Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 395, 2011 г.

Ю. А. Альпин, Х. Д. Икрамов

КРИТЕРИЙ УНИТАРНОЙ КОНГРУЭНТНОСТИ МАТРИЦ

1. Введение

Говорят, что матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ унитарно подобны, если существует унитарная матрица U такая, что

$$B = U^* AU.$$

Для проверки унитарного подобия можно использовать классическую теорему Шпехта (см., например, [1]).

Теорема 1. *Матрицы A и B унитарно подобны тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{tr} W(A, A^*) = \operatorname{tr} W(B, B^*) \tag{1}$$

для любого одночлена (слова) $W(s, t)$ от некоммутирующих переменных s и t.

Теорема Шпехта требует проверки бесконечного множества условий, однако Пирси [2] превратил её в конечный критерий, доказав, что достаточно проверить равенства (1) для слов длины, не превосходящей $2n^2$. Результат Пирси означает также, что существует конечная полная система унитарных инвариантов.

Матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ называются унитарно конгруэнтными, если существует унитарная матрица U такая, что

$$B = U^T AU.$$

Теория унитарных подобий и теория унитарных конгруэнций имеют много общего. Например, одна из самых известных теорем линейной алгебры утверждает, что любую эрмитову матрицу посредством унитарного подобия можно привести к диагональному виду. Аналогом этой теоремы в теории унитарных конгруэнций является теорема Такаги [1]: любую комплексную симметричную матрицу посредством

Ключевые слова: унитарное подобие, унитарная конгруэнтность.

унитарной конгруэнции можно привести к диагональной форме, причём диагональные элементы равны сингулярным числам данной матрицы.

Вместе с тем, в отличие от ситуации с унитарным подобием, до настоящего времени был неизвестен критерий унитарной конгруэнтности двух комплексных матриц, допускающий конечную процедуру проверки. В данной статье предложен такой критерий. Краткое сообщение о нём опубликовано в [3].

Важным шагом на пути к искомому критерию является следующая теорема [4].

Теорема 2. *Матрицы A и B унитарно конгруэнтны тогда и только тогда, когда существует унитарная матрица U такая, что*

$$BB^* = U^*(AA^*)U, \quad B^T\overline{B} = U^*(A^T\overline{A})U, \quad B\overline{B} = U^*(A\overline{A})U. \tag{2}$$

Таким образом, матрица A унитарно конгруэнтна матрице B в точности тогда, когда семейство матриц

$$\{AA^*, A^T\overline{A}, A\overline{A}\} \tag{3}$$

унитарно подобно семейству $\{BB^*, B^T\overline{B}, B\overline{B}\}$. Соответственно, мы используем критерий унитарного подобия, установленный авторами в [5]. В разделе 2 мы даём доказательство этого результата, существенно более короткое, чем первоначальное доказательство из [5]. Критерий унитарной конгруэнтности излагается в разделе 3.

2. Унитарное подобие матричных семейств

Введём необходимые обозначения. Семейство матриц будем задавать как отображение $\alpha : X \to M_n(\mathbb{C})$, где X – конечное множество, элементы которого называются буквами или некоммутирующими переменными. Пусть $\langle X \rangle$ – моноид слов, порождённый множеством X (единица моноида – пустое слово e), через $\mathbb{C}[X]$ обозначим ассоциативную алгебру комплексных полиномов от переменных из X. Отображение α естественно продолжается до гомомофизма моноида $\langle X \rangle$ в мультипликативный моноид $M_n(\mathbb{C})$ и далее до гомоморфизма алгебры $\mathbb{C}[X]$ в алгебру $M_n(\mathbb{C})$. Иначе говоря, матричное представление множества X продолжается до матричного представления моноида $\langle X \rangle$ и матричного представления алгебры $\mathbb{C}[X]$. Не опасаясь путаницы, будем обозначать последние два представления той же буквой α.

Предположим, что семейства $\alpha : X \to M_n(\mathbb{C})$ и $\beta : X \to M_n(\mathbb{C})$ подобны, т.е. существует такая обратимая матрица $P \in M_n(\mathbb{C})$, что $P^{-1}\alpha(x)P = \beta(x)$ для всех $x \in X$. Тогда, очевидно, и для любого полинома $f \in \mathbb{C}[X]$ верно равенство $P^{-1}\alpha(f)P = \beta(f)$. В частности, f может быть словом из $\langle X \rangle$. Таким образом оказывается, что вопрос о подобии матричных семейств равносилен вопросу о подобии определяемых этими семействами матричных представлений моноида $\langle X \rangle$ и алгебры $\mathbb{C}[X]$. То же верно и для унитарного подобия.

Вначале обратимся к нормальным матричным семействам. Свойство нормальности состоит в том, что матрицы, сопряженные с матрицами семейства, представимы как полиномы от матриц семейства. Например, если семейство $\alpha : X \to M_n(\mathbb{C})$ неприводимо (не существует нетривиальных α-инвариантных подпространств), то оно нормально. Действительно, согласно теореме Бернсайда [6, 14.8] в этом случае любая матрица из $M_n(\mathbb{C})$ представима указанным выше образом. Что касается семейства (3), то, поскольку первые две его матрицы эрмитовы, для нормальности достаточно, чтобы матрица $(A\overline{A})^*$ была полиномом от матриц AA^*, $A^T\overline{A}$ и $A\overline{A}$. В частности, нормальным является семейство, в котором матрица $A\overline{A}$ нормальная (то есть A – конгруэнтно-нормальная матрица). Заметим, что проверка нормальности любого матричного семейства осуществима конечной процедурой.

Суммой матричных семейств $\alpha_i : X \to M_{n_i}(\mathbb{C})$ $(i = 1, \ldots, t)$ называется семейство вида

$$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_t, \quad \text{где} \quad \alpha(x) = \alpha_1(x) \oplus \cdots \oplus \alpha_t(x) \tag{4}$$

(символ $\oplus$ обозначает прямое суммирование матриц). Напомним, что семейство матриц, подобное сумме неприводимых семейств, называется вполне приводимым.

Предположим, что пространство $\mathbb{C}^n$ снабжено стандартным скалярным произведением (a, b). Если α – нормальное семейство, то ортогональное дополнение α-инвариантного подпространства L тоже α-инвариантно. Действительно, пусть $a \in L, b \in L^\perp$ и f – такой полином, что $\alpha^*(x) = \alpha(f)$. Тогда

$$(a, \alpha(x)b) = (\alpha^*(x)a, b) = (\alpha(f)a, b) = 0,$$

поскольку $\alpha(f)a \in L$. Ввиду произвольности выбора $x \in X$ выводим отсюда инвариантность $L^{\perp}$. Из приведённого рассуждения вытекает, что пространство $\mathbb{C}^n$ разлагается в ортогональную сумму инвариантных подпространств, каждое из которых уже не содержит нетривиальных инвариантных подпространств. В переводе на матричный язык это значит, что всякое нормальное семейство унитарно подобно сумме неприводимых семейств. Чтобы получить более точное утверждение в этом роде, вначале докажем следующий результат.

Лемма 1. *Подобные нормальные семейства α и β унитарно подобны тогда и только тогда, когда семейство $\alpha + \beta$ нормально.*

Доказательство. Пусть U – унитарная матрица, преобразующая α в β, и f – такой полином, что $\alpha^*(x) = \alpha(f)$. Тогда

$$\beta^*(x) = U^*\alpha^*(x)U = U^*\alpha(f)U = \beta(f).$$

Следовательно,

$$(\alpha + \beta)^*(x) = (\alpha + \beta)(f), \tag{5}$$

что и доказывает (ввиду произвольности выбора $x \in X$) нормальность семейства $\alpha + \beta$. □

Теперь предположим, что $\alpha + \beta$ – нормальное семейство: для всякого $x \in X$ существует полином f со свойством (5). Из (5) следуют равенства

$$\alpha^*(x) = \alpha(f), \quad \beta^*(x) = \beta(f). \tag{6}$$

Пусть матрица P устанавливает подобие α и β:

$$P^{-1}\alpha(x)P = \beta(x), \quad x \in X.$$

Учитывая равенства (6), имеем:

$$P^{-1}\alpha^*(x)P = P^{-1}\alpha(f)P = \beta(f) = \beta^*(x).$$

Из двух последних равенств следует, что

$$PP^*\alpha(x) = \alpha(x)PP^*. \tag{7}$$

Рассмотрим полярное разложение $P = SU$. Поскольку эрмитов сомножитель S, будучи квадратным корнем из PP^*, может быть представлен в виде многочлена от PP^*, то из (7) следует, что $S\alpha(x) = \alpha(x)S$. Используя это соотношение, получим, что подобные семейства α и β на самом деле унитарно подобны:

$$P^{-1}\alpha(x)P = U^*S^{-1}\alpha(x)SU = U^*\alpha(x)U = \beta(x).$$

Обозначим через $\alpha^{[m]}$ сумму m экземпляров семейства α.

Лемма 2. *Любое нормальное семейство унитарно подобно семейству вида*

$$\alpha_1^{[m_1]} + \dots + \alpha_s^{[m_s]}, \tag{8}$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ – неприводимые попарно неподобные семейства.

Доказательство. Предположим, что нормальное семейство унитарным подобием приведено к виду (4) с неприводимыми слагаемыми. Сумма любых двух слагаемых тоже, очевидно, является нормальным семейством. Если эти слагаемые подобны, то по лемме 1 они обязаны быть унитарно подобными. Это значит, что семейство (4) ещё одним унитарным подобием можно преобразовать в такую сумму неприводимых семейств, в которой любые два семейства либо равны, либо не подобны. Наконец, переставив диагональные блоки посредством простейшего унитарного преобразования, можно добиться того, чтобы копии одного семейства были расположены рядом. □

Критерий унитарного подобия нормальных семейств даётся следующей теоремой [5].

Теорема 3. *Нормальные семейства матриц $\alpha : X \to M_n(\mathbb{C})$ и $\beta : X \to M_n(\mathbb{C})$ унитарно подобны тогда и только тогда, когда для любых $p, q \in \langle X \rangle$*

$$\operatorname{tr} \alpha^*(p)\alpha(q)) = \operatorname{tr} \beta^*(p)\beta(q). \tag{9}$$

Доказательство. Необходимость условий (9) очевидна. Докажем их достаточность. Условия (9) обеспечивают, при $p = e$, совпадение следов представлений α и β. Как известно, след вполне приводимого представления алгебры над полем характеристики 0 определяет это представление с точностью до подобия [6, 14.4]. Следовательно, наша задача – доказать, что из условий (9) вытекает не только подобие, но и унитарное подобие представлений α и β. Вначале рассмотрим случай, когда α и β неприводимы (и, следовательно, нормальны). По теореме Бернсайда найдутся слова $w_1, \dots, w_{n^2}$ такие, что матрицы $\alpha(w_1), \dots, \alpha(w_{n^2})$ линейно независимы. Обозначим символом $\alpha'(w_i)$ столбец высоты n^2, первые n элементов которого составляют первый столбец $\alpha(w_i)$, следующие n элементов – второй столбец, и т.д. Составим невырожденную матрицу

$$G = [\alpha'(w_1), \dots, \alpha'(w_{n^2})].$$

Непосредственным вычислением для произвольного слова w проверяется равенство

$$G^*\alpha^{[n]}(w)G = ||\mathrm{tr}\,\alpha^*(w_i)\alpha(w)\alpha(w_j)||.$$

Пусть

$$H = [\beta'(w_1), \dots, \beta'(w_{n^2})].$$

Из условий (9) для произвольного w вытекает равенство

$$G^*\alpha^{[n]}(w)G = H^*\beta^{[n]}(w)H. \tag{10}$$

В частности, при $w = e$ выполнено $G^*G = H^*H$. Из последнего равенства заключаем, что матрица H невырожденная, а матрица $U = GH^{-1}$ унитарная. Но тогда из (10) следует, что

$$U^*\alpha^{[n]}(w)U = \beta^{[n]}(w).$$

Поскольку α и β нормальны, то и семейства $\alpha^{[n]}$ и $\beta^{[n]}$ нормальны. Как доказано выше, они унитарно подобны. По лемме 1 семейство $\alpha^{[n]} + \beta^{[n]}$ тоже нормально. Тогда $\alpha + \beta$ нормально как подсумма предыдущей суммы. Как замечено в начале доказательства, семейства α и β подобны. Снова применяя лемму 1, получаем, что они унитарно подобны.

Теперь пусть α и β – произвольные нормальные семейства. Напомним, что в силу (9) они подобны. Согласно лемме 2, каждое из них унитарно подобно семейству вида (8). Как известно [6, 12.4], неприводимые компоненты вполне приводимого представления определены однозначно с точностью до порядка следования и подобия. Поэтому без ограничения общности можно считать, что семейства α и β имеют вид

$$\alpha = \alpha_1^{[m_1]} + \dots + \alpha_s^{[m_s]}, \quad \beta = \beta_1^{[m_1]} + \dots + \beta_s^{[m_s]},$$

причём α_i подобно β_i $(i = 1, \dots, s)$. Равенство (9) теперь можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^{s} m_i \mathrm{tr}\,\alpha_i^*(v)\alpha_i(w) = \sum_{i=1}^{s} m_i \mathrm{tr}\,\beta_i^*(v)\beta_i(w). \tag{11}$$

Заметим, что по причине линейности функции следа равенство (11) останется верным, если вместо слов v и w подставить какие угодно полиномы.

Дальше нам потребуется теорема Фробениуса–Шура [6, 14.8] в следующей удобной для данного случая формулировке.

Пусть $\alpha_i : X \to M_{n_i}\mathbb{C}$ $(i = 1, \dots, s)$ – неприводимые попарно неподобные семейства. Тогда для любых матриц C_i $(i = 1, \dots, s)$ порядков $n_1, \dots, n_l$ существует полином f такой, что $\alpha_i(f) = C_i$ $(i = 1, \dots, s)$.

Произвольным образом фиксируем k $(1 \leqslant k \leqslant s)$ и слово $w \in \langle X \rangle$. Согласно теореме Фробениуса–Шура, существует такой полином f, что

$$\alpha_k(f) = \alpha_k(w), \quad \alpha_i(f) = 0 \ \text{ при } \ i \neq k. \tag{12}$$

В силу подобия семейств α_i и β_i $(1 \leqslant i \leqslant s)$ имеем также равенства

$$\beta_k(f) = \beta_k(w), \quad \beta_i(f) = 0 \ \text{ при } \ i \neq k. \tag{13}$$

Подставим в (11) вместо w полином f. Затем, учитывая равенства (12), (13) и сокращая обе части на множитель m_k, приходим к равенству

$$\operatorname{tr} \alpha_k^*(v)\alpha_k(w) = \operatorname{tr} \beta_k^*(v)\beta_k(w),$$

где, напомним, на слова v и w не наложено никаких условий. Но в таком случае, согласно первой части доказательства, неприводимые семейства α_k и β_k унитарно подобны. Обозначим через U_k унитарную матрицу, преобразующую α_k в β_k. Тогда унитарная матрица $U = U_1^{[m_1]} \oplus \dots \oplus U_l^{[m_s]}$ преобразует семейство α в семейство β. Это завершает доказательство теоремы. □

Теперь получим конечный критерий унитарного подобия. Пусть X^k – множество слов длины не больше k, d_k – размерность линейной оболочки матриц $\alpha(p)$, $p \in X^k$. Длиной семейства α называется наименьшее l такое, что $d_l = d_{l+1}$. Чтобы исследовать на предмет унитарного подобия любые два семейства $(n \times n)$-матриц, нужно иметь верхнюю оценку длины, зависящую только от n. Очевидной границей является число $n^2 - 1$. В статье [7] доказана оценка, по порядку равная $n^{\frac{3}{2}}$, и, по-видимому, это не окончательный результат.

Фиксируем некоторую верхнюю границу $l = l(n)$. Для любого матричного семейства справедливо следующее утверждение, впервые доказанное в [5].

Лемма 3. *Функционал $\operatorname{tr} \alpha^*(v)\alpha(w)$ определён для любых $v, w \in \langle X \rangle$, если известны его значения на словах $v \in X^l, w \in X^{l+1}$.*

Доказательство. Будем считать, что множество $\langle X \rangle$ перенумеровано ($\langle X \rangle = \{p_0, p_1, \dots\}$), причём более короткое из двух слов имеет меньший номер. В частности, $p_0 = e$. Пусть $\bar{l}$ – количество слов в X^l.

Положим $H_l = [\alpha'(p_0), \alpha'(p_1), \dots, \alpha'(p_{\bar{l}-1})]$ и найдём вспомогательное семейство матриц $\widehat{\alpha} : X \to M_{\bar{l}}(\mathbb{C})$ из уравнений

$$\alpha^{[n]}(x)H_l = H_l\widehat{\alpha}(x), \quad x \in X. \tag{14}$$

В силу определения числа l и поскольку

$$\alpha^{[n]}(x)H_l = [\alpha'(x), \alpha'(xp_1), \dots, \alpha'(xp_{\bar{l}-1})],$$

уравнения (14) действительно разрешимы. Система (14) эквивалентна системе

$$H_l^*\alpha^{[n]}(x)H_l = H_l^*H_l\widehat{\alpha}(x), \quad x \in X. \tag{15}$$

Поскольку

$$H_l^*H_l = ||\operatorname{tr}\alpha^*(p_i)\alpha(p_j)||, \quad H_l^*\alpha^{[n]}(x)H_l = ||\operatorname{tr}\alpha^*(p_i)\alpha(xp_j)||,$$

то семейство $\widehat{\alpha}$ определяется числами

$$\operatorname{tr}\alpha^*(v)\alpha(w), \quad v \in X^l, \quad w \in X^{l+1}. \tag{16}$$

Столбцы H_l линейно зависимы ($\bar{l}$ намного больше, чем n^2), поэтому мы не можем сказать, что $\widehat{\alpha}$ – единственное решение системы (14); для доказательства леммы достаточно того, что $\widehat{\alpha}$ – одно из решений.

Равенства (14), очевидно, останутся верными, если в них x заменить на любое слово w. Перемножая равенства

$$\alpha^{[n]}(w)H_l = H_l\widehat{\alpha}(w) \ \text{ и } \ H_l^*(\alpha^{[n]})^*(v) = \widehat{\alpha}^*(v)H_l^*,$$

получим

$$H_l^*(\alpha^{[n]})^*(v)\alpha^{[n]}(w)H_l = \widehat{\alpha}^*(v)H_l^*H_l\widehat{\alpha}(w),$$

или

$$||\operatorname{tr}\alpha^*(vp_i)\alpha(wp_j)|| = \widehat{\alpha}^*(v)||\operatorname{tr}\alpha^*(p_i)\alpha(p_j)||\widehat{\alpha}(w). \tag{17}$$

Заметим, что (1,1)-элемент матрицы (17) равен $\operatorname{tr}\alpha^*(v)\alpha(w)$.

Итак, зная матрицу $||\operatorname{tr}\alpha^*(p_i)\alpha(p_j)||$ и матричное семейство $\widehat{\alpha}$, можно вычислить значение $\operatorname{tr}\alpha^*(v)\alpha(w)$ для любых $v, w \in \langle X\rangle$. Эти матрицы определяются, как показано выше, числами (16), что и завершает доказательство леммы. □

Из теоремы 3 и леммы 3 непосредственно следует конечный критерий унитарного подобия нормальных семейств.

Теорема 4. *Нормальные семейства матриц* $\alpha : X \to M_n(\mathbb{C})$ *и* $\beta : X \to M_n(\mathbb{C})$ *унитарно подобны тогда и только тогда, когда равенства* (9) *выполняются для всех* $p \in X^l$, $q \in X^{l+1}$.

3. Критерий унитарной конгруэнтности

Возвращаясь к основной задаче об унитарной конгруэнтности двух матриц, рассмотрим матричные семейства

$$\alpha(s) = AA^*, \quad \alpha(t) = A^T\overline{A}, \quad \alpha(u) = A\overline{A}; \tag{18}$$

$$\beta(s) = BB^*, \quad \beta(t) = B^T B, \quad \beta(u) = B\overline{B}. \tag{19}$$

Предположим, что эти семейства нормальны. Тогда, согласно теореме 4, вопрос об унитарном подобии семейств (18) и (19) можно разрешить, проверив конечное число равенств (9). Таким образом, имеет место следующий частный критерий унитарной конгруэнтности.

Теорема 5. *Если семейства* (18) *и* (19) *нормальны, то матрица* A *унитарно конгруэнтна матрице* B *в точности тогда, когда равенства* (9) *выполняются для всех* $p \in \{s,t,u\}^l$, $q \in \{s,t,u\}^{l+1}$.

В общей ситуации, когда семейства (18) и (19) не являются нормальными или проверка нормальности по какой-либо причине не проводилась, конечный критерий унитарной конгруэнтности можно получить, увеличив объём проверок.

Рассмотрим четвёрки матриц

$$\{\alpha(s), \alpha(t), \alpha(u), \alpha(v)\} \quad \text{и} \quad \{\beta(s), \beta(t), \beta(u), \beta(v)\}. \tag{20}$$

Нетрудно видеть, что, во-первых, расширенные семейства (20) унитарно подобны тогда и только тогда, когда унитарно подобны семейства (18) и (19). Во-вторых, они являются нормальными семействами, причём специального вида – вместе с каждой матрицей они содержат и эрмитово сопряжённую с ней. Для таких семейств запись условий (9) можно упростить. Действительно, в этом случае для любого слова p существует слово p' очевидного строения такое, что $\alpha^*(p) = \alpha(p')$. Следовательно, всякое равенство из (9) эквивалентно некоторому равенству $\operatorname{tr}\alpha(p'q) = \operatorname{tr}\beta(p'q)$. Значит, равенства (9) в формулировках теорем 3 и 4 можно заменить на равенства вида $\operatorname{tr}\alpha(p) = \operatorname{tr}\beta(p)$. Тогда, например, теорема 4 превращается в следующее утверждение.

Теорема 6. *Семейства матриц* $\alpha : X \to M_n(\mathbb{C})$ *и* $\beta : X \to M_n(\mathbb{C})$, *замкнутые относительно сопряжения, унитарно подобны тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{tr}\alpha(p) = \operatorname{tr}\beta(p) \quad \text{для любого} \quad p \in X^{2l+1}. \tag{21}$$

Комбинируя теорему 2 и теорему 6, получаем искомый общий критерий унитарной конгруэнтности двух комплексных матриц.

Теорема 7. *Матрицы A и B унитарно конгруэнтны тогда и только тогда, когда для матричных семейств* (20) *с алфавитом* $X = \{s, t, u, v\}$, *где*

$$\alpha(s) = AA^*, \quad \alpha(t) = A^T\overline{A}, \quad \alpha(u) = A\overline{A}, \quad \alpha(v) = (A\overline{A})^*;$$

$$\beta(s) = BB^*, \quad \beta(t) = B^T B, \quad \beta(u) = B\overline{B}, \quad \beta(v) = (B\overline{B})^*,$$

выполняется конечная совокупность равенств (21).

Замечание. Унитарная конгруэнтность, как и унитарное подобие, есть отношение эквивалентности на множестве $M_n(\mathbb{C})$. Теорема 7 означает существование такой конечной совокупности многочленов от элементов матрицы и сопряжённых к ним элементов, что значения этих многочленов определяют матрицу с точностью до класса унитарной конгруэнтности. Следовательно, как и в случае унитарного подобия, относительно унитарной конгруэнтности существует полная конечная система инвариантов.

Литература

1. Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ.* Мир, М., 1989.
2. C. Pearcy, *A complete set of unitary invariants for operators generating finite W^*-algebras of type* I. — Pacif. J. Math. **12** (1962), 1405–1416.
3. Ю. А. Альпин, Х. Д. Икрамов, *Критерий унитарной конгруэнтности матриц.* — Докл. РАН **437** (2011), No. 1, 7–8.
4. Y. Hong, R. A. Horn, *A characterization of unitary congruence.* — Linear and Multilinear Algebra **25** (1989), 105–119.
5. Ю. А. Альпин, Х. Д. Икрамов, *Об унитарном подобии матричных семейств.* — Мат. заметки **74** (2003), 815–826.
6. B. L. van der Waerden, *Algebra.* Vol. I. Springer-Verlag, 2003.
7. C. Pappacena, *An upper bound for the length of a finite-dimensional algebra.* — J. Algebra **197** (1997), 535–545.

Al'pin Yu. A., Ikramov Kh. D. A criterion for unitary congruence between complex matrices.

Let A and B be square complex matrices. Based on an important result of Y. P. Hong and R. A. Horn, we propose a criterion for verifying unitary congruence of these matrices. The criterion requires that a finite number of arithmetic operations be performed. No criteria with this finiteness property were previously known.

Казанский государственный университет,
Кремлевская ул. 18, 420008 Казань, Россия
E-mail: Yuri.Alpin@ksu.ru

Московский государственный
университет ГСП-1, Ленинские горы,
119991 Москва, Россия
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 2 октября 2011 г.