing, \quad j\in\mathbb{Z}\}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть цепочка векторов $\{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ полная. Тогда*

(1) *для любого интервала $(a,b)\subset(\alpha,\beta)$ сужение системы функций $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ на интервал (a,b) представляет собой линейно независимую систему функций на этом интервале,*

(2) *для того, чтобы система функционалов $\{g_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, $g_i \in (\mathbb{C}_X)^*$, с компактными носителями на (α,β) была биортогональна системе*

---

[2]Рассмотрим в (α,β) два подмножества с непустым пересечением. Говорят, что для функционала f над некоторым пространством U функций u с областью определения Ω выполнено соотношение $\operatorname{supp} f \subset \mathcal{M}$, если его значение $\langle f,u\rangle$ на любой функции $u\in U$ определяется лишь значениями функции u на множестве $\Omega\bigcap\mathcal{M}$. Если под $\mathcal{M}$ можно подразумевать любую сколь угодно малую выколотую (возможно, одностороннюю) окрестность точки x (т.е. $(x-\varepsilon,x)$ или $(x,x+\varepsilon)$, где ε – любое положительное число), то говорят, что f является точечным функционалом, а если замыкание множества $\mathcal{M}$ содержится в интервале (α,β), то говорят, что f имеет компактный носитель в (α,β).

функций $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, *так что*

$$\langle g_i,\omega_j\rangle=\delta_{i,j}, \tag{2.1}$$

необходимо, а если

$$\operatorname{supp} g_i\subset[x_i,x_{i+1}], \tag{2.2}$$

то и достаточно выполнение соотношений

$$\langle g_i,\varphi\rangle=\mathbf{a}_i\quad\forall i\in\mathbb{Z}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Используя предположенную линейную независимость компонент вектор-функции $\varphi(t)$ на любом подинтервале (a,b) интервала (α,β) и полноту цепочки $\{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ из (1.3)–(1.4), получаем первое утверждение доказываемой теоремы.

Докажем второе утверждение.

Необходимость. Применяя функционал g_i к обеим частям соотношений (1.3)–(1.4) и учитывая компактность носителя этого функционала в (α,β), а также равенство $\operatorname{supp}\omega_j=[x_j,x_{j+2}]$, приходим к выводу, что в левой части следует ограничиться рассмотрением конечного числа слагаемых:

$$\sum_{j'\in\mathbb{Z}^*}\mathbf{a}_{j'}\langle g_i,\omega_{j'}\rangle=\langle g_i,\varphi\rangle,\quad \omega_j(t)\equiv0\quad\forall t\notin S_j, \tag{2.4}$$

где $\mathbb{Z}^*$ – некоторое конечное подмножество в $\mathbb{Z}$. Теперь из (2.1) немедленно получаем (2.3).

Достаточность. Принимая во внимание соотношение (2.2), из (2.4) получаем

$$\mathbf{a}_{i-1}\langle g_i,\omega_{i-1}\rangle+\mathbf{a}_i\langle g_i,\omega_i\rangle=\langle g_i,\varphi\rangle,$$

что, ввиду линейной независимости векторов $\mathbf{a}_{i-1}$ и $\mathbf{a}_i$ и с учетом соотношения (2.3), дает $\langle g_i,\omega_i\rangle=1$, $\langle g_i,\omega_{i-1}\rangle=0$. Осталось заметить, что равенство $\langle g_i,\omega_j\rangle=0$ при $j\in\mathbb{Z}\backslash\{i-1,i\}$ легко получается из предположения (2.2) □

Лемма 2. *Если*

$$\varphi\in C^1[\alpha,\beta], \tag{2.5}$$

а определитель Вронского $W(t)\stackrel{\text{def}}{=}\det(\varphi(t),\varphi'(t))$ *равномерно отделен от нуля,*

$$|W(t)|\geqslant c>0\quad\forall t\in[\alpha,\beta], \tag{2.6}$$

то существует $h>0$ *такое, что при* $\sup_{i\in\mathbb{Z}}(x_{i+1}-x_i)<h$ *цепочка векторов* $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *полная.*

Доказательство. Применим условия (2.5)–(2.6) к разложению функции $\varphi(t)$ по формуле Тейлора в точке x_j при $t = x_{j+1}$:

$$\det(\varphi_j, \varphi_{j+1}) = \det(\varphi_j, \varphi'_j)(x_{j+1} - x_j) + o(x_{j+1} - x_j);$$

имеем

$$|\det(\varphi_j, \varphi_{j+1})| \geqslant (|\det(\varphi_j, \varphi'_j)| - |o(1)|)(x_{j+1} - x_j).$$

Учитывая предположение (2.6) и принимая во внимание равномерную непрерывность функции $W(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ (из-за условия (2.5)), видим, что существует $h > 0$ такое, что при $x_{j+1} - x_j \leqslant h$

$$|\det(\varphi_j, \varphi_{j+1})| \geqslant \frac{c}{2}(x_{j+1} - x_j) \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Лемма доказана. □

Рассмотрим линейное пространство $\mathfrak{B}$ над полем вещественных (или комплексных) чисел и сопряженное ему пространство $\mathfrak{B}^*$ линейных функционалов f над пространством $\mathfrak{B}$. Значение функционала f на элементе $v \in \mathfrak{B}$ обозначается $\langle f, v\rangle$. Множество 2-компонентных векторов-столбцов $\mathbf{u}$ с компонентами $[\mathbf{u}]_i$, $i = 0, 1$, из пространства $\mathfrak{B}$ обозначим $\mathfrak{B}^2$. Будем рассматривать также 2-компонентные вектор-столбцы $\mathbf{f}$, компоненты $[\mathbf{f}]_j$ которых лежат в пространстве $\mathfrak{B}^*$, $j = 0, 1$; образуемое этими векторами линейное пространство обозначим $(\mathfrak{B}^*)^2$. Справедливо следующее утверждение (см. также [5]).

Лемма 3. *Пусть векторы $\mathbf{f} \in (\mathfrak{B}^*)^2$ и $\mathbf{v} \in \mathfrak{B}^{\mathbf{2}}$ таковы, что матрица $\mathbf{fv^T}$ неособенная; пусть вектор $\mathbf{u} \in \mathfrak{B}^2$ удовлетворяет соотношению*

$$B\mathbf{u} = \mathbf{v}, \tag{2.7}$$

где B – неособенная квадратная числовая матрица 2-го порядка. Тогда система из компонентов $[\mathbf{l}]_\mathbf{r}$ вектора $\mathbf{l} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B^T}(\mathbf{fv^T})^{\mathbf{-1}}\mathbf{f}$, $r = 0, 1$, представляет собой систему функционалов, биортогональную к системе элементов $[\mathbf{u}]_i$, $i = 0, 1$, так что $\mathbf{lu^T} = I$, где I – единичная матрица 2-го порядка.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $\mathbf{l}\,\mathbf{u^T}$; поскольку из (2.7) следует соотношение $\mathbf{u} = B^{-1}\mathbf{v}$, то из определения вектора $\mathbf{l}$ находим

$$\begin{aligned}\mathbf{l}\,\mathbf{u^T} &= B^T(\mathbf{fv^T})^{-1}\mathbf{fu}^T = B^T(\mathbf{fv^T})^{-1}\mathbf{f}(B^{-1}\mathbf{v})^T \\ &= B^T(\mathbf{fv^T})^{-1}\mathbf{fv^T}(B^{-1})^T = I,\end{aligned}$$

где I — единичная матрица 2-го порядка. Лемма доказана. □

Замечание 2.1. Очевидно, что $\mathbf{l}\,\mathbf{v}^\mathbf{T} = B^T$; действительно,

$$\mathbf{l}\,\mathbf{v}^\mathbf{T} = B^T(\mathbf{f}\mathbf{v}^\mathbf{T})^{-1}\mathbf{f}\mathbf{v}^\mathbf{T} = B^T.$$

Теорема 3. *Пусть $\varphi \in \mathbb{C}_X^s$, $A \in \mathcal{A}$, и для каждого фиксированного $i \in \mathbb{Z}$ определен вектор-столбец $\mathbf{f}_i$, компонентами которого служат функционалы $[\mathbf{f}_i]_j \in (\mathbb{C}_X^s)^*$, $j = 0, 1$, такие, что* $\operatorname{supp}[\mathbf{f}_i]_j \subset [x_i, x_{i+1}]$. *Пусть матрицы $\mathbf{f}_i\varphi^T$ вида*

$$\mathbf{f}_i\varphi^T \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \langle[\mathbf{f}_i]_0, [\varphi]_0\rangle & \langle[\mathbf{f}_i]_1, [\varphi]_0\rangle \\ \langle[\mathbf{f}_i]_0, [\varphi]_1\rangle & \langle[\mathbf{f}_i]_1, [\varphi]_1\rangle \end{pmatrix},$$

$i \in \mathbb{Z}$, неособенные. Тогда при каждом фиксированном $r \in \{0, 1\}$ система $\{g_{\langle r\rangle}^{(i)}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ функционалов $g_{\langle r\rangle}^{(i)} \in (\mathbb{C}_X^s)^*$, определяемых равенствами

$$g_{\langle r\rangle}^{(i)} \overset{\text{def}}{=} \Big[A_{i-r+1}^T\Big(\mathbf{f}_{i-r+1}\varphi^T\Big)^{-1}\mathbf{f}_{i-r+1}\Big]_r \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \tag{2.8}$$

представляет собой продолжение на $\mathbb{C}_X^s$ системы функционалов, биортогональной системе минимальных $(X, \mathbf{A}, \varphi)$-сплайнов $\{\omega_{i'}\}_{i'\in\mathbb{Z}}$, и

$$\langle g_{\langle r\rangle}^{(i)}, \omega_{i'}\rangle = \delta_{i,i'} \ \forall i, i' \in \mathbb{Z}, \quad \operatorname{supp} g_{\langle r\rangle}^{(i)} \subset [x_{i-r+1}, x_{i-r+2}] \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \tag{2.9}$$

Доказательство. Зафиксируем число $i \in \mathbb{Z}$ и используем лемму 3 для фиксированного $r \in \{0, 1\}$, а именно, положим

$$\mathfrak{B} = C^s\langle x_{i-r+1}, x_{i-r+2}\rangle, \quad B = A_{i-r+1}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}_{i-r+1}, \tag{2.10}$$

$$\mathbf{v} = \varphi, \quad l_r = g_{\langle r\rangle}^{(i)}, \quad u_j = \omega_{i-r+j}, \quad j = 0, 1. \tag{2.11}$$

Проверим условия леммы. Матрица $\mathbf{f}\mathbf{v}^\mathbf{T}$ неособенная, ибо, ввиду формул (2.10)–(2.11), $\mathbf{f}\mathbf{v}^\mathbf{T} = \mathbf{f}_{i-r+1}\varphi^T$, а матрица $\mathbf{f}_{i-r+1}\varphi^T$ неособенная по условию теоремы. Условие (2.7) выполнено, т.к., согласно упомянутым формулам и тождеству (1.4), оно представляет собой аппроксимационное соотношение, записанное на промежутке (x_{i-r+1}, x_{i-r+2}):

$$\mathbf{a}_{i-r}\omega_{i-r}(t) + \mathbf{a}_{i-r+1}\omega_{i-r+1}(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in (x_{i-r+1}, x_{i-r+2}) \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Итак, $\langle l_r, u_j\rangle = \delta_{r,j}$, $j = 0, 1$, что благодаря (2.10)–(2.11) может быть переписано в виде $\langle g_{\langle r\rangle}^{(i)}, \omega_{i-r+j}\rangle = \delta_{r,j}$, $j = 0, 1$; делая здесь замену индекса j на j' по формуле $j' = i - r + j$, находим

$$\langle g_{\langle r\rangle}^{(i)}, \omega_{j'}\rangle = \delta_{r,j'-i+r} = \delta_{j',i}, \quad j' \in \{i - r, i - r + 1\}. \tag{2.12}$$

Заметим, что ввиду предположения $r \in \{0,1\}$ число i содержится в множестве $\{i-r, i-r+1\}$, так что среди соотношений (2.12) существует одно (и только одно), правая часть которого равна единице; правые части остальных соотношений – нули.

Осталось рассмотреть случай, когда $j' \notin \{i-r, i-r+1\}$. В этом случае носитель функции $\omega_{j'}$ не пересекается с интервалом (x_{i-r+1}, x_{i-r+2}), и поэтому

$$\langle g^{(i)}_{\langle r\rangle}, \omega_{j'}\rangle = 0 \quad \text{при} \quad j' \notin \{i-r, i-r+1\}. \tag{2.13}$$

Только что установленные соотношения (2.12)–(2.13) доказывают первую из формул (2.9); вторая формула в (2.9) очевидным образом следует из (2.8). □

При $\varphi \in \mathbb{C}^1_X$ рассмотрим матрицу $\mathcal{W}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi(t), \varphi'(t))$ и определитель Вронского $W(t) = \det \mathcal{W}(t)$ $\forall t \in (\alpha,\beta)\backslash X$.

Теорема 4. *Пусть* $\varphi \in \mathbb{C}^1_X$, $A \in \mathcal{A}$, $\langle [\mathbf{f}_i]_i, u\rangle \stackrel{\text{def}}{=} u^{(i)}(x_i+0)$, $i = 0,1$, *и*

$$W(x_i+0) \neq 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \tag{2.14}$$

Тогда при каждом фиксированном $\sigma \in \{0,1\}$ *функционалы* $g_{i\langle\sigma\rangle}$, *определяемые равенствами*

$$g_{i\langle\sigma\rangle} \stackrel{\text{def}}{=} g^{(i)}_{\langle 1-\sigma\rangle}, \tag{2.15}$$

обладают свойством

$$\langle g_{i\langle\sigma\rangle}, \omega_{i'}\rangle = \delta_{i,i'} \quad \forall i, i' \in \mathbb{Z} \tag{2.16}$$

и являются точечными функционалами; при этом

$$\operatorname{supp} g_{i\langle\sigma\rangle} \subset [x_{i+\sigma}, x_{i+\sigma}+\varepsilon] \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{2.17}$$

Доказательство. Проверим условия теоремы 3. В рассматриваемом случае $s=1$; очевидны соотношения $[\mathbf{f}_i]_j \in (\mathbb{C}^1_X)^*$ и $\operatorname{supp}[\mathbf{f}_i]_j \subset [x_i, x_{i+1}]$, $j = 0,1$. Установим, что матрица $\mathbf{f}_i\varphi^T$ неособенная. С учетом условия $\varphi \in \mathbb{C}^1_X$ имеем

$$\mathbf{f}_i\varphi^T = \begin{pmatrix} [\varphi]_0(x_i+0) & [\varphi]_1(x_i+0) \\ [\varphi]'_0(x_i+0) & [\varphi]'_1(x_i+0) \end{pmatrix},$$

откуда выводим $\mathbf{f}_i\varphi^T = [\mathcal{W}(x_i+0)]^T$. Используя предположение (2.14), получаем $\det \mathbf{f}_i\varphi^T \neq 0$. Из (2.9) с учетом обозначения (2.15) находим (2.16) и (2.17). Теорема доказана. □

Рассмотрим важный частный случай полиномиальных сплайнов первой степени, а именно, положим $\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} (1,t)^T$. При $u \in C^1(\alpha,\beta)$ имеем $\langle [f_i]_j, u\rangle = u^{(j)}(x_i+0)$, $j=0,1$, так что

$$\langle [f_i]_0, u\rangle = u(x_i+0), \quad \langle [f_i]_1, u\rangle = u'(x_i+0);$$

таким образом

$$f_i\varphi^T = \begin{pmatrix} 1 & x_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_{i+1}\varphi^T = \begin{pmatrix} 1 & x_{i+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что

$$(f_i\varphi^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (f_{i+1}\varphi^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x_{i+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

Из (2.8) при $r=0$ получаем

$$g^{(i)}_{\langle 0\rangle} \stackrel{\text{def}}{=} \left[A^T_{i+1}\left(\mathbf{f}_{i+1}\varphi^T\right)^{-1}\mathbf{f}_{i+1}\right]_0 \quad \forall i\in\mathbb{Z}, \tag{2.19}$$

а благодаря (2.18) находим

$$\begin{aligned} A^T_{i+1}\left(\mathbf{f}_{i+1}\varphi^T\right)^{-1} &= \begin{pmatrix} [\mathbf{a}_i]_0 & [\mathbf{a}_i]_1 \\ [\mathbf{a}_{i+1}]_0 & [\mathbf{a}_{i+1}]_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -x_{i+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [\mathbf{a}_i]_0 & [\mathbf{a}_i]_1 - x_{i+1}[\mathbf{a}_i]_0 \\ [\mathbf{a}_{i+1}]_0 & [\mathbf{a}_{i+1}]_1 - x_{i+1}[\mathbf{a}_{i+1}]_0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

По формуле (2.19) с помощью (2.20) выводим

$$\begin{aligned} \langle g^{(i)}_{\langle 0\rangle}, u\rangle &= \left\langle \left[\begin{pmatrix} [\mathbf{a}_i]_0 & [\mathbf{a}_i]_1 - x_{i+1}[\mathbf{a}_i]_0 \\ [\mathbf{a}_{i+1}]_0 & [\mathbf{a}_{i+1}]_1 - x_{i+1}[\mathbf{a}_{i+1}]_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} [f_{i+1}]_0 \\ [f_{i+1}]_1 \end{pmatrix}\right]_0, u \right\rangle \\ &= \left[\begin{pmatrix} [\mathbf{a}_i]_0 & [\mathbf{a}_i]_1 - x_{i+1}[\mathbf{a}_i]_0 \\ [\mathbf{a}_{i+1}]_0 & [\mathbf{a}_{i+1}]_1 - x_{i+1}[\mathbf{a}_{i+1}]_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(x_{i+1}+0) \\ u'(x_{i+1}+0) \end{pmatrix}\right]_0. \end{aligned}$$

Итак,

$$\langle g^{(i)}_{\langle 0\rangle}, u\rangle = [\mathbf{a}_i]_0 u(x_{i+1}+0) + ([\mathbf{a}_i]_1 - x_{i+1}[\mathbf{a}_i]_0)u'(x_{i+1}+0). \tag{2.21}$$

Аналогичным образом при $r=1$ из (2.8) получаем

$$g^{(i)}_{\langle 1\rangle} \stackrel{\text{def}}{=} \left[A^T_i\left(\mathbf{f}_i\varphi^T\right)^{-1}\mathbf{f}_i\right]_1 \quad \forall i\in\mathbb{Z}, \tag{2.22}$$

а благодаря (2.18) находим

$$\begin{aligned} A_i^T\Big(\mathbf{f}_i\varphi^T\Big)^{-1} &= \begin{pmatrix}[\mathbf{a}_{i-1}]_0 & [\mathbf{a}_{i-1}]_1\\ [\mathbf{a}_i]_0 & [\mathbf{a}_i]_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -x_i\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}[\mathbf{a}_{i-1}]_0 & [\mathbf{a}_{i-1}]_1 - x_i[\mathbf{a}_{i-1}]_0\\ [\mathbf{a}_i]_0 & [\mathbf{a}_i]_1 - x_i[\mathbf{a}_i]_0\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

По формуле (2.22) с помощью (2.23) находим

$$\langle g^{(i)}_{\langle 1\rangle}, u\rangle = \left\langle \left[\begin{pmatrix}[\mathbf{a}_{i-1}]_0 & [\mathbf{a}_{i-1}]_1 - x_i[\mathbf{a}_{i-1}]_0\\ [\mathbf{a}_i]_0 & [\mathbf{a}_i]_1 - x_i[\mathbf{a}_i]_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}[f_i]_0\\ [f_i]_1\end{pmatrix}\right]_1, u\right\rangle$$

$$= \left[\begin{pmatrix}[\mathbf{a}_{i-1}]_0 & [\mathbf{a}_{i-1}]_1 - x_i[\mathbf{a}_{i-1}]_0\\ [\mathbf{a}_i]_0 & [\mathbf{a}_i]_1 - x_i[\mathbf{a}_i]_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u(x_i+0)\\ u'(x_i+0)\end{pmatrix}\right]_1.$$

Итак,

$$\langle g^{(i)}_{\langle 1\rangle}, u\rangle = [\mathbf{a}_i]_0 u(x_i+0) + ([\mathbf{a}_i]_1 - x_i[\mathbf{a}_i]_0)u'(x_i+0). \tag{2.24}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *В случае, когда* $\varphi(t) = (1,t)^T$, *системы точечных функционалов* $\{g^{(i)}_{\langle 0\rangle}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *и* $\{g^{(i)}_{\langle 1\rangle}\}_{i\in\mathbb{Z}}$, *определяемые формулами* (2.21) *и* (2.24) *соответственно, являются различными продолжениями системы функционалов, биортогональной системе сплайнов* $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$*:*

$$\langle g^{(i)}_{\langle 0\rangle}, \omega_j\rangle = \delta_{i,j}, \qquad \operatorname{supp} g^{(i)}_{\langle 0\rangle} \subset [x_{i+1}, x_{i+1}+\varepsilon],$$

$$\langle g^{(i)}_{\langle 1\rangle}, \omega_j\rangle = \delta_{i,j}, \qquad \operatorname{supp} g^{(i)}_{\langle 1\rangle} \subset [x_i, x_i+\varepsilon],$$

где ε *– произвольное положительное число.*

Доказательство. Это утверждение следует из формул (2.21) и (2.24). □

Следствие 2. *Система функционалов* g_i^*, *определяемая соотношением* $\langle g_i^*, u\rangle \stackrel{\text{def}}{=} u(x_{i+1})\ \forall u \in C(\alpha,\beta)$, *биортогональна системе функций* $\{\omega_j^*\}$ *и обладает свойством*

$$\langle g_i^*, \varphi\rangle = \varphi_{i+1}. \tag{2.25}$$

Доказательство. Биортогональность следует из соотношения (1.8), а формула (2.25) вытекает из определения функционала g_i^*. □

§3. Укрупнение сетки и калибровочные соотношения

Здесь рассмотрим условия вложенности пространства сплайнов на укрупненной сетке в аналогичное пространство сплайнов на исходной сетке.

Для фиксированного $k \in \mathbb{Z}$ положим

$$\widetilde{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} x_j \quad \text{при} \quad j \leqslant k \quad \text{и} \quad \widetilde{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} x_{j+1} \quad \text{при} \quad j \geqslant k+1, \qquad \xi \stackrel{\text{def}}{=} x_{k+1},$$

и рассмотрим новую сетку

$$X_{\{k+1\}}: \qquad \dots < \widetilde{x}_{-1} < \widetilde{x}_0 < \widetilde{x}_1 < \dots . \tag{3.1}$$

Обозначим $\widetilde{G} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} (\widetilde{x}_j, \widetilde{x}_{j+1})$, $\widetilde{S}_j \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{x}_j, \widetilde{x}_{j+1}) \cup (\widetilde{x}_{j+1}, \widetilde{x}_{j+2})$. Пусть $\widetilde{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\widetilde{\mathbf{a}}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ – полная цепочка двумерных векторов, а вектор-функция $\varphi(t)$ определена на множестве $\widetilde{G}$. Как и прежде, из аппроксимационных соотношений

$$\sum_{j'\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbf{a}}_{j'} \widetilde{\omega}_{j'}(t) = \varphi(t), \quad \widetilde{\omega}_j(t) \equiv 0 \quad \forall t \in \widetilde{G} \backslash \widetilde{S}_j, \tag{3.2}$$

определим функции $\widetilde{\omega}_j(t)$:

$$\widetilde{\omega}_j(t) = \begin{cases} \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{j-1}, \varphi(t))}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{j-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_j)} & \text{при} \quad t \in (\widetilde{x}_j, \widetilde{x}_{j+1}), \\ \frac{\det(\varphi(t), \widetilde{\mathbf{a}}_{j+1})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_j, \widetilde{\mathbf{a}}_{j+1})} & \text{при} \quad t \in (\widetilde{x}_{j+1}, \widetilde{x}_{j+2}), \\ 0 & \text{при} \quad \forall t \in \widetilde{G} \backslash \widetilde{S}_j. \end{cases}$$

Линейная оболочка $\mathbb{S}(X_{\{k+1\}}, \widetilde{A}, \varphi)$ функций $\{\widetilde{\omega}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ является пространством сплайнов первого порядка,

$$\widetilde{\mathbb{S}}_{k+1} = \mathbb{S}(X_{\{k+1\}}, \widetilde{A}, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p \, \mathcal{L}\{\widetilde{\omega}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}.$$

Предположим, что выполнено следующее условие.

(B) Справедливы тождества

$$\mathbf{a}_j \omega_j(t) \equiv \widetilde{\mathbf{a}}_j \widetilde{\omega}_j(t) \quad \forall t \in (\alpha, \beta), \quad j \leqslant k-2, \tag{3.3}$$

$$\mathbf{a}_{j+1} \omega_{j+1}(t) \equiv \widetilde{\mathbf{a}}_j \widetilde{\omega}_j(t) \quad \forall t \in (\alpha, \beta), \quad j \geqslant k+1. \tag{3.4}$$

Теорема 6. *Если выполнено условие* (B), *то пространство* $\mathbb{S}(X_{\{k+1\}}, \widetilde{A}, \varphi)$ *содержится в пространтве* $\mathbb{S}(X, A, \varphi)$.

Доказательство. Из соотношений (1.3) – (1.4) и (3.2) находим

$$\sum_{j'\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbf{a}}_{j'}\widetilde{\omega}_{j'}(t) \equiv \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{a}_j\omega_j(t) \quad \forall t\in(\alpha,\beta)\backslash X,$$

откуда после сокращения одинаковых (в силу предположения (B)) слагаемых выводим

$$\sum_{j'=k-1,k} \widetilde{\mathbf{a}}_{j'}\widetilde{\omega}_{j'}(t) \equiv \sum_{j=k-1,k,k+1} \mathbf{a}_j\omega_j(t) \quad \forall t\in(\alpha,\beta)\backslash X. \tag{3.5}$$

Ввиду полноты системы векторов $\{\widetilde{\mathbf{a}}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ отсюда получаем представление функций $\widetilde{\omega}_{k-1}(t)$ и $\widetilde{\omega}_k(t)$ в виде линейной комбинации функций $\omega_{k-1}(t)$, $\omega_k(t)$, $\omega_{k+1}(t)$. □

Теорема 7. *При условии* (B) *справедливы калибровочные соотношения*

$$\widetilde{\omega}_{k-1}(t) = \mathfrak{p}_{k-1,k-1}\omega_{k-1}(t) + \mathfrak{p}_{k-1,k}\omega_k(t), \tag{3.6}$$

$$\widetilde{\omega}_k(t) = \mathfrak{p}_{k,k}\omega_k(t) + \mathfrak{p}_{k,k+1}\omega_{k+1}(t) \qquad \forall t\in(\alpha,\beta)\backslash X, \tag{3.7}$$

где

$$\mathfrak{p}_{k-1,j} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\det(\mathbf{a}_j,\,\widetilde{\mathbf{a}}_k)}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{k-1},\,\widetilde{\mathbf{a}}_k)} \quad \textit{при} \quad j=k-1,k,$$

$$\mathfrak{p}_{k,j} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{k-1},\mathbf{a}_j)}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{k-1},\,\widetilde{\mathbf{a}}_k)} \quad \textit{при} \quad j=k,k+1.$$

Доказательство. По теореме Крамера, из системы уравнений (3.5), рассматриваемой относительно неизвестных $\widetilde{\omega}_{k-1}$ и $\widetilde{\omega}_k$, имеем

$$\widetilde{\omega}_{k-1} = \mathfrak{p}_{k-1,k-1}\omega_{k-1} + \mathfrak{p}_{k-1,k}\omega_k + \mathfrak{p}_{k-1,k+1}\omega_{k+1}, \tag{3.8}$$

$$\widetilde{\omega}_k = \mathfrak{p}_{k,k-1}\omega_{k-1} + \mathfrak{p}_{k,k}\omega_k + \mathfrak{p}_{k,k+1}\omega_{k+1}, \tag{3.9}$$

где $\mathfrak{p}_{k-1,j} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\det(\mathbf{a}_j,\,\widetilde{\mathbf{a}}_k)}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{k-1},\,\widetilde{\mathbf{a}}_k)}$, $\mathfrak{p}_{k,j} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\det(\mathbf{a}_j,\,\widetilde{\mathbf{a}}_{k-1})}{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{k-1},\,\widetilde{\mathbf{a}}_k)}$, $j=k-1,k,k+1$.

Ввиду предположенной линейной независимости функций $[\varphi]_0(t)$, $[\varphi]_1(t)$ на любом подинтервале интервала (α,β) вектор-функция $\varphi(t)$ не может быть тождественным нулем ни на каком подобном подинтервале; поэтому в рассматриваемых условиях справедливы равенства

$$\det(\mathbf{a}_{k+1},\,\widetilde{\mathbf{a}}_k)=0, \quad \det(\mathbf{a}_{k-1},\,\widetilde{\mathbf{a}}_{k-1})=0, \tag{3.10}$$

ибо в противном случае носитель правой части хотя бы одного из соотношений (3.8)–(3.9) оказался бы шире носителя функции в левой части, что невозможно. □

Следствие 3. *При выполнении условия* (B) *справедливы соотношения*

$$\mathbf{a}_{k-1} = \widetilde{c}_{k-1}\widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}, \quad \mathbf{a}_{k+1} = \widetilde{c}_{k+1}\widetilde{\mathbf{a}}_{k}, \tag{3.11}$$

где $\widetilde{c}_{k-1}$ *и* $\widetilde{c}_{k+1}$ *– некоторые отличные от нуля константы.*

Доказательство. Доказательство легко получается, если принять во внимание установленные выше соотношения (3.10) и полноту цепочек A и $\widetilde{A}$. □

Введем условие

(B′) С ненулевыми константами $\widetilde{c}_j$ справедливы соотношения

$$\widetilde{c}_j\omega_j(t) \equiv \widetilde{\omega}_j(t), \qquad \mathbf{a}_j = \widetilde{c}_j\widetilde{\mathbf{a}}_j \qquad \forall t \in (\alpha, \beta), \quad j \leqslant k-2, \tag{3.12}$$

$$\widetilde{c}_{j+1}\omega_{j+1}(t) \equiv \widetilde{\omega}_j(t), \quad \mathbf{a}_{j+1} = \widetilde{c}_{j+1}\widetilde{\mathbf{a}}_j \quad \forall t \in (\alpha, \beta), \quad j \geqslant k+1. \tag{3.13}$$

Теорема 8. *Условия* (B) *и* (B′) *эквивалентны.*

Доказательство. Совершенно очевидно, что из условия (B′) следует условие (B). Покажем теперь, что из условия (B) вытекает условие (B′). Рассмотрим сначала соотношения (3.3). Найдем точку $t_0 \in (\alpha, \beta)$, в которой функция ω_j отлична от нуля, и положим $\widetilde{c}_j \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\omega}_j(t_0)/\omega_j(t_0)$. Из (3.3) следует, что $\mathbf{a}_j = \widetilde{c}_j\widetilde{\mathbf{a}}_j$; снова используя (3.3), теперь имеем $\widetilde{c}_j\widetilde{\mathbf{a}}_j\omega_j(t) \equiv \widetilde{\mathbf{a}}_j\widetilde{\omega}_j(t)$, так что $\omega_j(t) \equiv \widetilde{\omega}_j(t)/\widetilde{c}_j$, что и требовалось. Итак, эквивалентность (3.3) и (3.12) установлена.

Эквивалентность (3.4) и (3.13) устанавливается аналогично. □

Теорема 9. *Для выполнения условия* (B) *необходимо и достаточно, чтобы с некоторыми ненулевыми константами* $\widetilde{c}_j$, $j \in \mathbb{Z}$, *были верны соотношения*

$$\mathbf{a}_j = \widetilde{c}_j\widetilde{\mathbf{a}}_j \qquad \text{при} \quad j \leqslant k-1, \tag{3.14}$$

$$\mathbf{a}_{j+1} = \widetilde{c}_{j+1}\widetilde{\mathbf{a}}_j \quad \text{при} \quad j \geqslant k. \tag{3.15}$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть $j \leqslant k-2$. В этом случае $(x_j, x_{j+1}) = (\widetilde{x}_j, \widetilde{x}_{j+1})$, $(x_{j+1}, x_{j+2}) = (\widetilde{x}_{j+1}, \widetilde{x}_{j+2})$; по определению функции $\omega_j(t)$ при $t \in (x_j, x_{j+1})$ имеем

$$\omega_j(t) = \frac{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j)} = \frac{\det(\widetilde{c}_{j-1}\widetilde{\mathbf{a}}_{j-1}, \varphi(t))}{\det(\widetilde{c}_{j-1}\widetilde{\mathbf{a}}_{j-1}, \widetilde{c}_j\widetilde{\mathbf{a}}_j)} = \widetilde{\omega}_j(t)/\widetilde{c}_j,$$

а при $t \in (x_{j+1}, x_{j+2})$ получаем

$$\omega_j(t) = \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}_{j+1})}{\det(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1})} = \frac{\det(\varphi(t), \widetilde{c}_{j+1}\widetilde{\mathbf{a}}_{j+1})}{\det(\widetilde{c}_j\widetilde{\mathbf{a}}_j, \widetilde{c}_{j+1}\widetilde{\mathbf{a}}_{j+1})} = \widetilde{\omega}_j(t)/\widetilde{c}_j.$$

Таким образом, справедливы соотношения (3.12).

Теперь рассмотрим ситуацию, когда $j \geqslant k+1$; здесь требуется установить первое из соотношений (3.13). В этом случае $(x_{j+1}, x_{j+2}) = (\widetilde{x}_j, \widetilde{x}_{j+1})$, $(x_{j+2}, x_{j+3}) = (\widetilde{x}_{j+1}, \widetilde{x}_{j+2})$. По определению функции $\omega_j(t)$ при $t \in (x_{j+1}, x_{j+2})$ имеем

$$\omega_{j+1}(t) = \frac{\det(\mathbf{a}_j, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1})} = \frac{\det(\widetilde{c}_j \widetilde{\mathbf{a}}_{j-1}, \varphi(t))}{\det(\widetilde{c}_j \widetilde{\mathbf{a}}_{j-1}, \widetilde{c}_{j+1} \widetilde{\mathbf{a}}_j)} = \widetilde{\omega}_j(t)/\widetilde{c}_{j+1},$$

а при $t \in (x_{j+2}, x_{j+3})$ получаем

$$\omega_{j+1}(t) = \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}_{j+2})}{\det(\mathbf{a}_{j+1}, \mathbf{a}_{j+2})} = \frac{\det(\varphi(t), \widetilde{c}_{j+2} \widetilde{\mathbf{a}}_{j+1})}{\det(\widetilde{c}_{j+1} \widetilde{\mathbf{a}}_j, \widetilde{c}_{j+2} \widetilde{\mathbf{a}}_{j+1})} = \widetilde{\omega}_j(t)/\widetilde{c}_{j+1}.$$

Справедливость соотношений (3.13) доказана.

Необходимость. Если выполнено условие (B), то, согласно следствию 3 и теореме 9, справедливы соотношения (3.11)–(3.13), так что равенства (3.14)–(3.15) выполнены.

Теорема доказана. □

Зафиксируем цепочку $\widetilde{A} \in \mathcal{A}$ и рассмотрим цепочку A в зависимости от вектора $\mathbf{a}_k = \mathbf{a}$, так что $A = A(\mathbf{a})$. При $A(\mathbf{a}) \in \mathcal{A}$ положим $\mathbb{S}(\mathbf{a}) \overset{\text{def}}{=} (X, A(\mathbf{a}), \varphi)$.

Следствие 4. *Если выполнены соотношения* (3.14)–(3.15) *и* $\widetilde{A}$, $A(\mathbf{a}) \in \mathcal{A}$, *то* $\widetilde{\mathbb{S}}_{k+1} \subset \mathbb{S}(\mathbf{a})$.

Введем вектор-функции (столбцы)

$$\omega(t) \overset{\text{def}}{=} (\ldots, \omega_{-1}(t), \omega_0(t), \omega_1(t), \ldots)^T,$$

$$\widetilde{\omega}(t) \overset{\text{def}}{=} (\ldots, \widetilde{\omega}_{-1}(t), \widetilde{\omega}_0(t), \widetilde{\omega}_1(t), \ldots)^T.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 10. *При условии* (B) *справедливо соотношение*

$$\widetilde{\omega}(t) = \mathfrak{P}_{(k+1)} \omega(t), \tag{3.16}$$

где $\mathfrak{P}_{(k+1)} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{p}_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ *– бесконечная матрица с элементами* $\mathfrak{p}_{i,j}$, *определяемыми равенствами*

$$\mathfrak{p}_{i,j} = \widetilde{c}_i \delta_{i,j} \qquad \text{при} \quad i \leqslant k-2, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{3.17}$$

$$\mathfrak{p}_{i,j} = \widetilde{c}_{i+1} \delta_{i+1,j} \qquad \text{при} \quad i \geqslant k+1, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{3.18}$$

$$\mathfrak{p}_{k-1,j} = 0 \qquad \text{при} \quad j \in \mathbb{Z}\backslash\{k-1,k\}, \tag{3.19}$$

$$\mathfrak{p}_{k-1,k-1} = \widetilde{c}_{k-1}, \qquad \mathfrak{p}_{k-1,k} = \widetilde{c}_{k-1} \frac{\det(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1})}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \quad \mathbf{a}_{k+1})}, \tag{3.20}$$

$$\mathfrak{p}_{k,j} = 0 \qquad \text{при} \quad j \in \mathbb{Z}\backslash\{k,k+1\}, \tag{3.21}$$

$$\mathfrak{p}_{k,k} = \widetilde{c}_{k+1} \frac{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k)}{\det(\mathbf{a}_{k-1},\ \mathbf{a}_{k+1})}, \qquad \mathfrak{p}_{k,k+1} = \widetilde{c}_{k+1}. \tag{3.22}$$

Доказательство. Соотношение (3.17) является следствием формулы (3.12), а (3.18) получается из тождества (3.13). Из формул (3.6)–(3.7) и (3.11) очевидным образом выводим соотношения (3.19) и (3.20), а также соотношения (3.21)–(3.22). Ввиду предположения (B) и предположения о полноте цепочки $\{\widetilde{\mathbf{a}}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ (см. выше формулы (3.14)–(3.15)) определитель $\det(\mathbf{a}_{k-1},\ \mathbf{a}_{k+1})$ отличен от нуля. □

Матрицу $\mathfrak{P}_{(k+1)}$ называем *матрицей вложения.*

§4. Некоторые свойства биортогональной системы

Пусть система функционалов $\{\widetilde{g}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\widetilde{g}_i \in (\mathbb{C}_X)^*$, с компактными носителями на (α,β) биортогональна системе функций $\{\widetilde{\omega}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, так что

$$\langle \widetilde{g}_i, \widetilde{\omega}_j \rangle = \delta_{i,j} \quad \forall i,j \in \mathbb{Z}. \tag{4.1}$$

Согласно пункту 2) теоремы 2 имеем

$$\langle \widetilde{g}_i, \varphi \rangle = \mathbf{a}_i \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \tag{4.2}$$

Лемма 4. *Пусть выполнено условие* (B$'$). *Тогда справедливы соотношения*

$$\langle \widetilde{g}_i, \omega_s \rangle = \delta_{i,s}/\widetilde{c}_s \quad \text{при} \qquad s \leqslant k-2, \quad i \in \mathbb{Z}, \tag{4.3}$$

$$\langle \widetilde{g}_i, \omega_{s+1} \rangle = \delta_{i,s}/\widetilde{c}_{s+1} \quad \text{при} \qquad s \geqslant k+1, \quad i \in \mathbb{Z}. \tag{4.4}$$

Доказательство. Используя формулы (3.12)–(3.13), имеем

$$\langle \widetilde{g}_i, \omega_s \rangle = \langle \widetilde{g}_i, \widetilde{\omega}_s \rangle/\widetilde{c}_s \quad \text{при} \quad s \leqslant k-2, \quad i \in \mathbb{Z},$$

откуда, учитывая свойство биортогональности, получаем соотношение (4.3). Для $s \geqslant k+1$ находим

$$\langle \widetilde{g}_i, \omega_{s+1} \rangle = \langle \widetilde{g}_i, \widetilde{\omega}_s \rangle / \widetilde{c}_{s+1} \quad \text{при} \quad s \geqslant k+1, \quad i \in \mathbb{Z},$$

что доказывает соотношение (4.4). □

Лемма 5. *Пусть*

$$\operatorname{supp} \widetilde{g}_i \subset [\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_i + \varepsilon] \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \tag{4.5}$$

Тогда

$$\langle \widetilde{g}_i, \omega_{k-1} \rangle = 0 \qquad \textit{при} \quad i \leqslant k-2, \tag{4.6}$$

$$\langle \widetilde{g}_{k-1}, \omega_{k-1} \rangle = 1/\widetilde{c}_{k-1}, \tag{4.7}$$

$$\langle \widetilde{g}_k, \omega_{k-1} \rangle = \frac{1}{\widetilde{c}_{k+1}} \frac{\det(\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{a}_k)}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k)}, \tag{4.8}$$

$$\langle \widetilde{g}_i, \omega_{k-1} \rangle = 0 \qquad \textit{при} \quad i \geqslant k+1. \tag{4.9}$$

Доказательство. Учитывая расположение носителя функционала $\widetilde{g}_i$ (см. (4.5)) и функции ω_{k-1}, легко получаем равенства (4.6) и (4.9). Применим $\widetilde{g}_{k-1}$ к обеим частям соотношения (1.3), записанного для $i = k-1$; заметим, что согласно условию

$$\operatorname{supp} \widetilde{g}_{k-1} \subset [\widetilde{x}_{k-1}, \widetilde{x}_{k-1} + \varepsilon] \quad \forall \varepsilon > 0.$$

В результате получаем

$$\mathbf{a}_{k-2} \langle \widetilde{g}_{k-1}, \omega_{k-2} \rangle + \mathbf{a}_{k-1} \langle \widetilde{g}_{k-1}, \omega_{k-1} \rangle = \langle \widetilde{g}_{k-1}, \varphi \rangle;$$

отсюда, имея ввиду (4.2), по теореме Крамера выводим соотношение

$$\langle \widetilde{g}_{k-1}, \omega_{k-1} \rangle = \frac{\det(\mathbf{a}_{k-2}, \widetilde{\mathbf{a}}_{k-1})}{\det(\mathbf{a}_{k-2}, \mathbf{a}_{k-1})};$$

используя здесь (3.11), получаем (4.7). Аналогичным образом, к соотношению (1.3), записанному для $i = k$, применим функционал $\widetilde{g}_k$ (по условию $\operatorname{supp} \widetilde{g}_k \subset [\widetilde{x}_k, \widetilde{x}_k + \varepsilon] \quad \forall \varepsilon > 0$):

$$\mathbf{a}_{k-1} \langle \widetilde{g}_k, \omega_{k-1} \rangle + \mathbf{a}_k \langle \widetilde{g}_k, \omega_k \rangle = \langle \widetilde{g}_k, \varphi \rangle; \tag{4.10}$$

отсюда согласно формулам (4.2) получаем соотношение

$$\langle \widetilde{g}_k, \omega_{k-1} \rangle = \frac{\det(\widetilde{\mathbf{a}}_k, \mathbf{a}_k)}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k)}.$$

Для вывода формулы (4.8) осталось воспользоваться равенствами (3.11). □

Лемма 6. *Пусть выполнено предположение* (4.5). *Тогда*

$$\langle \widetilde{g}_i, \omega_k \rangle = 0 \qquad \textit{при} \quad i \leqslant k-1, \tag{4.11}$$

$$\langle \widetilde{g}_k, \omega_k \rangle = \frac{1}{\widetilde{c}_{k+1}} \frac{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1})}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k)}, \tag{4.12}$$

$$\langle \widetilde{g}_i, \omega_k \rangle = 0 \qquad \textit{при} \quad i \geqslant k+1. \tag{4.13}$$

Доказательство. Так же, как при доказательстве предыдущей леммы, воспользуемся информацией о расположении носителя функционала $\widetilde{g}_i$ и функции ω_k; в результате получаем соотношения (4.11) и (4.13). Формула (4.12) устанавливается отысканием неизвестного $\langle \widetilde{g}_k, \omega_k \rangle$ из системы (4.10) и использованием формул (4.2) и (3.11). □

Лемма 7. *В условиях* (4.5) *верны соотношения*

$$\langle \widetilde{g}_i, \omega_{k+1} \rangle = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \tag{4.14}$$

Доказательство. Учитывая расположение носителей функционала $\widetilde{g}_i$ и функции ω_{k+1}, видим, что

$$\langle \widetilde{g}_i, \omega_{k+1} \rangle = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z} \backslash \{k, k+1\}.$$

Обратимся к случаям $i \in \{k, k+1\}$. Сначала рассмотрим действие функционала $\widetilde{g}_k$ на функцию ω_{k+1}. По условию $\operatorname{supp} \widetilde{g}_k \subset (\widetilde{x}_k, \widetilde{x}_k + \varepsilon)$ $\forall \varepsilon > 0$, так что $\operatorname{supp} \widetilde{g}_k \subset (x_k, x_{k+1})$; теперь ясно, что $\langle \widetilde{g}_k, \omega_{k+1} \rangle = 0$. При $i = k+1$ согласно предположению (4.5) имеем $\operatorname{supp} \widetilde{g}_{k+1} \subset (\widetilde{x}_{k+1}, \widetilde{x}_{k+2}) = (x_{k+2}, x_{k+3})$, так что следует рассмотреть соотношение (1.3) при $i = k+2$ и применить к нему функционал $\widetilde{g}_{k+1}$:

$$\mathbf{a}_{k+1} \langle \widetilde{g}_{k+1}, \omega_{k+1} \rangle + \mathbf{a}_{k+2} \langle \widetilde{g}_{k+1}, \omega_{k+2} \rangle = \langle \widetilde{g}_{k+1}, \varphi \rangle; \tag{4.15}$$

отсюда имеем $\langle \widetilde{g}_{k+1}, \omega_{k+1} \rangle = \det(\widetilde{\mathbf{a}}_{k+1}, \mathbf{a}_{k+2}) / \det(\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{a}_{k+2})$. Ввиду соотношений (3.13) векторы $\widetilde{\mathbf{a}}_{k+1}$ и $\mathbf{a}_{k+2}$ коллинеарны, и потому $\langle \widetilde{g}_{k+1}, \omega_{k+2} \rangle = 0$.

Лемма доказана. □

Замечание 4.1. Для построения функционалов $\widetilde{g}_i$ со свойством (4.5) достаточно воспользоваться теоремой 4, заменяя в ней X на $\widetilde{X}$ и полагая $\widetilde{g}_i \stackrel{\text{def}}{=} g_{i\langle 0 \rangle}$.

Введем обозначения $\mathfrak{q}_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \widetilde{g}_i, \omega_j \rangle$, $\mathfrak{Q}_{(k+1)} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{q}_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$. Матрица $\mathfrak{Q}_{(k+1)}$ называется *матрицей продолжения.*

Теорема 11. *Справедливы соотношения*

$$\mathfrak{q}_{i,j} = \delta_{i,j}/\widetilde{c}_j \qquad \textit{при} \quad j \leqslant k-1 \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \tag{4.16}$$

$$\mathfrak{q}_{k,j} = 0 \qquad \forall i \in \mathbb{Z}\backslash\{k-1,k\}, \tag{4.17}$$

$$\mathfrak{q}_{k,k-1} = \frac{1}{\widetilde{c}_{k+1}} \frac{\det(\mathbf{a}_{k+1},\mathbf{a}_k)}{\det(\mathbf{a}_{k-1},\mathbf{a}_k)}, \tag{4.18}$$

$$\mathfrak{q}_{k,k} = \frac{1}{\widetilde{c}_{k+1}} \frac{\det(\mathbf{a}_{k-1},\mathbf{a}_{k+1})}{\det(\mathbf{a}_{k-1},\mathbf{a}_k)}, \tag{4.19}$$

$$\mathfrak{q}_{i,k+1} = 0 \qquad \forall i \in \mathbb{Z}, \tag{4.20}$$

$$\mathfrak{q}_{i,j} = \delta_{i+1,j}/\widetilde{c}_j \qquad \textit{при} \quad j \geqslant k+2 \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \tag{4.21}$$

Доказательство. Формулы (4.16)–(4.21) непосредственно вытекают из лемм 4–7, доказанных выше. □

Теорема 12. *Матрица* $\mathfrak{Q}_{(k+1)}$ *является левой обратной к матрице* $\mathfrak{P}^T_{(k+1)}$

$$\mathfrak{Q}_{(k+1)}\mathfrak{P}^T_{(k+1)} = \mathfrak{I}, \tag{4.22}$$

где $\mathfrak{I}$ *– единичная матрица.*

Доказательство. Транспонируем (3.16) и к результату применим одностолбцовую матрицу $\widetilde{g}$, элементами которой являются функционалы $\widetilde{g}_i$, $\widetilde{g} \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots,\widetilde{g}_{-1},\widetilde{g}_0,\widetilde{g}_1,\ldots)^T$:

$$\widetilde{g}\widetilde{\omega}^T = \widetilde{g}\omega^T\mathfrak{P}^T_{(k+1)}.$$

С учетом свойства биортогональности систем $\{g_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ и $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ получаем соотношение (4.22). □

§5. Вэйвлетное разложение

Предположим, что верно включение $\widetilde{\mathbb{S}}_k \subset \mathbb{S}$. Рассмотрим оператор $P_{(k+1)}$ проектирования пространства $\mathbb{S}$ на подпространство $\widetilde{\mathbb{S}}_{k+1}$, определяемый соотношением

$$P_{(k+1)}u \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j \langle\widetilde{g}_j,u\rangle\,\widetilde{\omega}_j \qquad \forall u \in \mathbb{S}, \tag{5.1}$$

и введем оператор $Q_{(k+1)} = I - P_{(k+1)}$, где I – тождественный оператор в $\mathbb{S}$.

Пространством вэйвлетов (всплесков) называется пространство $\mathbb{W}_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} Q_{(k+1)}\mathbb{S}$. Итак, получаем прямое разложение

$$\mathbb{S} = \widetilde{\mathbb{S}}_{k+1} \dot{+} \mathbb{W}_{k+1} \tag{5.2}$$

– *сплайн-вейвлетное разложение* пространства $\mathbb{S}$.

Рассматривая два представления элемента $u \in \mathbb{S}$

$$u = \sum_j c_j \omega_j, \quad u = \sum_j a_i \widetilde{\omega}_i + \sum_j b_j \omega_j,$$

так же, как и в [5], получаем *формулу реконструкции*:

$$c = \mathfrak{P}^T_{(k+1)} a + b, \tag{5.3}$$

где

$$a \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots)^T,$$
$$b \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, b_{-1}, b_0, b_1, \ldots)^T,$$
$$c \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, c_{-1}, c_0, c_1, \ldots)^T.$$

Применяя к ней матрицу $\mathfrak{Q}_{(k+1)}$ и используя свойство (4.22), приходим к *формулам декомпозиции*:

$$a = \mathfrak{Q}_{(k+1)} c, \quad b = c - \mathfrak{P}^T_{(k+1)} \mathfrak{Q}_{(k+1)} c. \tag{5.4}$$

Теорема 13. *Для вэйвлетного разложения* (5.2) *формулы реконструкции имеют вид*

$$c_j = \widetilde{c}_j a_j + b_j \qquad \textit{при} \quad j \leqslant k-1, \tag{5.5}$$

$$c_k = \widetilde{c}_{k-1} \frac{\det(\mathbf{a}_k,\ \mathbf{a}_{k+1})}{\det(\mathbf{a}_{k-1},\ \mathbf{a}_{k+1})} a_{k-1} + \widetilde{c}_{k+1} \frac{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k)}{\det(\mathbf{a}_{k-1},\ \mathbf{a}_{k+1})} a_k + b_k, \tag{5.6}$$

$$c_j = \widetilde{c}_j a_{j-1} + b_j \qquad \textit{при} \quad j \geqslant k+1. \tag{5.7}$$

Доказательство. Применяя формулы (3.17)–(3.22) в покомпонентном представлении соотношения (5.3), приходим к формулам (5.5)–(5.7). □

Лемма 8. *Для элементов* $[\mathfrak{P}^T_{(k+1)} \mathfrak{Q}_{(k+1)}]_{i,j}$ *матрицы* $\mathfrak{P}^T_{(k+1)} \mathfrak{Q}_{(k+1)}$ *справедливы соотношения*

$$[\mathfrak{P}^T_{(k+1)} \mathfrak{Q}_{(k+1)}]_{k+1,k-1} = \frac{\det(\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{a}_k)}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k)},$$

$$[\mathfrak{P}^T_{(k+1)} \mathfrak{Q}_{(k+1)}]_{k+1,k} = \frac{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1})}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k)},$$

$$[\mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}]_{k+1,k+1} = 0, \quad [\mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}]_{i,j} = 0 \quad \textit{при} \quad i \neq j,$$
$$[\mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}]_{i,i} = 1 \qquad\qquad \textit{при} \quad i \neq k+1.$$

Доказательство. Поскольку $[\mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}]_{i,j}$ – элемент произведения $\mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}$, полученный при "умножении" i-й строки матрицы $\mathfrak{P}^T_{(k+1)}$ на j-й столбец матрицы $\mathfrak{Q}_{(k+1)}$, то

$$[\mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}]_{i,j} = \delta_{i,j} \quad \text{при} \quad i \in \mathbb{Z}\backslash\{k, k+1\}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Для элементов k-й строки упомянутой матрицы имеем

$$[\mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}]_{k,j} = 0 \quad \text{при} \quad j \in \mathbb{Z}\backslash\{k-1, k\};$$

очевидно также, что

$$[\mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}]_{k,k-1} = \mathfrak{p}_{k-1,k}/\widetilde{c}_{k-1} + \mathfrak{p}_{k,k}\mathfrak{q}_{k,k-1}.$$

Используя здесь формулы (3.20), (3.22) и (4.18), видим, что

$$[\mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}]_{k,k-1} = 0.$$

Теперь находим $[\mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}]_{k,k} = \mathfrak{p}_{k,k}\mathfrak{q}_{k,k-1}$; благодаря соотношениям (3.22) и (4.19) отсюда получаем $[\mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}]_{k,k} = 1$. Обращаясь к $(k+1)$-й строке матрицы $\mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}$, видим, что

$$[\mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}]_{k+1,j} = 0 \quad \text{при} \quad j \in \mathbb{Z}\backslash\{k-1, k\}.$$

Итак, третья, четвертая и пятая формулы доказываемой леммы установлены. Первая и вторая формулы следуют из соотношений (4.18) и (4.19). Лемма доказана. □

Теорема 14. *Для вэйвлетного разложения* (5.2) *формулы декомпозиции могут быть записаны в виде*

$$a_j = c_j/\widetilde{c}_j \qquad \textit{при} \quad j \leqslant k-1,$$
$$a_k = \frac{1}{\widetilde{c}_{k+1}}\left(\det(\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{a}_k)c_{k-1} + \det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1})c_k\right)\Big/\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k),$$
$$a_j = c_{j+1}/\widetilde{c}_{j+1} \quad \textit{при} \quad j \geqslant k+1,$$
$$b_j = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}\backslash\{k+1\},$$
$$b_{k+1} = c_{k+1} - \frac{\det(\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{a}_k)}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k)}c_{k-1} - \frac{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1})}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k)}c_k.$$

Доказательство. Утверждение теоремы очевидным образом следует из формул (5.4) и леммы 8. $\square$

§6. Операторы декомпозиции и реконструкции

Рассмотрим пространство $\mathcal{F}$ всех числовых последовательностей, представленных вектор-столбцами, $f \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, f_{-1}, f_0, f_1, \ldots)^T$, и линейный оператор, определяемый матрицей $\mathfrak{Q}_{(k+1)}$ в $\mathcal{F}$ (это определение корректно, ибо упомянутая матрица имеет конечное число ненулевых элементов в каждой строке). Ядро этого оператора представляет собой линейное пространство; обозначим его $\mathcal{B}_{(k+1)} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{b} \mid \mathbf{b} = (\ldots, b_{-1}, b_0, b_1, \ldots)^T,\ \mathfrak{Q}_{(k+1)}\mathbf{b} = 0\}$, т.е. $\mathcal{B}_{(k+1)} = \ker \mathfrak{Q}_{(k+1)}$, так что $\mathfrak{Q}_{(k+1)}\mathbf{b} = 0 \quad$ при $\mathbf{b} \in \mathcal{B}_{(k+1)}$.

Теорема 15. *Множество вэйвлетных составляющих совпадает с пространством* $\mathcal{B}_{(k+1)}$.

Доказательство. Ко второму из соотношений (5.4) применим матрицу $\mathfrak{Q}_{(k+1)}$ и воспользуемся теоремой 12: ввиду формулы (4.22) получаем $\mathfrak{Q}_{(k+1)}\mathbf{b} = \mathfrak{Q}_{(k+1)}\mathbf{c} - \mathfrak{Q}_{(k+1)}\mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}_{(k+1)}\mathbf{c} = 0$. Итак, вектор $\mathbf{b}$ содержится в ядре $\ker \mathfrak{Q}_{(k+1)}$ оператора $\mathfrak{Q}_{(k+1)}$, $\mathbf{b} \in \mathcal{B}_{(k+1)}$. Достаточно очевидно обратное: любой вектор из $\ker \mathfrak{Q}_{(k+1)}$ может рассматриваться как вэйвлетная составляющая некоторого вектора из $\mathcal{C}$. Действительно, если $\mathbf{b}$ – произвольный вектор из $\mathcal{B}_{(k+1)}$, то, полагая $\mathbf{c} = \mathbf{b}$, видим, что соотношения (5.4) выполнены, и при этом $\mathbf{a} = 0$. $\square$

Рассмотрим еще два экземпляра пространства $\mathcal{F}$, обозначая их $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$: элементами пространства $\mathcal{A}$ являются вектор-столбцы

$$\mathbf{a} = (\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots)^T,$$

а элементами пространства $\mathcal{C}$ – вектор-столбцы

$$\mathbf{c} = (\ldots, c_{-1}, c_0, c_1, \ldots)^T.$$

Пусть $\mathcal{E}$ – прямое произведение пространств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}_{(k+1)}$: $\mathcal{E} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A} \times \mathcal{B}_{(k+1)}$, т.е.

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \,\middle|\, \mathbf{a} \in \mathcal{A},\ \mathbf{b} \in \mathcal{B}_{(k+1)} \right\}.$$

Рассмотрим оператор

$$\mathfrak{D}_{(k+1)} :\ \mathcal{C} \mapsto \mathcal{E}, \quad \mathfrak{D}_{(k+1)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_{(k+1)} \\ I - \mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)} \end{pmatrix},$$

для которого

$$\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix} = \mathfrak{D}_{(k+1)}\mathbf{c} = \begin{pmatrix}\mathfrak{Q}_{(k+1)}\\ I-\mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}\end{pmatrix}\mathbf{c}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases}\mathbf{a} = \mathfrak{Q}_{(k+1)}\mathbf{c}\\ \mathbf{b} = (I-\mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)})\mathbf{c};\end{cases}$$

этот оператор называется оператором *декомпозиции.*

Оператор $\mathfrak{R}_{(k+1)} : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{C}$, $\quad \mathfrak{R}_{(k+1)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix}\mathfrak{P}^T_{(k+1)} & I\end{pmatrix}$, для которого

$$\mathbf{c} = \mathfrak{R}_{(k+1)}\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathfrak{P}^T_{(k+1)} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \mathbf{c} = \mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathbf{a} + \mathbf{b},$$

называется оператором *реконструкции.*

Теорема 16. *Операторы $\mathfrak{D}_{(k+1)}$ и $\mathfrak{R}_{(k+1)}$ взаимно обратны; они реализуют линейный изоморфизм пространств $\mathcal{C}$ и $\mathcal{E}$.*

Доказательство. Рассмотрим произведение $\mathfrak{R}_{(k+1)}\mathfrak{D}_{(k+1)}$:

$$\mathfrak{R}_{(k+1)}\mathfrak{D}_{(k+1)} = \begin{pmatrix}\mathfrak{P}^T_{(k+1)} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathfrak{Q}_{(k+1)}\\ I-\mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}\end{pmatrix}$$
$$= \mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)} + I - \mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)} = I.$$

С другой стороны, с учетом свойства (6.1) имеем

$$\mathfrak{D}_{(k+1)}\mathfrak{R}_{(k+1)}\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathfrak{Q}_{(k+1)}\\ I-\mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathfrak{P}^T_{(k+1)} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}\mathfrak{Q}_{(k+1)}\mathfrak{P}^T_{(k+1)} & \mathfrak{Q}_{(k+1)}\\ \mathfrak{P}^T_{(k+1)} - \mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}\mathfrak{P}^T_{(k+1)} & I-\mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}\mathbf{a} + \mathfrak{Q}_{(k+1)}\mathbf{b}\\ \mathbf{b} - \mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}\mathbf{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix},$$

что и требовалось установить. □

Здесь дадим другие представления операторов декомпозиции и реконструкции, предварительно отобразив прямую сумму в арифметическое протранство. При таком отображении будет существенна нумерация координатных осей (или, что то же самое, нумерация координатных ортов); она различна при различных k.

Предположим, что $\mathcal{B}_{(k+1)} \stackrel{\text{def}}{=} \ker\mathfrak{Q}_{(k+1)}$ – одномерное пространство: $\mathcal{B}_{(k+1)} = \{c\mathbf{b}_* \mid \forall c \in \mathbb{R}^1\}$, где $\mathbf{b}_*$ – единичный вектор-столбец.

Обозначим $\{\mathbf{f}^{(i)}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ систему единичных ортов (вектор-столбцов) пространства $\mathcal{F}$, а через $\{\mathbf{e}^{(i)}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ – систему единичных вектор-столбцов в пространстве $\mathcal{A}$,

$$\begin{array}{cccccccc} & \dots & i-2 & i-1 & i & i+1 & i+2 & \dots \\ (\mathbf{f}^{(i)})^T \stackrel{\text{def}}{=} & \big(\dots & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & \dots\big), \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} & \dots & i-2 & i-1 & i & i+1 & i+2 & \dots \\ (\mathbf{e}^{(i)})^T \stackrel{\text{def}}{=} & \big(\dots & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & \dots\big). \end{array}$$

Рассмотрим линейный изоморфизм $I_{(k+1)}$ пространств $\mathcal{E} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}_{(k+1)}$ и $\mathcal{F}$, $I_{(k+1)} : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{F}$, определяемый формулами

$$I_{(k+1)}\mathbf{e}^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \mathbf{f}^{(i)} & \text{при} \;\; i \leqslant k, \\ \mathbf{f}^{(i+1)} & \text{при} \;\; i \geqslant k+1, \end{cases}$$

$$I_{(k+1)}\mathbf{b}_* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f}^{(k+1)}.$$

Очевидно, что

$$I_{(k+1)}^{-1}\mathbf{f}^{(j)} = \begin{cases} \mathbf{e}^{(j)} & \text{при} \;\; j \leqslant k, \\ \mathbf{e}^{(j-1)} & \text{при} \;\; j \geqslant k+2, \end{cases}$$

$$I_{(k+1)}^{-1}\mathbf{f}^{(k+1)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{b}_*.$$

Введем вектор-столбец $\mathbf{f}$ с помощью равенства

$$\begin{array}{cccccccc} & \dots & k-2 & k-1 & k & k+1 & k+2 & k+3 & \dots \\ \mathbf{f}^T \stackrel{\text{def}}{=} & \big(\dots & a_{k-2}, & a_{k-1}, & a_k, & b_{k+1}, & a_{k+1}, & a_{k+3}, & \dots\big). \end{array}$$

Используя обозначения $\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} (\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, \dots)^T$, $\mathbf{b} = b_k\mathbf{b}_*$, имеем

$$I_{(k+1)}\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix} = \mathbf{f}, \quad I_{(k+1)}^{-1}\mathbf{f} = \begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix}.$$

Дадим представление операторов декомпозиции и реконструкции с использованием изоморфизма $I_{(k+1)}$. Для оператора декомпозиции

$$\mathfrak{D}_{(k+1)} : \mathcal{C} \mapsto \mathcal{E}, \quad \mathfrak{D}_{(k+1)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_{(k+1)} \\ I - \mathfrak{P}_{(k+1)}^T\mathfrak{Q}_{(k+1)} \end{pmatrix}$$

имеем

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_{(k+1)} \\ I - \mathfrak{P}_{(k+1)}^T\mathfrak{Q}_{(k+1)} \end{pmatrix}\mathbf{c} \iff \begin{cases} \mathbf{a} = \mathfrak{Q}_{(k+1)}\mathbf{c} \\ \mathbf{b} = (I - \mathfrak{P}_{(k+1)}^T\mathfrak{Q}_{(k+1)})\mathbf{c} \end{cases}.$$

Полагая $\mathbb{D}_{(k+1)} \overset{\text{def}}{=} I_{(k+1)}\mathfrak{D}_{(k+1)}$ и применяя изоморфизм $I_{(k+1)}$ к обеим частям равенства

$$\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix} = \mathfrak{D}_{(k+1)}\mathbf{c},$$

получаем отображение

$$\mathbb{D}_{(k+1)} : \mathcal{C} \mapsto \mathcal{F}, \quad \mathbf{f} = \mathbb{D}_{(k+1)}\mathbf{c} \quad \forall \mathbf{c} \in \mathcal{C}, \quad \mathbf{f} \in \mathcal{F}.$$

Для оператора реконструкции имеем

$$\mathfrak{R}_{(k+1)} : \ \mathcal{E} \mapsto \mathcal{C}, \quad \mathfrak{R}_{(k+1)} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix}\mathfrak{P}^T_{(k+1)} & I\end{pmatrix};$$

таким образом,

$$\mathbf{c} = \mathfrak{R}_{(k+1)} \begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix} = \mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathbf{a} + \mathbf{b},$$

Рассмотрим оператор $\mathbb{R}_{(k+1)} \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{R}_{(k+1)} I^{-1}_{k+1}$; если воспользоваться формулой $\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix} = I^{-1}_{(k+1)}\mathbf{f}$, то придем к соотношениям

$$\mathbb{R}_{(k+1)} : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{C}, \quad \mathbf{c} = \mathbb{R}_{(k+1)}\mathbf{f} \quad \forall \mathbf{f} \in \mathcal{F}, \quad \mathbf{c} \in \mathcal{C}.$$

§7. Коммутативность операторов декомпозиции

Имеется два порядка удаления узлов и два соответствующих результирующих вэйвлетных разложения: в первом случае удаляется узел x_{k+1}, а затем – узел x_k, а во втором случае сначала удаляется узел x_k, а затем – узел x_{k+1}. Возникает вопрос: приведет ли такое изменение порядка удаления узлов к одному и тому же вэйвлетному разложению? В этом пункте дается положительный ответ на этот вопрос.

Заметим, что фигурирующие дальше матрицы вложения и продолжения строятся аналогично тому, как это было сделано в третьем и четвертом пунктах соответственно. Из полученной ранее сетки $X_{\{k+1\}}$ (см. (3.1)) удалим узел $\widetilde{x}_k$ (очевидно, что $\widetilde{x}_k = x_k$). После удаления этого узла получаем сетку

$$X_{\{k,k+1\}} : \quad \ldots \widehat{x}_{k-1} < \widehat{x}_k < \widehat{x}_{k+1} < \ldots, \tag{7.1}$$

где

$$\widehat{x}_j \overset{\text{def}}{=} \widetilde{x}_j = x_j \ \text{ при } \ j \leqslant k-1, \quad \widehat{x}_j \overset{\text{def}}{=} \widetilde{x}_{j+1} = x_{j+2} \ \text{ при } \ j \geqslant k, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Положим

$$\widehat{S}_j \stackrel{\text{def}}{=} (\widehat{x}_j, \widehat{x}_{j+1}) \cup (\widehat{x}_{j+1}, \widehat{x}_{j+2}), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad \widehat{G} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} (\widehat{x}_j, \widehat{x}_{j+1}).$$

Пусть заданы три полных цепочки двумерных векторов $\{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\{\widetilde{\mathbf{a}}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ и $\{\widehat{\mathbf{a}}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ со свойствами

$$\mathbf{a}_j = \widetilde{\mathbf{a}}_j \quad \text{при} \quad j \leqslant k-1, \quad \mathbf{a}_{j+1} = \widetilde{\mathbf{a}}_j \quad \text{при} \quad j \geqslant k, \qquad j \in \mathbb{Z}, \tag{7.2}$$

$$\widetilde{\mathbf{a}}_j = \widehat{\mathbf{a}}_j \quad \text{при} \quad j \leqslant k-2, \quad \widetilde{\mathbf{a}}_{j+1} = \widehat{\mathbf{a}}_j \quad \text{при} \quad j \geqslant k-1, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{7.3}$$

С использованием этих цепочек построим три системы функций $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\{\widetilde{\omega}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ и $\{\widehat{\omega}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, отыскивая их из соотношений

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{a}_j\, \omega_j(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in G, \quad \omega_j(t) \equiv 0 \quad \forall t \in G \setminus S_j,$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbf{a}}_j\, \widetilde{\omega}_j(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in \widetilde{G}, \quad \widetilde{\omega}_j(t) \equiv 0 \quad \forall t \in \widetilde{G} \setminus \widetilde{S}_j,$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{\mathbf{a}}_j\, \widehat{\omega}_j(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in \widehat{G}, \quad \widehat{\omega}_j(t) \equiv 0 \quad \forall t \in \widehat{G} \setminus \widehat{S}_j$$

соответственно.

Благодаря предположениям (7.2)–(7.3) выполнено условие (B), и потому для вектор-функций

$$\omega(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\omega_j(t))_{j\in\mathbb{Z}}, \quad \widetilde{\omega}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{\omega}_j(t))_{j\in\mathbb{Z}}, \quad \widehat{\omega}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\widehat{\omega}_j(t))_{j\in\mathbb{Z}}$$

получаем соотношения

$$\widetilde{\omega}(t) = \mathfrak{P}_{(k+1)} \omega(t), \quad \widehat{\omega}(t) = \mathfrak{P}_{(k+1,k)} \widetilde{\omega}(t),$$

где

$$\begin{array}{ll}
\mathfrak{P}_{(k+1)} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{p}^{(k+1)}_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}, & \mathfrak{P}_{(k+1,k)} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{p}^{(k+1,k)}_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}, \\
\mathfrak{p}^{(k+1)}_{i,j} = \delta_{i,j} & \text{при} \quad j \leqslant k-1, \\
\mathfrak{p}^{(k+1)}_{i,j} = \delta_{i+1,j} & \text{при} \quad j \geqslant k+1, \\
\mathfrak{p}^{(k+1)}_{i,k} = 0 & \text{при} \quad i \in \mathbb{Z} \setminus \{k-1, k\}, \\
\mathfrak{p}^{(k+1,k)}_{i,j} = \delta_{i,j} & \text{при} \quad j \leqslant k-2, \\
\mathfrak{p}^{(k+1,k)}_{i,j} = \delta_{i+1,j} & \text{при} \quad j \geqslant k, \\
\mathfrak{p}^{(k+1,k)}_{i,k-1} = 0 & \text{при} \quad i \in \mathbb{Z} \setminus \{k-2, k-1\}.
\end{array}$$

Обозначим произведение этих матриц $\mathcal{P}_1 \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{P}_{(k+1,k)}\mathfrak{P}_{(k+1)}$. Элементы $[\mathcal{P}_1^T]_{i,j}$ транспонированной матрицы $\mathcal{P}_1^T$ таковы:

$$
\begin{array}{ll}
[\mathcal{P}_1^T]_{i,j} = \delta_{i,j} & \text{при} \quad i \leqslant k-2, \\
[\mathcal{P}_1^T]_{i,j} = \delta_{i,j+2} & \text{при} \quad i \geqslant k+1, \\
[\mathcal{P}_1^T]_{i,j} = 0 & \text{при} \quad i \in \{k-1, k\}, \quad j \in \mathbb{Z}\backslash\{k-2, k-1\}, \\
[\mathcal{P}_1^T]_{k-1,k-2} = \mathfrak{p}^{(k+1,k)}_{k-2,k-1}, & [\mathcal{P}_1^T]_{k-1,k-1} = \mathfrak{p}^{(k+1,k)}_{k-1,k-1}, \\
[\mathcal{P}_1^T]_{k,k-2} = \mathfrak{p}^{(k+1)}_{k-1,k}\mathfrak{p}^{(k+1,k)}_{k-2,k-1}, & [\mathcal{P}_1^T]_{k,k-1} = \mathfrak{p}^{(k+1)}_{k-1,k}\mathfrak{p}^{(k+1,k)}_{k-1,k-1} + \mathfrak{p}^{(k+1)}_{k,k}.
\end{array}
$$

Теперь из сетки X удалим узлы в обратном порядке: сначала удалим узел x_k, а затем – узел x_{k+1}. После удаления узла x_k получаем сетку

$$X_{\{k\}}: \quad \ldots < \grave{\tilde{x}}_{k-2} < \grave{\tilde{x}}_{k-1} < \grave{\tilde{x}}_k < \grave{\tilde{x}}_{k+1} < \grave{\tilde{x}}_{k+2} < \ldots,$$

где

$$\grave{\tilde{x}}_j \overset{\text{def}}{=} x_j \quad \text{при} \quad j \leqslant k-1, \quad \grave{\tilde{x}}_j \overset{\text{def}}{=} x_{j+1} \quad \text{при} \quad j \geqslant k, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Дополнительно введем обозначения

$$\grave{\tilde{S}}_j \overset{\text{def}}{=} (\grave{\tilde{x}}_j, \grave{\tilde{x}}_{j+1}) \cup (\grave{\tilde{x}}_{j+1}, \grave{\tilde{x}}_{j+2}), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad \grave{\tilde{G}} \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} (\grave{\tilde{x}}_j, \grave{\tilde{x}}_{j+1}).$$

Следующим удаляемым узлом является узел x_{k+1} (очевидно, что $x_{k+1} = \grave{\tilde{x}}_k$). В результате получается сетка $X_{\{k,k+1\}}$ (см. формулу (7.1)).

Зададим полную цепочку векторов $\{\grave{\tilde{\mathbf{a}}}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ со свойством

$$\grave{\tilde{\mathbf{a}}}_j = \mathbf{a}_j \quad \text{при} \quad j \leqslant k-1, \quad \grave{\tilde{\mathbf{a}}}_j = \mathbf{a}_{j+1} \quad \text{при} \quad j \geqslant k. \tag{7.4}$$

Очевидно, что

$$\grave{\tilde{\mathbf{a}}}_j = \grave{\hat{\mathbf{a}}}_j \quad \text{при} \quad j \leqslant k-2, \quad \grave{\tilde{\mathbf{a}}}_{j+1} = \grave{\hat{\mathbf{a}}}_j \quad \text{при} \quad j \geqslant k-1.$$

С использованием этой цепочки построим систему функций $\{\grave{\tilde{\omega}}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, отыскивая их из соотношений

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \grave{\tilde{\mathbf{a}}}_j \, \grave{\tilde{\omega}}_j(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in \grave{\tilde{G}}, \quad \grave{\tilde{\omega}}_j(t) \equiv 0 \quad \forall t \in \grave{\tilde{G}}\backslash\grave{\tilde{S}}_j.$$

Благодаря предположениям (7.2) – (7.4) выполнено условие (B), и потому для вектор-функций $\omega(t)$, $\widehat{\omega}_j(t)$ и $\grave{\tilde{\omega}}(t) \overset{\text{def}}{=} (\grave{\tilde{\omega}}_j(t))_{j\in\mathbb{Z}}$ получаем соотношения

$$\grave{\tilde{\omega}}(t) = \mathfrak{P}_{(k)}\omega(t), \quad \widehat{\omega}(t) = \mathfrak{P}_{(k,k+1)}\grave{\tilde{\omega}}(t),$$

где

$$
\begin{array}{ll}
\mathfrak{P}_{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{p}_{i,j}^{(k)})_{i,j\in\mathbb{Z}}, & \mathfrak{P}_{(k,k+1)} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{p}_{i,j}^{(k,k+1)})_{i,j\in\mathbb{Z}}, \\
\mathfrak{p}_{i,j}^{(k)} = \delta_{i,j} & \text{при} \ \ j \leqslant k-2, \quad i \in \mathbb{Z}, \\
\mathfrak{p}_{i,j}^{(k)} = \delta_{i+1,j} & \text{при} \ \ j \geqslant k, \quad i \in \mathbb{Z}, \\
\mathfrak{p}_{i,k-1}^{(k)} = 0 & \text{при} \ \ i \in \mathbb{Z}\backslash\{k-2, k-1\}, \\
\mathfrak{p}_{i,j}^{(k,k+1)} = \delta_{i,j} & \text{при} \ \ j \leqslant k-2, \quad i \in \mathbb{Z}, \\
\mathfrak{p}_{i,j}^{(k,k+1)} = \delta_{i+1,j} & \text{при} \ \ j \geqslant k, \quad i \in \mathbb{Z}, \\
\mathfrak{p}_{i,k-1}^{(k,k+1)} = 0 & \text{при} \ \ i \in \mathbb{Z}\backslash\{k-2, k-1\}.
\end{array}
$$

Для элементов матрицы, полученной транспонированием их произведения $\mathcal{P}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{P}_{(k,k+1)}\mathfrak{P}_{(k)}$, имеем

$$
\begin{array}{ll}
[\mathcal{P}_2^T]_{i,j} = \delta_{i,j} & \text{при} \ \ i \leqslant k-2, \quad j \in \mathbb{Z}, \\
[\mathcal{P}_2^T]_{i,j} = \delta_{i,j+2} & \text{при} \ \ i \geqslant k+1, \quad j \in \mathbb{Z}, \\
[\mathcal{P}_2^T]_{i,j} = 0 & \text{при} \ \ i \in \{k-1, k\}, \\
 & j \in \mathbb{Z}\backslash\{k-2, k-1\},
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
[\mathcal{P}_2^T]_{k-1,k-2} = \mathfrak{p}_{k-2,k-1}^{(k)} + \mathfrak{p}_{k-1,k-1}^{(k)}\mathfrak{p}_{k-2,k-1}^{(k,k+1)}, \\
[\mathcal{P}_2^T]_{k-1,k-1} = \mathfrak{p}_{k-1,k-1}^{(k)}\mathfrak{p}_{k-1,k-1}^{(k,k+1)}, \\
[\mathcal{P}_2^T]_{k,k-2} = \mathfrak{p}_{k-2,k-1}^{(k,k+1)}, \quad [\mathcal{P}_2^T]_{k,k-1} = \mathfrak{p}_{k-1,k-1}^{(k,k+1)}.
\end{array}
$$

Ввиду линейной независимости функций ω_j, $j \in \mathbb{Z}$, справедливо равенство $\mathcal{P}_1^T = \mathcal{P}_2^T$; оно эквивалентно равенству

$$
\mathfrak{P}_{(k+1)}^T \mathfrak{P}_{(k+1,k)}^T = \mathfrak{P}_{(k)}^T \mathfrak{P}_{(k,k+1)}^T. \tag{7.5}
$$

Рассмотрим матрицы продолжения, соответствующие удаляемым узлам сетки X.

Матрица $\mathfrak{Q}_{(k+1)}$ определяется формулами (4.16)–(4.21), где ввиду предположений (7.2) следует взять $\widetilde{c}_j = 1$; при этом справедливо равенство (см. (4.22))

$$
\mathfrak{Q}_{(k+1)} \mathfrak{P}_{(k+1)}^T = \mathfrak{I}. \tag{7.6}
$$

Аналогичным образом, матрица продолжения $\mathfrak{Q}_{(k+1,k)}$, соответствующая процессу удаления узла $\widetilde{x}_k$ из сетки $X_{\{k+1\}}$, может быть представлена своими элементами:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{q}^{(k+1,k)}_{i,j} = \delta_{i,j} && \text{при} \quad i \leqslant k-2, \quad j \in \mathbb{Z}, \\ &\mathfrak{q}^{(k+1,k)}_{i,j} = \delta_{i+1,j} && \text{при} \quad i \geqslant k, \quad j \in \mathbb{Z}, \\ &\mathfrak{q}^{(k+1,k)}_{k-1,j} = 0 && \text{при} \quad j \in \mathbb{Z}\setminus\{k-2, k-1\}; \end{aligned}$$

при этом верно соотношение

$$\mathfrak{Q}_{(k+1,k)}\mathfrak{P}^T_{(k+1,k)} = \mathfrak{I}. \tag{7.7}$$

Элементы матрицы $\mathcal{Q}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{Q}_{(k+1,k)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}$ имеют вид

$$\begin{aligned} &[\mathcal{Q}_1]_{i,j} = \delta_{i,j} && \text{при} \quad i \leqslant k-2, \quad j \in \mathbb{Z}, \\ &[\mathcal{Q}_1]_{i,j} = \delta_{i+2,j} && \text{при} \quad i \geqslant k, \quad j \in \mathbb{Z}, \\ &[\mathcal{Q}_1]_{k-1,j} = 0 && \text{при} \quad j \in \mathbb{Z}\setminus\{k-2, k-1\}, \\ &[\mathcal{Q}_1]_{k-1,k-2} = \mathfrak{q}^{(k+1,k)}_{k-1,k-2}, && [\mathcal{Q}_1]_{k-1,k-1} = \mathfrak{q}^{(k+1,k)}_{k-1,k-1}. \end{aligned}$$

Матрица продолжения $\mathfrak{Q}_{(k)} = (\mathfrak{q}^{(k)}_{i,j})$, соответствующая удалению узла x_k из исходной сетки X, получается из матрицы $\mathfrak{Q}_{(k+1)}$ заменой $k+1$ на k, так что

$$\begin{aligned} &\mathfrak{q}^{(k)}_{i,j} = \delta_{i,j} && \text{при} \quad i \leqslant k-2, \quad j \in \mathbb{Z}, \\ &\mathfrak{q}^{(k)}_{i,j} = \delta_{i+1,j} && \text{при} \quad i \geqslant k, \quad j \in \mathbb{Z}, \\ &\mathfrak{q}^{(k)}_{k-1,j} = 0 && \text{при} \quad j \in \mathbb{Z}\setminus\{k-2, k-1\}. \end{aligned}$$

Как и прежде, имеем

$$\mathfrak{Q}_{(k)}\mathfrak{P}^T_{(k)} = \mathfrak{I}. \tag{7.8}$$

Заметим, что теперь узел x_{k+1} удаляется из исходной сетки X после удаления узла x_k; в сетке $X_{\{k\}}$ этот узел имеет номер k, так что $x_{k+1} = \tilde{\tilde{x}}_k$. Таким образом, элементы матрицы продолжения $\mathfrak{Q}_{(k,k+1)} = (\mathfrak{q}^{(k,k+1)}_{i,j})$ имеют вид

$$\begin{aligned} &\mathfrak{q}^{(k,k+1)}_{i,j} = \delta_{i,j} && \text{при} \quad i \leqslant k-2, \quad j \in \mathbb{Z}, \\ &\mathfrak{q}^{(k,k+1)}_{i,j} = \delta_{i+1,j} && \text{при} \quad i \geqslant k, \quad j \in \mathbb{Z}, \\ &\mathfrak{q}^{(k,k+1)}_{k-1,j} = 0 && \text{при} \quad j \in \mathbb{Z}\setminus\{k-2, k-1\}; \end{aligned}$$

в силу предыдущего,

$$\mathfrak{Q}_{(k,k+1)}\mathfrak{P}^T_{(k,k+1)} = \mathfrak{I}. \tag{7.9}$$

Произведение матриц $\mathcal{Q}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{Q}_{(k,k+1)}\mathfrak{Q}_{(k)}$ может быть задано соотношениями

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{Q}_2]_{i,j} = \delta_{i,j} && \text{при} \quad i \leqslant k-2, \quad j \in \mathbb{Z},\\
&[\mathcal{Q}_2]_{i,j} = \delta_{i+2,j} && \text{при} \quad i \geqslant k, \quad j \in \mathbb{Z},\\
&[\mathcal{Q}_2]_{k-1,j} = 0 && \text{при} \quad j \in \mathbb{Z}\backslash\{k-2, k-1\},\\
&[\mathcal{Q}_2]_{k-1,k-2} = \mathfrak{q}^{(k,k+1)}_{k-1,k-2} + \mathfrak{q}^{(k,k+1)}_{k-1,k}\mathfrak{q}^{(k,k+1)}_{k-1,k-2}, &&\\
&[\mathcal{Q}_1]_{k-1,k-1} = \mathfrak{q}^{(k,k+1)}_{k-1,k-1}\mathfrak{q}^{(k)}_{k-1,k-1}. &&
\end{aligned}$$

Умножая слева соотношение (7.5) на матрицу $\mathfrak{Q}_{(k+1)}$ и используя (7.6), получаем $\mathfrak{P}^T_{(k+1,k)} = \mathfrak{Q}_{(k+1)}\mathfrak{P}^T_{(k)}\mathfrak{P}^T_{(k,k+1)}$. Умножение последнего соотношения слева на матрицу $\mathfrak{Q}_{(k+1,k)}$ с учетом равенства (7.7) дает $\mathfrak{I} = \mathfrak{Q}_{(k+1,k)}\mathfrak{Q}_{(k+1)}\mathfrak{P}^T_{(k)}\mathfrak{P}^T_{(k,k+1)}$; это означает, что матрица $\mathcal{Q}_1$ является левой обратной к матрице $\mathcal{P}^T_1$: $\mathcal{Q}_1\mathcal{P}^T_1 = \mathfrak{I}$.

Аналогичным образом из соотношения (7.5) с помощью (7.8) и (7.9) выводим $\mathfrak{Q}_{(k,k+1)}\mathfrak{Q}_{(k)}\mathfrak{P}^T_{(k+1)}\mathfrak{P}^T_{(k+1,k)} = \mathfrak{I}$, так что $\mathcal{Q}_2\mathcal{P}_2 = \mathcal{Q}_1\mathcal{P}_1$.

Лемма 9. *Пусть дана матрица $\mathcal{P}^T$ с элементами*

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{P}^T]_{i,j} = \delta_{i,j} && \textit{при} \quad i \leqslant k-2, \quad j \in \mathbb{Z},\\
&[\mathcal{P}^T]_{i,j} = \delta_{i,j+2} && \textit{при} \quad i \geqslant k+1, \quad j \in \mathbb{Z},\\
&[\mathcal{P}^T]_{i,j} = 0 && \textit{при} \quad i \in \{k-1, k\}, \quad j \in \mathbb{Z}\backslash\{k-2, k-1\},\\
&[\mathcal{P}^T]_{k-1,k-2} = a, \quad [\mathcal{P}^T]_{k-1,k-1} = b, && [\mathcal{P}^T]_{k,k-2} = c, \quad [\mathcal{P}^T]_{k,k-1} = d,
\end{aligned}$$

где a, b, c и d – некоторые числа, причем $b \neq 0$. Среди множества левых обратных матриц к матрице $\mathcal{P}^T$ существует и единственна левая обратная матрица $\mathcal{Q}$ с элементами вида

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{Q}]_{i,j} = \delta_{i,j} && \textit{при} \quad i \leqslant k-2, \quad j \in \mathbb{Z},\\
&[\mathcal{Q}]_{i,j} = \delta_{i+2,j} && \textit{при} \quad i \geqslant k, \quad j \in \mathbb{Z},\\
&[\mathcal{Q}]_{k-1,j} = 0 && \textit{при} \quad j \in \mathbb{Z}\backslash\{k-2, k-1\},\\
&[\mathcal{Q}]_{k-1,k-2} = x, \quad [\mathcal{Q}]_{k-1,k-1} = y. &&
\end{aligned}$$

Доказательство. Ясно, что для выполнения равенства $\mathcal{Q}\mathcal{P}^T = \mathfrak{I}$ необходимо и достаточно, чтобы $x + ay = 0, \quad by = 1$; отсюда x и y определяются однозначно. □

Теорема 17. *Справедливо соотношение* $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_2$.

Доказательство. Заметим, что структура матриц $\mathcal{Q}_i$, $i = 1, 2$, совпадает с указанной в лемме 9 структурой матрицы $\mathcal{Q}$. Для доказательства осталось положить $\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$ и воспользоваться упомянутой леммой. □

Следствие 5. *Рассматриваемое сплайн-вэйвлетное разложение не зависит от порядка удаления узлов сетки.*

Литература

1. И. Я. Новиков, С. Б. Стечкин, *Основы теории всплесков.* — Успехи мат. наук **53**, No. 6 (324) (1998), 53–128.
2. К. Чуи, *Введение в вэйвлеты.* Мир, М., 2001.
3. Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко, *Методы сплайн-функций.* Наука, М., 1980.
4. Ю. К. Демьянович, *Всплесковые разложения в пространствах сплайнов на неравномерной сетке.* — Докл. РАН **382**, No. 3 (2002), 310–316.
5. Ю. К. Демьянович, *Минимальные сплайны и всплески.* — Вестник СПбГУ No. 2 (2008), 8–22.
6. Ю. К. Демьянович, *Минимальные сплайны лагранжева типа.* — Проблемы математического анализа Вып. 50 (2010), 21–64.

Dem'yanovich Yu. K. Nonsmooth spline-wavelet decompositions and their properties.

Simple methods for constructing embedded spaces of splines (in general, nonsmooth and nonpolynomial) of the first order corresponding to local coarsening of an irregular mesh are provided, their wavelet decompositions are presented, and the commutativity of the decomposition operators is established.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: Yuri.Demjanovich@gmail.com

Поступило 12 октября 2011 г.