Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 395, 2011 г.

Е. Г. Голузина

О ВЗАИМНОМ ИЗМЕНЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ И КОЭФФИЦИЕНТОВ В КЛАССЕ ТИПИЧНО ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Введение

Пусть T – класс функций

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n,$$

регулярных и типично вещественных в круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, т.е. удовлетворяющих в U условию

$$\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} f(z > 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z \neq 0.$$

В работе автора [1] дана алгебраическая характеристика (с помощью неотрицательных и положительно определенных эрмитовых форм) множества значений системы

$$I(f) = \left\{ f^{(l_k)}(z_k) \right\}_{\substack{k=1,2,\ldots,n \\ l_k=0,1,\ldots,m_k}},$$

где z_k – заданные точки круга U. В частности, в [1] исследовано множество значений системы

$$\{c_2, c_3, \ldots, c_n, f(z_1)\}, \quad n > 2,$$

на классе T. Множество значений системы $\{c_2, f(z_1)\}$ найдено в [2].

Далее, использованный в [1] метод, основанный на интегральном представлении класса T и некоторых теоремах из степенной проблемы моментов [3], был применен к системам

$$\{c_2, f(z_1), f(z_2)\}, \quad \{c_2, c_3, f(z_1)\}, \quad f \in T,$$

и были найдены множества значений $f(z_2)$ при заданных значениях c_2 и $f(z_1)$ (см. [4]) и множество значений системы (c_2, c_3) при заданном значении $f(z_1)$ (см. [5]).

Ключевые слова: типично вещественная функция, множества значений, коэффициентные задачи.

В настоящей работе аналогичным образом исследовано множество значений системы $\{c_2, c_3, f(z_1), f(z_2)\}$ на классе T и найдено множество значений $f(z_2)$ при заданных значениях c_2, c_3 и $f(z_1)$.

§1. Основные результаты

Пусть z_1 и z_2 – заданные точки в U,
$0 < |z_j| < 1$, $\zeta_j = z_j + \frac{1}{z_j}$,
$w_j = x_j + iy_j = f(z_j)$, x_j, $y_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$,
$x_3 = c_2$, $x_4 = c_3$.
Для $f(z) \in T$ обозначим через D множество значений системы

$$\{c_2, c_3, f(z_1), f(z_2)\}. \tag{1}$$

Теорема 1. *Пусть* $\operatorname{Im} z_j \neq 0$ $(j = 1, 2)$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. D *есть множество всех точек*

$$X = X(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^6, \tag{2}$$

в которых неотрицательны все главные миноры эрмитовых матриц $A(X)$ *и* $B(X)$, *где*

$$\begin{aligned} &A(X) = (a_{jk})_0^2 \\ &= \begin{pmatrix} 3 - x_4 & \zeta_1 + x_3 + (4 - \zeta_1^2)w_1 & \zeta_2 + x_3 + (4 - \zeta_2^2)w_2 \\ \overline{a}_{01} & -1 + \frac{\operatorname{Im}[w_1(\zeta_1^2 - 4)]}{\operatorname{Im} \zeta_1} & \frac{\omega_2 - \overline{\omega}_1}{\zeta_2 - \overline{\zeta}_1} - 1 \\ \overline{a}_{02} & \overline{a}_{12} & -1 + \frac{\operatorname{Im}[w_2(\zeta_2^2 - 4)]}{\operatorname{Im} \zeta_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

при $\omega_j = w_j(\zeta_j^2 - 4)$, *и*

$$\begin{aligned} &B(X) = (b_{jk})_0^3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x_3 & w_1 & w_2 \\ x_3 & x_4 + 1 & w_1\zeta_1 - 1 & \zeta_2 w_2 - 1 \\ \overline{w}_1 & \overline{\zeta}_1\overline{w}_1 - 1 & -\operatorname{Im} w_1 / \operatorname{Im} \zeta_1 & (w_2 - \overline{w}_1)/(\overline{\zeta}_1 - \zeta_2) \\ \overline{w}_2 & \overline{\zeta}_2\overline{w}_2 - 1 & (\overline{w}_2 - w_1)/(\zeta_1 - \overline{\zeta}_2) & -\operatorname{Im} w_2 / \operatorname{Im} \zeta_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. *Точка* $X \in \mathbb{R}^6$ *является внутренней точкой множества* D *тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} &x_4 < 3, \quad x_3^2 < x_4 + 1, \\ &\det[(a_{jk})_0^{l_1}] > 0 \quad \textit{при} \quad l_1 = 1, 2, \\ &\det[(b_{jk})_0^{l_2}] > 0 \quad \textit{при} \quad l_2 = 2, 3. \end{aligned} \tag{3}$$

3. *Каждой точке* $X \in \partial D$ *– границы множества* D *– соответствует только одна функция* $F_X(z)$ *класса* T, *и она имеет вид*

$$F_X(z) = \sum_{k=1}^{4} \frac{\lambda_k z}{1 - 2t_k z + z^2},$$

где

$$\sum_{k=1}^{4} \lambda_k = 1, \quad \lambda_k \geqslant 0, \quad t_k \in [-1, 1].$$

Из теоремы 2.3 в [1] следует, что множество D_1 значений системы $\{c_2, c_3, f(z_1)\}$ на классе T в случае $\operatorname{Im} z_1 \neq 0$ есть множество всех точек

$$X = X(x_1, y_1, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4,$$

в которых неотрицательны все главные миноры двух матриц

$$A_1(X) = \begin{pmatrix} 3 - x_4 & \overline{\zeta}_1 + x_3 + (4 - \overline{\zeta}_1^2)\overline{w}_1 \\ \zeta_1 + x_3 + (4 - \zeta_1^2) w_1 & -1 + \frac{\operatorname{Im}[w_1(\zeta_1^2 - 4)]}{\operatorname{Im} \zeta_1} \end{pmatrix}$$

и

$$B_1(X) = \begin{pmatrix} 1 & x_3 & \overline{w}_1 \\ x_3 & x_4 + 1 & \overline{\zeta}_1 \overline{w}_1 - 1 \\ w_1 & \zeta_1 w_1 - 1 & -\operatorname{Im} w_1 / \operatorname{Im} \zeta_1 \end{pmatrix}.$$

В силу леммы 1 в [1], имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Int} D_1 = \bigl\{ X = X(w_1, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \\ x_4 < 3, \ \ x_3^2 < x_4 + 1, \ \ \det A_1(X) > 0, \ \ \det B_1(X) > 0 \bigr\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Пусть $\widetilde{T}$ – класс функций $f(z) \in T$ при фиксированных c_2, c_3 и $w_1 = f(z_1)$, $\operatorname{Im} z_1 \neq 0$, удовлетворяющих неравенствам в (4).

Теорема 2. *Пусть* $\operatorname{Im} z_2 \neq 0$. *Тогда* $\widetilde{D}$ *– множество значений* $f(z_2)$ *на классе* $\widetilde{T}$ *– есть пересечение двух кругов* D_j:

$$|w - O_j| \leqslant R_j, \quad j = 1, 2, \tag{5}$$

где

$$R_1 = \frac{|(\zeta_2 - \overline{\zeta}_1)(\zeta_2 - \zeta_1)|}{2|\operatorname{Im}\zeta_2||\zeta_1^2 - 4|} \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

$$O_1 = \left[c_3 - 3 + (\zeta_2 + c_2)(\zeta_2 - \overline{\zeta}_2) + \frac{\Delta_2}{\Delta}\right] \frac{1}{(\zeta_1^2 - 4)(\zeta_2 - \overline{\zeta}_2)},$$

при

$$\Delta = 3 - c_3 - |\zeta_2 - \overline{\zeta}_1|^2 + 2\operatorname{Re}\left[(\overline{\zeta}_2 - \zeta_1)\left(\zeta_1 + c_2 + \frac{(\zeta_2 - \zeta_1)w_1(\zeta_1^2 - 4)}{\zeta_1 - \overline{\zeta}_1}\right)\right],$$

$$\Delta_1 = (3 - c_3)\left(\frac{\operatorname{Im}[w_1(\zeta_1^2 - 4)]}{\operatorname{Im}\zeta_1} - 1\right) - |\zeta_1 + c_2 - w_1(\zeta_1^2 - 4)|^2,$$

$$\Delta_2 = \left[3 - c_3 + (\overline{\zeta}_2 - \zeta_1)(\zeta_1 + c_2 - w_1(\zeta_1^2 - 4))\right]$$
$$\times \left[3 - c_3 + (\overline{\zeta}_2 - \overline{\zeta}_1)(\overline{\zeta}_1 + c_2 - \overline{w}_1(\overline{\zeta}_1^2 - 4))\right];$$

$$R_2 = \frac{|(\zeta_2 - \zeta_1)(\zeta_2 - \overline{\zeta}_1)|}{2|\operatorname{Im}\zeta_2|} \cdot \frac{\delta_1}{|\delta|},$$

$$O_2 = \frac{-i}{2\operatorname{Im}\zeta_2}\left[1 - \frac{\delta_2}{\delta}\right]$$

при

$$\delta = \begin{vmatrix} c_3 + 1 + |\zeta_2|^2 - 2c_2\operatorname{Re}\zeta_2 & [w_1(\zeta_1 - \zeta_2) - 1](\zeta_1 - \overline{\zeta}_2) + \zeta_2 - c_2 \\ [\overline{w}_1(\overline{\zeta}_1 - \overline{\zeta}_2) - 1](\overline{\zeta}_1 - \zeta_2) + \overline{\zeta}_2 - c_2 & 1 + \frac{\operatorname{Im}[w_1(\zeta_2 - \zeta 1)(\zeta_1 - \overline{\zeta}_2)]}{\operatorname{Im}\zeta_1} \end{vmatrix},$$

$$\delta_1 = \det[(b_{jk})_0^2],$$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} c_2 - \overline{\zeta}_2 & w_1(\zeta_1 - \overline{\zeta}_2) - 1 & 0 \\ c_3 + 1 + |\zeta_2|^2 - 2c_2\operatorname{Re}\zeta_2 & [w_1(\zeta_1 - \zeta_2) - 1](\zeta_1 - \overline{\zeta}_2) - c_2 + \zeta_2 & \overline{\zeta}_2 - c_2 \\ [\overline{w}_1(\overline{\zeta}_1 - \overline{\zeta}_2) - 1](\overline{\zeta}_1 - \zeta_2) - c_2 + \overline{\zeta}_2 & 1 - \frac{\operatorname{Im}[w_1(\zeta_1 - \zeta_2)(\zeta_1 - \overline{\zeta}_2)]}{\operatorname{Im}\zeta_1} & 1 + \overline{w}_1(\overline{\zeta}_2 - \overline{\zeta}_1) \end{vmatrix}.$$

Теорема 3. *Граничным точкам множества $\widetilde{D}$ соответствуют только функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$:*

$$f_1(z) = f_1(z; t_1, t_2) = \frac{1}{\zeta^2 - 4}\left\{c_2 + \zeta + \frac{1}{(\zeta - 2t_1)}\left[c_3 - 3\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\operatorname{Im}\zeta_1}{\zeta - 2t_2}\,\frac{\left|[w_1(\zeta_1^2 - 4) - \zeta_1 - c_2](\zeta_1 - 2t_1) + 3 - c_3\right|^2}{\operatorname{Im}([w_1(\zeta_1^2 - 4) - \zeta_1 - c_2](\zeta_1 - 2t_1))}\right]\right\},$$

$\zeta = z + \frac{1}{z}$, *где*

$$t_2 = t_2(t_1) = \frac{\operatorname{Im}(\zeta_1\{\dots\}_1)}{2\operatorname{Im}\{\dots\}_1}, \quad t_1 \in [-1, 1], \quad t_2 \in [t_2(1), t_2(-1)]$$

и

$$\{\dots\}_1 = [w_1(\zeta_1^2 - 4) - \zeta_1 - c_2](\zeta_1 - 2t_1) + 3 - c_3;$$

$$f_2(z) = f_2(z; t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{(\zeta - 2t_1)(\zeta - 2t_2)}\Big[\zeta + c_2 - 2(t_1 + t_2) + \frac{1 + c_3 + 4t_1t_2 - 2c_2(t_1 + t_2)}{\zeta - 2t_3}\Big],$$

$\zeta = z + \frac{1}{z}$, *где*

$$2t_3 = 2t_3(t_1, t_2) = \frac{\operatorname{Im}(\{\dots\}_2\zeta_1)}{\operatorname{Im}\{\dots\}_2},$$

$$2c_2(t_1 + t_2) - 4t_1t_2 - c_3 - 1 = \frac{\operatorname{Im}\zeta_1|\{\dots\}_2|^2}{\operatorname{Im}\{\dots\}_2}$$

и

$$\{\dots\}_2 = [w_1(\zeta_1 - 2t_1) - 1](\zeta_1 - 2t_2) - c_2 + 2t_1.$$

Точкам пересечения $\partial D_1 \cap \partial D_2$ *соответствуют функции*

$$f^{(\varepsilon)}(z; t_1) = \frac{1}{\zeta + 2\varepsilon}\Big[1 + \frac{c_2 + 2\varepsilon}{\zeta - 2t_1} + \frac{\big|[w_1(\zeta_1 + 2\varepsilon) - 1](\zeta_1 - 2t_1) - c_2 - 2\varepsilon\big|^2 \operatorname{Im}\zeta_1}{\operatorname{Im}([1 - w_1(\zeta_1 + 2\varepsilon)](\zeta_1 - 2t_1))} \times \frac{1}{(\zeta - 2t_1)(\zeta - 2t_2)}\Big],$$

$$\zeta = z + \frac{1}{z}, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad t_1 \in (-1, 1),$$

и

$$2t_2 = \frac{\operatorname{Im}(\zeta_1\{\dots\})}{\operatorname{Im}\{\dots\}},$$

$$-1 - c_3 + 4t_1\varepsilon + 2c_2(t_1 - \varepsilon) = \frac{\operatorname{Im}\zeta_1|\{\dots\}|^2}{\operatorname{Im}\{\dots\}},$$

$$\{\dots\} = [w_1(\zeta_1 + 2\varepsilon) - 1](\zeta_1 - 2t_1) - c_2 - 2\varepsilon.$$

§2. Доказательства

2.1. Доказательство теоремы 1. Для класса T имеет место интегральное представление

$$f(z) \in T \Longleftrightarrow f(z) = \int_{-1}^{1} \frac{z}{1 - 2tz + z^2}\, d\alpha(t), \quad \alpha(t) \in M_1, \tag{6}$$

где M_1 – класс функций $\alpha(t)$, неубывающих на отрезке $[-1, 1]$ и удовлетворяющих условию $\int\limits_{-1}^{1} d\alpha(t) = 1$ [6, 7].

Из (6) для системы (1) получаем представление

$$c_2 = \int_{-1}^{1} 2t\, d\alpha(t), \quad c_3 = \int_{-1}^{1} (4t^2 - 1)\, d\alpha(t),$$

$$f(z_j) = \int_{-1}^{1} \frac{d\alpha(t)}{\zeta_j - 2t}, \quad \alpha(t) \in M_1, \quad j = 1, 2. \tag{7}$$

Используя (7), нетрудно показать, что D – замкнутое выпуклое ограниченное множество.

Образуем функцию

$$\varphi(t) = \operatorname{Re}\left[\beta_0 + \sum_{j=1}^{2} \frac{\beta_j}{\zeta_j - 2t} + \beta_3 t + \beta_4 t^2\right] \geqslant 0$$

на $[-1, 1]$, где $\beta_0 \neq 0$, $\{\beta_j\}_1^4$ – некоторые комплексные числа.

Так как $\operatorname{Im} \zeta_j \neq 0$ $(j = 1, 2)$, представим $\varphi(t)$ в виде

$$\varphi(t) = \frac{A_6(t)}{\prod\limits_{j=1}^{2} |\zeta_j - 2t|^2},$$

где $A_6(t)$ – неотрицательный алгебраический многочлен от t шестой степени.

Следуя далее доказательству теоремы 1 в [8], придем к неотрицательности эрмитовых форм $H_1(X)$ и $H_2(X)$, а в случае, когда

$X \in \operatorname{Int} D$, – к их положительной определенности, где

$$H_1(X) = (3 - x_4)|\beta_0|^2 + \sum_{j=1}^{2} \left(-1 + \frac{\operatorname{Im}[w_1(\zeta_1^2 - 4)]}{\operatorname{Im} \zeta_1} \right) |\beta_j|^2$$
$$+ 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^{2} [\zeta_j + x_3 + w_j(4 - \zeta_j^2)] \overline{\beta}_0 \beta_j \right\}$$
$$+ 2 \operatorname{Re} \left\{ \left[-1 + \frac{w_2(\zeta_2^2 - 4) - \overline{w}_1(\overline{\zeta}_1^2 - 4)}{\zeta_2 - \overline{\zeta}_1} \right] \overline{\beta}_1 \beta_2 \right\}$$

и

$$H_2(X) = |\gamma_0|^2 + (1 + x_4)|\gamma_3|^2 + \sum_{j=1}^{2} \frac{-\operatorname{Im} w_j}{\operatorname{Im} \zeta_j} |\gamma_j|^2$$
$$+ 2 \operatorname{Re} \left(\overline{\gamma}_0 \gamma_3 x_3 \right) + 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} \overline{\gamma}_0 \gamma_j w_j + 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} (w_j \zeta_j - 1) \overline{\gamma}_3 \gamma_j$$
$$+ 2 \operatorname{Re} \left(\frac{w_2 - \overline{w}_1}{\overline{\zeta}_1 - \zeta_2} \overline{\gamma}_1 \gamma_2 \right).$$

В силу теорем 19 и 20 в [9, с. 300], утверждения 1 и 2 теоремы 1 доказаны. Докажем утверждение 3 теоремы 1.

Имеем

$$\partial D = \{X \in D : \operatorname{Re} L(X) = \max_{w \in D} \operatorname{Re} L(w)\},$$

где $L(w) = \beta_0 + \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \beta_3 c_2 + \beta_4 c_3$, $\beta_0 \neq 0$, $\{\beta_k\}_0^4 \in \mathbb{C}$. В силу (7),

$$L(w) = \beta_0 + \int_{-1}^{1} \left[\sum_{j=1}^{2} \frac{\beta_j}{\zeta_j - 2t} + 2t\beta_3 + (4t^2 - 1)\beta_4 \right] d\alpha(t).$$

Следовательно, $\operatorname{Re} L(w) = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(t)\, d\alpha(t)$ и

$$\max_{w \in D} \operatorname{Re} L(w) = \max_{\alpha \in M_1} \int\limits_{-1}^{1} \varphi(t)\, d\alpha(t) = \max_{t \in [-1,1]} \varphi(t).$$

Функция $\varphi(t) = \frac{A_6(t)}{\prod_{j=1}^{2} |\zeta_j - 2t|^2}$ не является константой; $A_6(t)$ – многочлен от t не выше 6-ой степени. Поэтому $\varphi(t)$ достигает абсолютного максимума на $[-1, 1]$ в точках t_j, $j = 1, 2, 3$, и, возможно, в точках -1, 1. Множеству ∂D соответствуют только те функции класса T, которые получаются из (6) при кусочно-постоянных фунциях $\alpha(t) \in M_1$, которые могут иметь разрыв только в точках t_1, t_2, t_3, -1, 1, т. е. функции $F_X(z)$.

Теорема 1 доказана. $\square$

2.2. Доказательство теоремы 2. В силу утверждения 2 теоремы 1, имеем

$$\operatorname{Int} \widetilde{D} = \{w_2 \in \mathbb{C} : \det A(X) > 0,\ \det B(X) > 0\},$$

где $X = X(w_1, w_2, c_2, c_3)$ и w_1, c_2, c_3 фиксированы.

Преобразуем эрмитовы матрицы $A(X)$ и $B(X)$. Получим эрмитовы матрицы $A'(X)$ и $B'(X)$:

$$\begin{aligned} A'(X) &= (a'_{jk})_0^2 \\ &= \begin{pmatrix} 3-x_4 & 3-x_4+(\overline{\zeta}_2-\zeta_1)(\zeta_1+x_3-\omega_1) & 3-x_4+(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)(\zeta_2+x_3-\omega_2) \\ \overline{a}'_{01} & a'_{11} & a'_{12} \\ \overline{a}'_{02} & 3-x_4+(\zeta_2-\zeta_1)(\zeta_1+x_3-\omega_1) & 3-x_4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$a'_{11} = 3 - x_4 - |\zeta_2 - \overline{\zeta}_1|^2 + 2 \operatorname{Re}\left[(\overline{\zeta}_2 - \zeta_1)\left(\zeta_1 + x_3 + \frac{\omega_1(\zeta_2 - \zeta_1)}{\zeta_1 - \overline{\zeta}_1}\right)\right],$$

$$\omega_j = (\zeta_j^2 - 4)w_j, \quad j = 1, 2,$$

и

$$\begin{aligned} B'(X) &= (b'_{jk})_0^3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x_3-\overline{\zeta}_2 & b'_{02} & b'_{03} \\ x_3-\zeta_2 & x_4+1-2x_3 \operatorname{Re}\zeta_2+|\zeta_2|^2 & b'_{12} & b'_{13} \\ \overline{w}_1(\overline{\zeta}_1-\zeta_2)-1 & \overline{b'_{12}} & b'_{22} & b'_{23} \\ \overline{w}_2(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)-1 & \zeta_2-x_3 & 1-w_1(\zeta_1-\zeta_2) & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$b'_{12} = \left[w_1(\zeta_1 - \zeta_2) - 1\right](\zeta_1 - \overline{\zeta}_2) + \zeta_2 - x_3,$$

$$b'_{22} = 1 + 2 \operatorname{Re} \frac{w_1(\zeta_1 - \zeta_2)(\zeta_1 - \overline{\zeta}_2)}{\overline{\zeta}_1 - \zeta_1}.$$

Имеем

$$\det A(X) = \frac{1}{|\zeta_2 - \overline{\zeta}_1|^2 |\zeta_2 - \overline{\zeta}_2|^2} \det A'(X) > 0,$$
$$\det B(X) = \frac{1}{|\zeta_2 - \overline{\zeta}_1|^2 |\zeta_2 - \overline{\zeta}_2|^2} \det B'(X) > 0.$$

Неравенства $\det A'(X) > 0$ и $\det B'(X) > 0$ равносильны соответственно неравенствам

$$\left| a'_{02} - \frac{a'_{01} a'_{12}}{a'_{11}} \right| < \frac{|(\zeta_2 - \overline{\zeta}_1)(\zeta_2 - \zeta_1)|}{|a'_{11}|} |\Delta_1|,$$
$$\left| b'_{03} - \frac{\delta_2}{\delta} \right| < \frac{|(\zeta_2 - \overline{\zeta}_1)(\zeta_2 - \zeta_1)|}{|\delta|} |\Delta_1|.$$

По определению класса $\widetilde{T}$ имеем $a'_{00} > 0$, $\Delta_1 > 0$, $\delta_1 > 0$, ибо

$$\Delta_1 = \det \left[(a'_{jk})_0^1 \right] = \left| \zeta_2 - \overline{\zeta}_1 \right|^2 \det A_1(X),$$
$$\delta_1 = \det \left[(b'_{jk})_0^2 \right] = \left| \zeta_2 - \overline{\zeta}_1 \right|^2 \det B_1(X).$$

В силу неравенства $\Delta_1 > 0$, имеем $a'_{11} > 0$.

Теорема 2 доказана. □

2.3. Доказательство теоремы 3. В силу утверждения 3 теоремы 1, экстремальные функции имеют вид

$$f(z) = \sum_{k=1}^{4} \frac{\lambda_k}{\zeta - 2t_k}, \quad \zeta = z + \frac{1}{z},$$

где $\lambda_k \geqslant 0$, $t_k \in [-1, 1]$, $k = 1, 2, 3, 4$,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{4} \lambda_k = 1, && \sum_{k=1}^{4} \lambda_k t_k = \frac{c_2}{2}, \\ &\sum_{k=1}^{4} \lambda_k t_k^2 = \frac{c_3 + 1}{4}, && \sum_{k=1}^{4} \frac{\lambda_k}{\zeta_1 - 2t_k} = w_1. \end{aligned} \tag{8}$$

Функции $f(z) = \frac{1}{\zeta - 2t}$ и $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{2} \frac{\lambda_k}{\zeta - 2t_k}$, $\zeta = z + \frac{1}{z}$, не принадлежат классу $\widetilde{T}$.

Рассмотрим функции

$$f^{(\varepsilon)}(z) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\lambda_k}{\zeta - 2t_k} + \frac{\lambda_3}{\zeta + 2\varepsilon}, \quad \zeta = z + \frac{1}{z}.$$

Из условий (8) следует

$$w_1 = \frac{1}{\zeta_1 + 2\varepsilon} + \frac{c_2 + 2\varepsilon}{(\zeta_1 + 2\varepsilon)(\zeta_1 - 2t_1)} + \frac{4\lambda_2(t_2+\varepsilon)(t_2 - t_1)}{(\zeta_1 + 2\varepsilon)(\zeta_1 - 2t_1)(\zeta_1 - 2t_2)},$$
$$4\lambda_2(t_2+\varepsilon)(t_2-t_1) = c_3 + 1 - 2c_2(t_1 - \varepsilon) - 4\varepsilon t_1.$$

Далее имеем

$$\bigl\{[w_1(\zeta_1 + 2\varepsilon) - 1](\zeta_1 - 2t_1) - c_2 - 2\varepsilon\bigr\}(\zeta_1 - 2t_2) = 4\lambda_2(t_2+\varepsilon)(t_2-t_1).$$

Из последнего равенства находим t_2:

$$2t_2 = 2t_2(t_1) = \frac{\operatorname{Im}(\zeta_1\{\dots\})}{\operatorname{Im}\{\dots\}},$$

где

$$\{\dots\} = \{[w_1(\zeta_1 + 2\varepsilon) - 1](\zeta_1 - 2t_1) - c_2 - 2\varepsilon\}.$$

Так как

$$\zeta_1 - 2t_2 = \frac{-\overline{\{\dots\}}\operatorname{Im}\zeta_1}{\operatorname{Im}\{\dots\}},$$

то

$$4\lambda_2(t_2+\varepsilon)(t_2-t_1) = -\frac{|\{\dots\}|^2\operatorname{Im}\zeta_1}{\operatorname{Im}\{\dots\}}.$$

В случаях

$$f(z) = \sum_{k=1}^{4} \frac{\lambda_k}{\zeta - 2t_k}, \quad \lambda_k > 0, \quad t_1 \neq t_2, \quad t_3 = 1, \quad t_4 = -1,$$

и

$$f(z) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\lambda_k}{\zeta - 2t_k}, \quad \lambda_k > 0,$$
$$0 < t_k < 1, \quad t_k \neq t_j \ \text{ при } \ k \neq j, \quad k, j = 1, 2, 3,$$

используя условия (8), приходим к двум однопараметрическим семействам $f_1(z)$ и $f_2(z)$.

Теорема 3 доказана. □

Литература

1. Е. Г. Голузина, *Об областях значений некоторых систем функционалов в классе типично вещественных функций.* — Вестн. ЛГУ No. 7, сер. мат., мех. и астр., вып. 2 (1965), 45–62.
2. Ю. Е. Аленицын, *Об областях изменения систем коэффициентов функций, представимых суммой интегралов Стилтьеса*, — Вестник ЛГУ. No. 7, сер. мат., мех. и астр., вып. 2 (1962), 25–41.
3. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи.* М., 1973.
4. Е. Г. Голузина, *О множестве значений системы* $\{c_2, f(z_1), f(z_2)\}$ *в классе типично вещественных функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **371** (2009), 7–17.
5. Е. Г. Голузина, *О множестве значений начальных коэффициентов в одном классе типично вещественных функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **263** (2000), 40–48.
6. M. S. Robertson, *On the coefficients of a typically real function.* — Bull. Amer. Math. Soc. **41**, No. 8 (1935), 565–572.
7. Г. М. Голузин, *О типично вещественных функциях.* — Мат. сб. **27** (69), No. 2 (1950), 201–218.
8. Е. Г. Голузина, *О множестве значений системы* $\{c_2, c_3, f(z_1), f'(z_1)\}$ *в классе типично вещественных функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **382** (2010), 5–14.
9. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, 3-е изд., М., 1967.

Goluzina E. G. On the mutual change of values of a function and its coefficients in the class of typically real functions.

The paper coninues investigations of the well-known class T of typically real functions $f(z)$ in the disk $U = \{z : |z| < 1\}$. The region of values of the system $\{c_2, c_3, f(z_1), f(z_2)\}$ in the class T is studied. The region of values of $f(z_2)$ in the class of functions $f \in T$ with fixed values c_2, c_3 and $f(z_1)$ is determined.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, С.-Петербург 191023,
Россия

E-mail: goluzina@pdmi.ras.ru

Поступило 9 ноября 2011 г.